دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

پایان‌نامه برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

عنوان پایان‌نامه:

قضایای نقطه ثابت ادل اشتاین

نگارش:

فاطمه دانیال

استاد راهنما:

دکتر هاشم پروانه مسیحا

استاد مشاور:

دکتر کوروش نوروزی

شهریور ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

تشکر و قدردانی

شکر شایان نثار ایزد منان که توفیق را رفیق راهم ساخت تا این پایان نامه را به پایان برسانم.

بدون شک جایگاه و منزلت استاد، اجّل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم.

اما از آنجایی که تجلیل از استاد، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می کند و سلامت امانت هایی را که به دستش سپرده اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب

"من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر الله عزّ و جلّ":

از استاد با کمالات و شایسته؛ جناب آقای دکتر هاشم پروانه مسیحا که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر عهده گرفتند؛ از استاد فرهیخته و صبور، جناب آقای دکتر کوروش نوروزی، که زحمت مشاوره این پایان نامه را در حالی متقبل شدند که بدون مساعدت ایشان، این پروژه به نتیجه مطلوب نمی رسید؛ و از اساتید فرزانه و دلسوز؛ جناب آقای دکتر سید منصور واعظ پور و خانم دکتر ملیحه حسینی که زحمت داوری این پایان نامه را متقبل شدند؛ کمال تشکر و قدردانی را دارم.

پروردگارا حسن عاقبت، سلامت و سعادت را برای آنان مقدر نما.

چکیده

در این پایان نامه شرایطی که بیانگر وجود نقاط ثابت برای نگاشت‌های تقریباً انقباضی تعریف شده روی فضاهای متریک فشرده هستند، بررسی می شوند.به علاوه محکی برای یکتایی نقاط ثابت عملگرهای ذکر شده معرفی می شود. در نهایت، نتایج با یکسان‌سازی برخی قضایای نقطه ثابت مرتبط در پایان نامه تعمیم داده می شوند.

کلمات کلیدی: فضای متریک، انقباض ضعیف، نقطه ثابت، نگاشت انقباض.

فهرست مطالب

مقدمه

در آنالیز غیرخطی، قضایای نقاط ثابت به دلیل کاربردهای وسیعی که در حوزه‌هایی مانند اقتصاد [۵، ۱۹] و علوم کامپیوتر [۱۵، ۱۳، ۱۸، ۲۱، ۲۲] و بسیاری از علوم دیگر دارد ،تحقیقات روزافزونی را به خود اختصاص داده است. از تئوری‌های پیشرو در این زمینه اصل انقباض باناخ است که بیانگر وجود نقطه ثابت منحصربفردی برای نگاشت‌های انقباضی تعریف شده در فضای متریک کامل می‌باشد. اصل انقباض باناخ مرجع است و سایر قضایا از این اصل که نه تنها وجود و یکتایی نقطه ثابت را برای انقباض‌ها ثابت کرده بلکه طریقه به دست آوردن آن را نیز نشان داده ،نتیجه می‌شود. بعد از این اصل معروف ([۳]) مولفین زیادی انواع دیگر نگاشت‌های انقباضی را تعریف و قضایای نقطه ثابت مرتبط با آن‌ها را ثابت کردند که از جمله آنها می‌توان از ریچ[۱] [۲۰]، کانان[۲] [۱۲]، آرشاد و همکاران[۳] [۲]، زامفیرسکیو[۴] [۲۶]، چرچ[۵] [۷، ۸، ۶] و روگرز و هاردی[۶] [۱۱] نام برد.

درفصل اول این پایان‌نامه مفهوم انقباض و انواع نگاشت‌های انقباضی معرفی و قضایای مرتبط با آن‌ها بیان می‌گردد ([۴]، [۱۰]، [۲۴] و [۲۶]). در فصل دوم (c)-شرطها معرفی و قضایای نقطه ثابت وابسته به آن‌ها بررسی می‌شود ([۱۶] و [۱۷]). در فصل سوم نیز قضایای نقطه ثابت ادل اشتاین و نتایج مرتبط با آن

[۱] Reich

[۲] Kannan

[۳] Arshad et al

[۴] Zamfirescu

[۵] Ciric

[۶] Rogers and Hardy

بیان می‌گردد ([۱۴]).

فصل ۱

تقریب نقاط ثابت انقباض های ضعیف

مقدمه

در این فصل مفهوم انقباض ضعیف معرفی و با انواع نگاشتهای انقباضی مقایسه می گردد. سپس دو قضیه برای این دسته نکاشت ها در فضای متریک کامل بررسی و نتایج به قضایای نقطه ثابت شناخته شده ای چون باناخ-کانان -چاترجیا و زامفرسکیو بسط داده می شود. ارزش اصلی انقباض های ضعیف، یکسان سازی دسته بزرگی از انواع نگاشت های انقباضی است که نقاط ثابت ان ها از تکرار پیکارد به دست می آید

۱.۱ اصل انقباض باناخ

تعریف ۱.۱. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک است. نگاشت $T: X \to X$ را انقباض اکید گویند هرگاه

$$\exists a \in (0,1),\ \forall x,y \in X, \qquad d(Tx,Ty) \leq ad(x,y).$$

تعریف ۲.۱. نگاشت $T: X \to X$ را انقباض ضعیف گویند هرگاه:

$$\exists \delta \in (0,1),\, l \geq 0 \text{ s.t } d(Tx,Ty) \leq \delta d(x,y) + ld(y,Tx), \qquad (\forall x,y \in X).$$

تبصره ۱.۱. با توجه به متقارن بودن d شرط انقباض ضعیف به‌وضوح شامل حالت زیر می‌شود که از تعویض y و x و جایگزینی $d(y,x)$ و $d(Ty,Tx)$ به ترتیب با $d(x,y)$ و $d(Tx,Ty)$ به‌دست می‌آید

$$d(Tx,Ty) \leq \delta d(x,y) + ld(x,Ty),\ \forall x,y \in X.$$

در نتیجه برای بررسی کردن انقباض ضعیف هر دو شرط با هم بررسی می شوند. بدیهی است که با در نظر گرفتن $\delta = a$ و $l = 0$ هر انقباض قوی، یک انقباض ضعیف است.

تعریف ۳.۱. مجموعه نقاط ثابت نگاشت $T: X \to X$ را با

$$F(T) = \{x \in X \mid Tx = x\}$$

نمایش می‌دهیم.

اصل انقباض باناخ یکی از مفیدترین نتایج در نظریه نقطه ثابت است. در یک فضای متریک کامل این اصل به‌صورت زیر بیان می‌شود.

قضیه ۱.۱.۱. [۴] اگر (X,d) یک فضای متریک کامل و $T:X\to X$ یک انقباض اکید باشد آن‌گاه

p_1) T دارای نقطه ثابت منحصر به فرد p است.

p_2) برای هر $x\in X$ تکرار پیکارد $\{x_n\}$ که به‌صورت $x_{n+1}=Tx_n,\ n=0,1,2,\cdots$ تعریف می‌شود همگرا به p است.

نگاشت T برقرار در دو شرط بالا را عملگر پیکارد می‌نامند.

قضیه ۱.۱.۱ به همراه تعمیم‌های مستقیم آن کاربرد های زیادی در حل معادلات غیر خطی دارد، اما دارای یک اشکال عمده است. شرط انقباض اکید باعث پیوسته بودن T روی X می‌شود و طبیعی است که بپرسیم آیا شرایط انقباضی وجود دارند که بر پیوستگی T دلالت نکنند . این سوال در ۱۹۶۸، توسط کانان پاسخ مثبت داده شد. او قضیه نقطه ثابتی را ثابت کرد که قضیه ۱.۱.۱ را با تعویض شرط انقباض اکید با شرط انقباض کانان به نگاشت‌هایی که نیازی به پیوستگی شان نبود ،تعمیم داد. بعد از قضیه کانان، در مقالات زیادی، قضایای نقطه ثابت برای دسته‌های متنوعی از انواع شرایط انقباضی که نیازمند پیوستگی T نبودند، مطرح شدند که از جمله آنها می‌توان از چاترجیا نام برد.

قضیه ۲.۱.۱. [۴] فرض کنید (X,d) یک فضای متریک کامل و $T:X\to X$ یک انقباض ضعیف است. آن‌گاه:

الف) $F(T)\neq\phi$.

ب) برای هر $x_0\in X$ تکرار پیکارد $\{x_n\}$ همگرا به نقطه‌ای از $F(T)$ مانند x^* است.

ج) اگر $x_0\in X$ و $\lim x_n=x_0$، آن‌گاه تقریب‌های زیر برقرارند

$$d(x_n,x^*)\leq\frac{\delta^n}{1-\delta}d(x_0,x_1)\qquad n=0,1,2,\cdots$$

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{\delta}{1-\delta} d(x_{n-1}, x_n) \quad , n = 0, 1, 2, \cdots .$$

δ عدد ثابت موجود در شرط انقباض ضعیف است.

اثبات. ثابت خواهیم کرد که T حداقل یک نقطه ثابت در X دارد. برای این کار فرض کنید $x_0 \in X$ دلخواه و $\{x_n\}$ تکرار پیکارد تعریف شده در قضیه ۱.۱.۱ باشد. با در نظر گرفتن $y = x_n$ و $x = x_{n-1}$ و با استفاده از شرط انقباض ضعیف داریم

$$d(Tx_{n-1}, Tx_n) < \delta d(x_{n-1}, x_n) \Rightarrow d(x_n, x_{n+1}) \leq \delta d(x_{n-1}, x_n), \tag{۱.۱}$$

با استفاده از رابطه به‌دست آمده و استقراء داریم

$$d(x_n, x_{n+1}) < \delta^n d(x_0, x_1), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

پس

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq \delta^n (1 + \delta + \ldots + \delta^{p-1}) d(x_0, x_1) \\ &= \frac{\delta^n}{1-\delta}(1 - \delta^p) d(x_0, x_1), \quad n, p \in \mathbb{N}, \, p \neq 0. \end{aligned} \tag{۲.۱}$$

چون $1 > \delta > 0$ با استفاده از (۲.۱) نتیجه می‌گیریم که $\{x_n\}$ یک دنباله کشی است و چون X کامل است پس $\{x_n\}$ همگرا است یعنی

$$x^* = \lim_{n \to \infty} x_n \tag{۳.۱}$$

$$d(x^*, Tx^*) \leq d(x^*, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx^*) = d(x_{n+1}, x^*) + d(Tx_n, Tx^*)$$

از طرفی از شرط انقباض ضعیف داریم

$$d(Tx_n, Tx^*) \leq \delta d(x_n, x^*) + Ld(x^*, Tx_n)$$

از دو عبارت بالا داریم:

$$d(x^*, Tx^*) \leq (۱ + L)d(x_{n+۱}, x^*) + \delta d(x_n, x^*).$$

با حدگیری وقتی $n \to \infty$ در عبارت به‌دست آمده داریم:

$$d(x^*, Tx^*) = ۰.$$

پس $x^* = Tx^*$ و بنابراین x^* نقطه ثابت T است.

با حدگیری از عبارت (۲.۱) وقتی $p \to \infty$ قسمت اول حکم به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{\delta^n}{۱ - \delta}(۱ - \delta^p)d(x_۰, x_۱) \overset{p\to\infty}{\Longrightarrow} d(x_n, x^*) \leq \frac{\delta^n}{۱ - \delta}d(x_۰, x_۱)$$

برای اثبات قسمت دوم حکم از (۱.۱) و با توجه به استقراء به‌دست می‌آوریم که

$$d(x_{n+k}, x_{n+k+۱}) \leq \delta^{k+۱}d(x_{n-۱}, x_n), \quad k, n \in \mathbb{N}.$$

به‌طور مشابه با استفاده ا ز (۲.۱) داریم

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+۱}) + d(x_{n+۱}, x_{n+۲}) + \cdots + d(x_{n+p-۱}, x_{n+p}) \\ &\leq \delta d(x_{n-۱}, x_n) + \delta^۲ d(x_{n-۱}, x_n) + \cdots + \delta^p d(x_{n-۱}, x_n), \end{aligned}$$

بنابراین

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{\delta(۱ - \delta^p)}{۱ - \delta}d(x_{n-۱}, x_n) \quad n \geq ۱, \ \ p \in N^*. \tag{۴.۱}$$

با حدگیری از عبارت (۴.۱) وقتی $p \to \infty$ حکم نتیجه می‌شود و اثبات تکمیل می‌گردد.

قضیه ۳.۱.۱. [۴] فرض کنید (X, d) یک فضای متریک کامل و $T : X \to X$ یک انقباض ضعیف است و

$$\exists\theta \in (۰, ۱),\, l \geq ۰,\, \forall x, y \in X,\ \ d(Tx, Ty) \leq \theta d(x, y) + ld(x, Tx)$$

آن‌گاه:

الف) $F(T) = \{x^*\}$.

ب) برای هر $x_۰ \in X$ تکرار پیکارد $\{x_n\}$ همگرا به $x^* \in F(T)$ می‌باشد.

ج) تقریب های زیر برقرارند

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{\delta^n}{۱ - \delta} d(x_۰, x_۱) \quad n = ۰, ۱, ۲, \cdots,$$

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{\delta}{۱ - \delta} d(x_{n-۱}, x_n) \quad n = ۰, ۱, ۲, \cdots.$$

د) برآورد همگرایی تکرار پیکارد به صورت زیر است

$$d(x^*, x_n) \leq \theta d(x^*, x_{n-۱}) \quad , n = ۱, ۲, \cdots,$$

اثبات. فرض کنید T دارای دو نقطه $x^*, y^* \in X$ است، آن‌گاه با استفاده از فرض قضیه و جایگذاری $x = x^*$ و $y = y^*$ در این شرط داریم

$$d(x^*, y^*) \leq \theta d(x^*, y^*),$$

بنابراین

$$(1-\theta)d(x^*,y^*) \leq 0 \Rightarrow d(x^*,y^*) < 0,$$

و این تناقض است.

با جایگذاری $x = x^*$ و $y = x_{n-1}$ درفرض قضیه قسمت آخر حکم به‌دست می‌آید بقیه اثبات از قضیه قبل نتیجه می‌شود.

قضیه ۱.۱.۴. [۱۰] فرض کنید (X,d) یک فضای متریک فشرده و T یک نگاشت روی X باشد به‌طوری‌که برای هر $x,y \in X$ و $x \neq y$، $d(Tx,Ty) < d(x,y)$ آن‌گاه T دارای نقطه ثابت منحصربفرد است.

اثبات. تابع $g : X \to R$ با ضابطه $g(x) = d(x,T(x))$ پیوسته است. چون X فشرده است پس g می‌نیمم مطلق خود را در نقطه‌ای مانند $p \in X$ اختیار می‌کند. اگر $g(p) > 0$ آن‌گاه با فرض $T(p) = q$ داریم

$$g(q) = d(q,T(q)) = d(T(p),T(T(p))) < d(p,T(p)) = g(p),$$

که تناقض است. درنتیجه $g(p) = 0$ یا $T(p) = p$.

۱.۲ انواع نگاشت‌های انقباض

تعریف ۱.۴. نگاشت $T : X \to X$ را نگاشت کانان گویند هرگاه

$$\exists b \in (0, \frac{1}{2}) \text{ s.t } d(Tx,Ty) \leq b[d(x,Tx) + d(y,Ty)].$$

تعریف ۵.۱. نگاشت $T : X \to X$ را نگاشت چاترجیا گویند هرگاه

$$\exists c \in (\text{۰}, \frac{\text{۱}}{\text{۲}}) \text{ s.t } d(Tx, Ty) \leq c[d(x, Ty) + d(y, Tx)].$$

تبصره ۲.۱. هر نگاشت کانان یک انقباض ضعیف است.

اثبات.

$$d(Tx, Ty) \leq b[d(x, Tx) + d(y, Ty)] \leq b[d(x, y) + d(y, Tx) + d(y, Tx) + d(Tx, Ty)],$$

درنتیجه

$$(\text{۱} - b)d(Tx, Ty) \leq bd(x, y) + \text{۲}bd(y, Tx)],$$

بنابراین

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{b}{\text{۱} - b}d(x, y) + \frac{\text{۲}b}{\text{۱} - b}d(y, Tx) \ \forall x, y \in X.$$

با در نظر گرفتن $\delta = \frac{b}{\text{۱}-b}$ و $l = \frac{\text{۲}b}{\text{۱}-b}$ و با توجه به $\text{۰} < \frac{\text{۲}b}{\text{۱}-b}$،

$$\text{۰} < b < \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \Rightarrow \text{۰} < \frac{b}{\text{۱} - b} < \text{۱}$$

حکم ثابت می‌شود. برقراری شرط دیگر انقباض نیز به همین ترتیب است.

تبصره ۳.۱. هر نگاشت چاترجیا یک انقباض ضعیف است.

اثبات.

$$d(Tx, Ty) \leq c[d(x, Ty) + d(y, Tx)] \leq c[d(x, y) + d(y, Tx) + d(Tx, Ty) + d(y, Tx)],$$

پس

$$d(Tx,Ty) \leq c[d(x,y) + 2d(y,Tx) + d(Ty,Tx)],$$

درنتیجه

$$d(Tx,Ty) \leq \frac{c}{1-c}d(x,y) + \frac{2c}{1-c}d(y,Tx).$$

با در نظر گرفتن $\delta = \frac{c}{1-c}$ و $l = \frac{2c}{1-c}$ و با توجه به $l \geq 0$،

$$0 < c < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < \delta < 1$$

حکم ثابت می‌شود. شرط دیگر انقباض نیز به همین ترتیب برقرار می‌شود.

در ۱۹۷۲، زامفیرسکیو با ترکیب شرایط انقباضی تعریف شده در بالا قضیه نقطه ثابت زیر را به‌دست آورد.

قضیه ۱.۲.۵. [۴] فرض کنید (X,d) یک فضای متریک کامل و $T : X \to X$ یک نگاشت باشد به‌طوری‌که اعداد حقیقی a، b و c وجود داشته باشند که $0 < b,c < \frac{1}{2}$ و $0 < a < 1$ در این‌صورت اگر برای هر $x,y \in X$ حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد آن گاه T یک عملگر پیکارد است

Z_1) $d(Tx,Ty) \leq ad(x,y)$؛

Z_2) $d(Tx,Ty) \leq b[d(x,Tx) + d(y,Ty)]$؛

Z_3) $d(Tx,Ty) \leq c[d(x,Ty) + d(y,Tx)]$.

نتیجه ۱.۲.۱. هر نگاشت زامفرسکیو یعنی نگاشت برقرار در قضیه قبل، یک انقباض ضعیف است.

تعریف ۶.۱. نگاشت $T : X \to X$ را شبه انقباض چرچ گویند هرگاه

$$\exists 0 < h < 1 \quad d(Tx,Ty) \leq h\mathrm{Max}\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), d(x,Ty), d(y,Tx)\}.$$

قضیه ۶.۲.۱. [۴] هر شبه انقباض با $0 < h < \frac{1}{2}$ یک انقباض ضعیف است.

اثبات. اگر $M(x,y) = \mathrm{Max}\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), d(x,Ty), d(y,Tx)\}$ برای اثبات پنج حالت مختلف را بررسی می‌کنیم

حالت اول: اگر $M(x,y) = d(x,y)$ با در نظر گرفتن $\delta = h$ و $l = 0$ حکم به‌وضوح برقرار است.

حالت دوم: اگر $M(x,y) = d(x,Tx)$ آن‌گاه

$$d(Tx,Ty) \leq hd(x,Tx) \leq h[d(x,y) + d(y,Tx)].$$

با در نظر گرفتن $\delta = l = h$ حکم به‌وضوح برقرار است.

حالت سوم: اگر $M(x,y) = d(y,Ty)$ آن‌گاه

$$d(Tx,Ty) \leq hd(y,Ty) \leq h[d(y,Tx) + d(Tx,Ty)],$$

درنتیجه

$$d(Tx,Ty) \leq \frac{h}{1-h}d(y,Tx) \Rightarrow d(Tx,Ty) \leq \frac{h}{1-h}d(y,Tx) + \delta d(x,y).$$

که با درنظر گرفتن $l = \frac{h}{1-h}$ و $\delta \in (0,1)$ حکم به‌دست می‌آید.

در دو حالت $M(x,y) = d(x,Ty)$ یا $M(x,y) = d(y,Tx)$ حکم با در نظر گرفتن $\delta \in (0,1)$ به‌وضوح برقرار است. شرط دوم انقباض نیز به همین ترتیب ثابت می‌شود.

مثال ۱.۱. فاصله $[0,1]$ را با نرم معمولی درنظر می‌گیریم. اگر $T : [0,1] \to [0,1]$ تابع همانی باشد

آن‌گاه

الف) T در شرایط شبه انقباضی چرچ صدق نمی‌کند زیرا

$$|x-y| \leq h \max\{|x-y|, |x-y|, |y-x|, |x-x|, |y-y|\} \Rightarrow |x-y| \leq h|x-y|$$

که چون $۰ < h < ۱$ به تناقض می‌رسیم.

ب) T با $\delta \in (۰, ۱)$ اختیاری و $L \geq ۱ - \delta$ در شرایط انقباض ضعیف صدق می‌کند زیرا

$$|x-y| \leq \delta|x-y| + L|y-x|,$$

پس

$$(۱ - \delta - L)|x-y| \leq ۰,$$

بنابراین

$$۱ - \delta - L \leq ۰,$$

درنتیجه

$$۱ - \delta \leq L.$$

ج) مجموعه همه نقاط فاصله $[۰, ۱]$ نقاط ثابت هستند.

مثال ۲.۱. فرض کنید $T : [۰, ۱] \to [۰, ۱]$ به‌صورت زیر باشد

$$Tx = \begin{cases} \frac{۲}{۳} & ۰ \leq x < ۱ \\ ۰ & x = ۱ \end{cases}$$

الف) T در شرایط شبه انقباضی با $h \in [\frac{۲}{۳}, ۱)$ صدق می‌کند. اگر $۰ \leq x, y < ۱$ آن‌گاه حکم به‌وضوح

برقرار است زیرا

$$0 \leq h \max\left\{|x-y|, |x-\frac{2}{3}|, |y-\frac{2}{3}|\right\}.$$

اگر $1 > x \geq 0$ و $y = 1$ آن‌گاه

$$|\frac{2}{3} - 0| \leq h \max\left\{|x-1|, |x-0|, |x-\frac{2}{3}|, |1-0|, \frac{1}{3}\right\},$$

پس

$$\frac{2}{3} \leq h \times 1 \overset{0 \leq h \leq 1}{\Longrightarrow} \frac{2}{3} < h < 1.$$

ب) T با $\frac{2}{3} \leq \delta$ و $\delta \leq L$ در شرط انقباض ضعیف صدق می‌کند زیرا

$$0 \leq x < 1,\ y = 1 \qquad |\frac{2}{3} - 0| \leq \delta|x-1| + L|1-\frac{2}{3}| \Rightarrow \frac{2}{3} \leq \delta|x-1| + \frac{1}{3}L.$$

ج) T دارای نقطه ثابت $x^* = \frac{2}{3}$ است.

د) T در فرض قضیه ۳.۱.۱ صدق نمی‌کند.

$$0 \leq x < 1,\ y = 1 \qquad |\frac{2}{3} - 0| \leq \theta|x-1| + L_1|x-\frac{2}{3}| \Rightarrow \frac{2}{3} \leq \theta|x-1| + L_1|x-\frac{2}{3}|.$$

۳.۱ تعمیم اصل انقباض باناخ

قضیه ۷.۳.۱. [۲۴] اگر تابع θ یک تابع ناصعودی از $[۰,۱)$ بروی $(\frac{۱}{۲},۱]$ باشد که به صورت زیر تعریف شده

$$\theta(r) = \begin{cases} ۱ & ۰ \leq r \leq \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲} \\ (۱-r)r^{-۲} & \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲} \leq r \leq \frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ (۱+r)^{-۱} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \leq r \leq ۱ \end{cases}$$

و X کامل باشد آن‌گاه هر تابع T روی X که در شرایط زیر صدق کند دارای نقطه ثابت منحصر به فرد است و به‌علاوه برای هر $x \in X$، $\lim_n T^n x = z$.

$$\exists r \in [۰,۱] \qquad \theta(r)d(x,Tx) \leq d(x,y) \Rightarrow d(Tx,Ty) \leq rd(x,y)$$

اثبات. $\theta(r) \in (\frac{۱}{۲},۱]$ درنتیجه $\theta(r) \leq ۱$ داریم

$$\theta(r)d(x,Tx) \leq d(x,Tx) \quad \forall x \in X$$

با جایگذاری $y = Tx$ در فرض قضیه داریم

$$d(Tx,T^{۲}x) \leq rd(x,Tx) \tag{۵.۱}$$

حال $u \in X$ را ثابت درنظر می‌گیریم و دنباله $\{u_n\}$ در X را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u_n = T^n u$$