بسم الله الرحمن الرحیم

**دانشگاه یزد**

**دانشکده ریاضی**

**گروه آمار**

**پایان‌نامه**

**برای دریافت درجه کارشناسی ارشد**
**آمار ریاضی**

# استنباط آماری برای پارامترهای توزیع لاپلاس تحت سانسور نوع دوم

**استاد راهنما:** دکتر حمزه ترابی

**استاد مشاور:** دکتر علی دولتی

**پژوهش و نگارش:** حسنعلی امینی

**مهر ماه ۱۳۹۱**

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

شکرگزارم او را که مسیر رفتنم را به نورهای مکرر روشن ساخت، چرا که اگر خواست او نبود این روشنایی‌ها را به‌همراه نداشتم.

سپاسگزارم از استاد راهنمای گرامی و عزیزم، دکتر حمزه ترابی، که بدون حضور ایشان پیمودن این راه برایم غیر ممکن بود.

سپاسگزارم از استاد مشاور بزرگوارم، دکتر علی دولتی، که در این راه یاریم نموده‌اند.

سپاسگزارم از تمامی دوستان به خصوص آقای محمد میرزایی و خانم نرگس منتظری که با حضور مهربانانه و کمک‌های بی‌دریغشان مرا یاری کرده‌اند.

سپاسگزارم از خانواده‌ی عزیزم ، که حضورشان مایه دلگرمی و یادشان مایه شادمانی من است.

# چکیده

هدف این پژوهش بسط و گسترش استنباط آماری برای پارامترهای مکان و مقیاس توزیع لاپلاس بر اساس برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی تحت نمونه‌ی سانسور شده نوع دوم است. بر اساس کمیت‌های محوری بازه‌های اطمینان دقیق و آزمون فرض‌ها ساخته می‌شوند. با شرطی کردن روی تعداد مشاهداتی که کمتر از میانه‌ی جامعه هستند، توزیع کمیت‌های محوری به عنوان آمیخته‌ای از ترکیبات خطی و نسبتی از ترکیبات متغیرهای تصادفی نمایی استاندارد بیان می‌شوند که محاسبه چندک‌های کمیت محوری را ساده می‌کند. در ادامه، جدول چندک‌ها تحت نمونه‌ی کامل ارائه می‌شود.

# فهرست مطالب


**۱ مفاهیم و تعاریف اولیه** ۱

۱.۱ داده‌های سانسور شده . . . . . ۲

۱.۱.۱ سانسور نوع اول . . . . . ۲

۲.۱.۱ سانسور نوع دوم . . . . . ۳

۳.۱.۱ سانسور نوع اول چپ-راست . . . . . ۴

۴.۱.۱ سانسور نوع دوم چپ-راست . . . . . ۴

۲.۱ توزیع‌های بریده شده . . . . . ۵

۳.۱ خانواده مکانی-مقیاسی . . . . . ۶

۴.۱ برآورد ماکسیمم درستنمایی و کمیت محوری . . . . . ۷

**۲ استنباط پیرامون پارامترهای توزیع لاپلاس تحت نمونه‌ی کامل** ۹

۱.۲ برآوردگرهای نقطه‌ای پارامترهای توزیع لاپلاس تحت نمونه‌ی کامل . . . . . ۱۰

۲.۲ توزیع دقیق برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی توزیع لاپلاس تحت نمونه‌ی کامل ۱۲

۱.۲.۲ توزیع کمیت محوری $S = \frac{\hat{\sigma}}{\sigma}$ . . . . . ۲۱

۲.۲.۲ توزیع $T = \frac{\hat{\mu} - \mu}{\hat{\sigma}}$ . . . . . ۲۴

۳.۲ استنباط دقیق پیرامون توزیع لاپلاس تحت نمونه‌ی کامل . . . . . ۳۹

**۳ استنباط پیرامون پارامترهای توزیع لاپلاس تحت سانسور نوع دوم چپ-راست** ۴۵

۱.۳ برآوردگرهای نقطه‌ای پارامترهای توزیع لاپلاس تحت سانسور نوع دوم چپ-راست . . . . . ۴۶
۲.۳ توزیع دقیق برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی توزیع لاپلاس تحت نمونه‌ی چپ-راست . . . . . ۵۲
۱.۲.۳ توزیع کمیت محوری $S = \frac{\hat{\sigma}}{\sigma}$ . . . . . ۵۲
۲.۲.۳ توزیع کمیت محوری $T = \frac{\hat{\mu} - \mu}{\hat{\sigma}}$ . . . . . ۵۸
۳.۳ استنباط دقیق پیرامون توزیع لاپلاس تحت سانسور نوع دوم چپ-راست . . . ۶۴

**۴ مطالعات شبیه‌سازی** **۶۹**

۱.۴ شبیه‌سازی توزیع لاپلاس تحت نمونه‌ی کامل . . . . . ۷۰
۲.۴ شبیه‌سازی توزیع لاپلاس تحت سانسور نوع دوم چپ-راست . . . . . ۷۳

**آ برنامه‌های کامپیوتری با $R$** **۷۹**

آ.۱ برنامه احتمال پوشش دقیق بازه‌های اطمینان $\mu$ با استفاده از توزیع مجانبی نرمال استاندارد . . . . . ۷۹
آ.۲ برنامه احتمال پوشش دقیق بازه‌های اطمینان $\sigma$ با استفاده از توزیع مجانبی نرمال استاندارد . . . . . ۸۰
آ.۳ برآورد احتمال پوشش برای $\mu$ و $\sigma$ با استفاده از بازه اطمینان بوت‌استرپ تحت نمونه کامل با ۱۰۰۰۰ بار شبیه‌سازی و ۱۰۰۰ نمونه بوت‌استرپ. . . . . ۸۲
آ.۴ برنامه چندک‌های توزیع $T$ تحت نمونه کامل . . . . . ۸۴
آ.۵ برنامه چندک‌های توزیع $S$ تحت نمونه کامل . . . . . ۸۵
آ.۶ برنامه مربوط به مثال رودخانه فاکس . . . . . ۸۶
آ.۷ برنامه مربوط به برآورد پارامترها به همراه مقادیر $MSE$ برای توزیع لاپلاس تحت سانسور نوع دوم چپ-راست. . . . . ۸۸

**ب واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی** **۹۱**

پ  واژه نامه‌ی انگلیسی به فارسی ۹۳

مراجع ۹۵

# لیست جداول


۱.۲ داده‌های مربوط به تفاوت سطح آب رودخانه فاکس شهر ویسکانسین در مدت ۳۳ سال . . . . . ۴۲

۱.۴ احتمال پوشش دقیق بازه‌های اطمینان $\mu$ تحت نمونه کامل و با استفاده از توزیع مجانبی نرمال استاندارد. . . . . ۷۱

۲.۴ احتمال پوشش دقیق بازه‌های اطمینان $\sigma$ تحت نمونه کامل و با استفاده از توزیع مجانبی نرمال استاندارد. . . . . ۷۲

۳.۴ برآورد احتمال پوشش برای $\mu$ با استفاده از بازه اطمینان بوت‌استرپ تحت نمونه کامل با ۱۰۰۰۰ بار شبیه‌سازی و ۱۰۰۰ نمونه بوت‌استرپ. . . . . ۷۲

۴.۴ برآورد احتمال پوشش برای $\sigma$ با استفاده از بازه اطمینان بوت‌استرپ تحت نمونه کامل با ۱۰۰۰۰ بار شبیه‌سازی و ۱۰۰۰ نمونه بوت‌استرپ. . . . . ۷۳

۵.۴ چندک‌های $T$ در حالت نمونه کامل. . . . . ۷۵

۶.۴ چندک‌های $S$ در حالت نمونه کامل. . . . . ۷۶

۷.۴ مقادیر برآورد پارامترها به همراه $MSE$ های متناظر برای توزیع لاپلاس تحت سانسور نوع دوم چپ-راست برای $\mu = ۲$، $\sigma = ۱$ و $s = ۵$، $n = ۱۵$ به ازای مقادیر مختلف $r$. . . . . ۷۶

۸.۴ مقادیر برآورد پارامترها به همراه $MSE$ های متناظر برای توزیع لاپلاس تحت سانسور نوع دوم چپ-راست برای $\mu = ۲$، $\sigma = ۱$ و $s = ۸$، $n = ۱۵$ به ازای مقادیر مختلف $r$. . . . . ۷۷

۹.۴ مقادیر برآورد پارامترها به همراه $MSE$ های متناظر برای توزیع لاپلاس تحت سانسور نوع دوم چپ–راست برای $\mu = ۲$، $\sigma = ۱$ و $s = ۱۲$، $n = ۲۰$ به ازای مقادیر مختلف $r$. . . . . ۷۷
۱۰.۴ مقادیر برآورد پارامترها به همراه $MSE$ های متناظر برای توزیع لاپلاس تحت سانسور نوع دوم چپ–راست برای $\mu = ۲$، $\sigma = ۱$ و $s = ۲۰$، $n = ۳۰$ به ازای مقادیر مختلف $r$. . . . . ۷۸
۱۱.۴ مقادیر برآورد پارامترها به همراه $MSE$ های متناظر برای توزیع لاپلاس تحت سانسور نوع دوم چپ–راست برای $\mu = ۲$، $\sigma = ۱$ و $s = ۲۰$، $n = ۴۰$ به ازای مقادیر مختلف $r$. . . . . ۷۸

# فهرست نمادها


| نماد | توضیح | صفحه |
|---|---|---|
| $L(.)$ | تابع درستنمایی | ۳ |
| $f(.)$ | تابع چگالی احتمال | ۳ |
| $F(.)$ | تابع توزیع احتمال | ۳ |
| $F(x\|x \leq t)$ | توزیع بریده شده‌ی $X$ در نقطه $t$ از سمت راست | ۶ |
| $\xrightarrow{d}$ | همگرایی در توزیع | ۸ |
| $N(.,.)$ | توزیع نرمال | ۸ |
| $X \stackrel{d}{=} Y$ | هم‌توزیعی دو متغیر تصادفی $X$ و $Y$ | ۱۳ |
| $Bin(.,.)$ | توزیع دوجمله‌ای | ۱۳ |
| $I(.)$ | تابع نشانگر | ۱۳ |
| $[x]$ | جزء صحیح $x$ | ۲۲ |
| $f(x\|y)$ | تابع چگالی شرطی $X$ به‌شرط $Y = y$ در نقطه $x$ | ۱۳ |
| $f_{۱,...,n}(...)$ | تابع چگالی احتمال توام نمونه | ۱۵ |
| $Gama(.,.)$ | توزیع گاما | ۱۹ |
| $\Gamma(.)$ | تابع گاما | ۲۰ |
| $E(.)$ | توزیع نمایی | ۲۲ |
| $\#$ | تعداد | ۲۲ |
| $=:$ | معرفی نماد جدید برای رابطه سمت چپ تساوی | ۲۹ |
| $f \equiv g$ | هم‌ارزی دو تابع $f$ و $g$ | ۳۷ |

# پیشگفتار

در برخی از پژوهش‌های مربوط به تحلیل داده‌های بقا با آزمون‌های طول عمر روبرو می‌شویم. موارد زیادی وجود دارد که در آزمون‌های طول عمر همه‌ی مشاهدات نمونه ثبت نشده‌اند و یا همه‌ی واحدهای نمونه به نتیجه نرسیده‌اند؛ در این شرایط با یک نمونه‌ی سانسور شده روبرو هستیم.

با نگاهی دقیق به مراحل تولید یک محصول، از تحقیق و نظرخواهی راجع به نوع محصول (شامل اندازه، رنگ، استانداردها، بازاریابی و ...)، کنترل کیفیت در حین تولید و در خرید مواد اولیه، تا محاسبه‌ی قابلیت اعتماد محصول، نقش روش‌های آماری بر کسی پوشیده نیست. مسئله‌ی قابلیت اعتماد از آنجا دارای اهمیت است که این محصولات در بوته‌ی آزمایش قرار گرفته و مثلاً در سیستم کنترل هواپیما یا در ابزار پزشکی یا جراحی و غیره به‌کار می‌روند و عدم کارایی و یا اعتماد بیش از حد به آن‌ها خسارات غیر قابل جبرانی را به بار می‌آورد. شدت رقابت جهانی برای توسعه‌ی محصولات جدید در زمان‌های کوتاه انگیزه‌ی توسعه‌ی روش‌های جدید از قبیل طراحی، تولید به موقع، ساخت و مونتاژ را برانگیخته است. از همه مهم‌تر، تولیدکنندگان و مصرف‌کنندگان انتظار دارند که محصولات از قابلیت اعتماد بالایی برخوردار باشند. از این‌رو، ضمانت طولانی و تضمین برای قابلیت اعتماد یک محصول یکی از ویژگی‌های استاندارد آن به شمار می‌آید. بنابراین نیاز به برآورد دقیق طول عمر یک محصول با استفاده از اجرای آزمایش مواد، مولدها و سیستم‌ها در مراحل متفاوت تولید است. آزمایش تحت شرایط نرمال نیاز به زمان بسیار طولانی و همچنین استفاده از تعداد گسترده‌ای واحدهای تحت آزمایش دارد. بنابراین چنین آزمایشی پرهزینه و تقریباً غیر عملی است. همچنین در بسیاری از موقعیت‌ها جمع‌آوری داده‌های مربوط به طول عمر یک محصول تحت شرایط معمولی به دلیل بالا بودن قابلیت اعتماد آن دشوار است. بنابراین از آزمون‌هایی نظیر آزمون طول عمر سانسور نوع دوم چپ-راست استفاده می‌شود.

بین و انگلهارد[۱] [۳] در سال ۱۹۷۳ با استفاده از کمیت‌های محوری استنباط تقریبی برای پارامترهای مکان و مقیاس توزیع لاپلاس، به‌دست آوردند. کاپنمن[۲] [۲۰] در سال ۱۹۷۵ با استفاده از استنباط شرطی و اختصاص دادن شرایطی بر روی آماره‌های فرعی، توزیع پارامترها را به‌دست

---

[۱] Bain and Engelhardt

[۲] Kappenman

آورد. سانسینگ[۳] [۲۲] در سال ۱۹۷۶ یک روش کاملاً متفاوت بر اساس توزیع آماره $t$ استاندارد در مورد توزیع لاپلاس انجام داد. گریس و همکاران[۴] [۱۵] در سال ۱۹۷۸ با استفاده از دو رویکرد توانستند پیرامون پارامتر مکان استنباط آماری انجام دهند، یکی از آن شرایط محدود کردن فاصله اطمینان بود. چایلدز و بالاکریشنان[۵] [۸] در سال ۱۹۹۶ شرایط تقریب کاپنمن را برای نمونه‌ی از راست سانسور شده نوع دوم تعمیم دادند. به‌تازگی ایلیوپولوس[۶] و بالاکریشنان [۱۶] در سال ۲۰۱۱ برآورد پارامترهای توزیع لاپلاس را برای نمونه‌ی سانسور شده نوع دوم به‌دست آوردند.

در این پایان‌نامه، در فصل اول به معرفی انواع سانسورها می‌پردازیم و سپس تعاریف و پیش‌نیازهای مورد استفاده در فصل‌های بعد را بیان خواهیم کرد. در فصل دوم و سوم به‌ترتیب مدل کامل و سانسور نوع دوم چپ-راست را معرفی خواهیم کرد و سپس به استنباط پیرامون پارامترهای مجهول مدل خواهیم پرداخت و در فصل چهارم نتایج حاصل از شبیه‌سازی را ارائه خواهیم کرد.

---

[۳] Sansing

[۴] Grice

[۵] Childs and Balakrishnan

[۶] Iliopoulos