بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده علوم

گروه فیزیک

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد فیزیک (گرانش و کیهان‌شناسی)

عنوان:

بررسی توانمندی نسبیت عام

استاد راهنما:

دکتر مهرداد فرهودی

استاد مشاور:

دکتر حسین شجاعی

نگارش:

جلال نوروز علیائی

شهریور ۸۷

تاریخ ....
شماره ....
پیوست..................

دانشگاه شهید بهشتی

بسمه تعالی

« صورتجلسه دفاع پایان نامه دانشجویان دوره کارشناسی ارشد»

تهران ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳ اوین
تلفن: ۲۹۹۰۱

بازگشت به مجوز دفاع شماره ۲۰۰/۲۶۷۵/د مورخ ۱۳۸۷/۶/۱۰ جلسه هیأت داوران ارزیابی پایان نامه آقای جلال نوروز علیائی به شماره شناسنامه ۱۳۱۸۳صادره ازتهران متولد۱۳۶۱دانشجوی دوره کارشناسی ارشد ناپیوسته رشته فیزیک – ذرات بنیادی و نظریه میدانها

با عنوان :

بررسی توانمندی نسبیت عام

به راهنمائی:

دکترمهرداد فرهودی

طبق دعوت قبلی در تاریخ ۱۹ / ۶ /۱۳۸۷تشکیل گردید و براساس رأی هیأت داوری و با عنایت به ماده ۲۰ آئین نامه کارشناسی ارشد مورخ ۷۵/۱۰/۲۵ پایان نامه مزبور با نمره ۱۸/۲۵ و درجه عالی مورد تصویب قرار گرفت.

۱ -استاد راهنما: آقای دکتر مهرداد فرهودی

۲- استاد مشاور: آقای دکتر حسین شجاعی

۳- استاد داور: آقای دکتر امیر حسین عباسی

۴- استاد داورونماینده تحصیلات تکمیلی : آقای دکتر حمیدرضا سپنجی

تقدیم به همه‌ی کسانی که به حقانیت محبّت ایمان دارند.

از اساتید محترم جناب آقای دکتر فرهودی و جناب آقای دکتر شجاعی برای راهنمایی و مشاوره ایشان در به انجام رساندن این پایان‌نامه متشکرم.

همچنین از داوران محترم جناب آقای دکتر سپنجی و آقای دکتر عباسی تشکر می‌کنم.

از دوستان خوبم، حمید شعبانی، مهدی مهرنیا، یاسر توکلی، احد خالقی، بهرام شاکرین، حمیدرضا شجاعی، خدمت عطازاده و مهدی تابع ارجمند به خاطر حسن توجه‌شان و محبت‌های بی‌دریغ‌شان ممنونم.

از آقای دکتر جلالی برای تذکرات سودمندشان بی‌نهایت سپاسگزارم.

چکیده:

در این پایان‌نامه مدلی از نظریه‌های گرانشی تعمیم‌یافته‌ی مرتبه بالاتر بررسی شده‌است که در آن لاگرانژی گرانشی متناسب با $R^{1+\delta}$ است. برای بدست آوردن قیدهای عملی روی این نظریه‌ی تعمیم‌یافته از نسبیت عام، خواص کیهان‌شناسی و میدان-ضعیف این نظریه مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش کیهان‌شناسی، رفتار عالم فریدمان تخت که مملو از سیال کامل است با استفاده از رویکرد سیستم‌های دینامیکی مطالعه شده است و سپس جواب‌های پایدار مربوطه بدست آمده‌اند. از مقایسه‌ی پیامد این نظریه با فراوانی مشاهده شده برای هسته‌های سبک، قیدی روی تنها پارامتر نظریه، δ، بدست می‌آید. همچنین تعمیمی از جواب شوارتزشیلد برای این نظریه ارائه شده و δ با آزمون‌های منظومه‌ی شمسی محدود شده است. از جمع‌بندی همه‌ی قیدهای مشاهداتی، محدوده‌ی کلی $0 \le \delta < 7.2\times10^{-19}$ برای نظریه‌ی $R^{1+\delta}$ بدست می‌آید.

فهرست

دیباچه

نظریه نسبیت عام اینشتین یک نظریه جامع از فضا-زمان، گرانش و ماده است. فرمول‌بندی این نظریه دلالت بر ایـن دارد که فضا و زمان، مانند مکانیک کلاسیک، مفاهیم مطلقی نیستند بلکه مقادیر دینامیکی هستند که قویاً به توزیع ماده و انرژی مرتبط هستند. این رویکرد منجر به درک جدیدی از عالم شد کـه در آن، عـالم خـود بـه عنـوان یـک سیستم دینامیکی در نظر گرفته می‌شد. به بیان دیگر، کیهان‌شناسی که تا پیش از اینشتین در محدوده فلسفه قـرار داشت، وارد قلمرو علم -و نه فقط فلسفه- گردید. از طرف دیگر، امکان بررسی علمیِ عالم راهی برای بنا نهادن مدل استاندارد کیهان‌شناسی نشان داد که به طرز رضایت بخشی با مشاهدات تطابق دارد.[1]

با وجود این نتایج، در چهار دهه اخیر، پاره‌ای کمبودها در نظریه اینشتین پدیدار شدند و تلاشی برای بررسـی اینکـه "آیا نسبیت عام تنها نظریه بنیادی است که برهمکنش‌های گرانشی را توضیح می‌دهد؟" شروع شد. این مسائل اصولاً از کیهان‌شناسی و نظریه میدان‌های کوانتومی نشئت می‌گیرند. در نتیجه‌ی مباحثی مانند تکینگی در مهبانگ اولیه[1]، مسئله تختی[2] و مسئله افق، مدل استاندارد کیهان‌شناسی، که بر پایه نسبیت عام سوار شده است، و همچنـین مـدل استاندارد فیزیک ذرات برای توصیف عالم ناکافی تشخیص داده شدند. از طرف دیگر وقتی بخواهیم نسبیت عام را به عنوان یک نظریه بنیادی به کار بگیریم و یک توصیف کوانتومی از فضا- زمان (و گـرانش) ارائـه دهـیم، بـه موفقیـت دست نمی‌یابیم و در نتیجه نظریه نسبیت عام تا به حال یک نظریه کلاسیک باقی مانده است.

این حقایق، و پیش از همه آنها، عدم دستیابی به یک نظریه کوانتومی گـرانش، باعـث بـه وجـود آمـدن نظریـه‌هـای جایگزینی شدند که بتوانند حداقل یک طرحواره نیمه-کلاسیک از نسبیت عام ارائه دهند و همچنـین بتواننـد نتـایج مثبت آن را باز به دست آورند. یکی از پربارترین این رویکردها مربوط به نظریه‌های تعمیم یافتـه گرانـشی (ETG)[3] است که در مطالعه گرانش و برهمکنش‌های گرانـشی بـه نـوعی الگـو تبـدیل شـده اسـت. اسـاس ایـن نظریـه‌هـای

---

[1] - Big Bang Singularity
[2] - Flatness Problem
[3] - Extended Theories of Gravity

تعمیم‌یافته، توسعه و تصحیح نظریه اینشتین است که با وارد کردن ناورداهای مرتبه بالاتر انحناء[1] و میدان‌های اسکالر جفت شده‌ی کمینه یا ناکمینه[2] در دینامیک سیستم انجام می‌شود.

تلاش‌های دیگری برای اصلاح نسبیت عام با هدف بازیافتن اصل ماخ نیز انجام شده‌اند که نتیجه آنها در نظر گرفتن یک ضریب جفت‌شدگی متغیر گرانشی است. اصل ماخ بیان می‌کند که قوانین فیزیکی در یک مرجع لخت به نوعی با متوسط‌گیری روی حرکت اجرام نجومی در فاصله دور رابطه دارد. این اصل ایجاب می‌کند که ضریب جفت‌شدگی گرانشی بتواند وابسته به مقیاس باشد و به یک میدان اسکالر وابسته باشد. در نتیجه مفهوم "لختی"[3] و همچنین "اصل هم‌ارزی"[4] باید مورد بازبینی قرار گیرند. برای مثال نظریه برنس-دیکی[5] تلاشی است برای تعریف یک نظریه جایگزین نسبیت عام اینشتین که ضریب جفت‌شدگی گرانشی نیوتون را متغیر در نظر می‌گیرد که یک میدان اسکالر جفت شده با هندسه به صورت ناکمینه، بر دینامیک آن حاکم است.[6] [2]

به طور خلاصه، ناورداهای مرتبه بالاتر از انحناء مانند R، R^2، $R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$، $R^{\mu\nu\alpha\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta}$، $R\Box R$ یا $R\Box^k R$ یا جملات جفت شده‌ی ناکمینه بین میدان‌های اسکالر و هندسه مانند $\phi^2 R$ به لاگرانژی میدان گرانشی اضافه می‌شوند. در ضمن، از طریق یک تبدیل همدیس[7]، می‌توان نشان داد که جملات مرتبه بالاتر و جملات جفت‌شده‌ی ناکمینه همواره هم‌ارز گرانش اینشتینی به اضافه یک یا چند میدان اسکالر جفت شده‌ی کمینه هستند. به طور دقیق‌تر، جملات مرتبه بالاتر، همیشه با سهم دو در معادلات میدان اضافه می‌شوند. برای مثال، جمله‌ای مانند R^2، معادلات میدان مرتبه چهارم نسبت به مشتقات متریک بدست می‌دهد، $R\Box R$ معادلات میدان از مرتبه ششم و $R\Box^2 R$ معادلات میدان از مرتبه هشتم و به همین ترتیب برای مراتب بالاتر. با یک تبدیل همدیس، هر مشتق درجه دوم با یک میدان اسکالر هم‌ارز می‌شود. برای مثال، یک مدل گرانشی مرتبه چهارم معادل گرانش اینشتین به علاوه یک میدان اسکالر است و یک مدل گرانشی مرتبه ششم معادل گرانش اینشتین به علاوه دو میدان اسکالر است و به همین ترتیب. (توجه شود که معادله کلاین-گوردون از مرتبه دوم است)

علاوه بر انگیزش‌های فیزیک بنیادی، همه این نظریه‌ها ماهیتاً رفتارهای تورمی از خود نشان می‌دهند، بنابراین قادر هستند بر کاستی‌های مدل استاندارد کیهان‌شناسی،که برپایه نسبیت عام بنا شده، غلبه کنند. از این رو در

[1] - Higher-order curvature invariants
[2] - Minimally or Non-minimally coupled scalar fields
[3] - Inertia
[4] - Equivalence Principle
[5] - Brans-Dicke
[6] دینامیک این میدان‌های اسکالر معمولا توسط معادله Klein-Gordon داده می‌شود.
[7] - Conformal Transformation

کیهان‌شناسی توجه زیادی به نظریه‌های گرانشی تعمیم یافته معطوف شده است. مدل‌های کیهان‌شناسیِ مربوط به این نظریه‌های گرانشی به نظر واقع‌گرا و قابل تطبیق با مشاهدات تابش زمینه ریزموج کیهانی (CMBR)[1] می‌آیند. مشاهدات اخیر تایید می‌کنند که عالم دستخوش یک انبساط شتابدار است[3] و همچنین هندسه‌ی فضایی عالم تخت است[4]. این مشاهدات در کنار قیدهایی که برای پارامتر چگالی ماده Ω_M، از خوشه‌های کهکشانی بدست می‌آید، نشان می‌دهند که عالم در سیطره یک سیال خوشه‌ای-نشده[2] با فشار منفی است که عموماً به آن لقب انرژی تاریک[3] داده می‌شود که مسئول انبساط شتابدار عالم است. ساده‌ترین توضیحی که ممکن است برای این مشاهدات ارائه شود، مدلی با ثابت کیهان‌شناسی، Λ، است. در حالی که این مدل مناسب‌ترین مدل برای تطبیق با اکثر داده‌های نجومی است[5]، مدل ΛCDM[4] در توصیف چراییِ اینکه مقدار Λ، وقتی با انرژی خلاء که در فیزیک ذرات پیش‌بینی می‌شود ۱۲۰ مرتبه بزرگی اختلاف دارد، ناتوان است.

از منظر آرمان اندیشی، هیچ دلیلی از پیش وجود ندارد که لاگرانژی گرانشی را به یک تابع خطی از اسکالر ریچی، R، که به صورت کمینه با ماده جفت شده است محدود کنیم. بنابراین اگر لاگرانژی برهمکنش گرانشی را تابعی تحلیلی از اسکالر ریچی در نظر بگیریم، به این معنی خواهد بود که قوانین بقاء تنها تقریب خوبی در حد انرژی-پایین هستند و ثابت‌های بنیادی فیزیک ممکن است متغیر باشند.[6]

آنچه ذکر شد، اهمیت مطالعه‌ی مدل‌های گرانشی که در آن‌ها لاگرانژی حاکم بر دینامیک عالم تابعی تحلیلی از انحنای فضا-زمان است، نظریه‌های $f(R)$ را روشن می‌سازد.

با این‌حال نظریه‌ی نسبیت عام اینشتین، در میان همه‌ی نظریه‌های گرانشی، به عنوان فاتح شناخته شده است.

آنچه پیش روست، به قرار زیر است:

در فصل اول گذر مختصری بر نظریه‌ی نسبیت عام اینشتین و پایه‌های نظری آن خواهیم داشت و سپس به نظریه‌های تعمیم یافته‌ی گرانشی خواهیم پرداخت. سپس فرمول‌بندی کلی نظریه‌های مرتبه‌بالاتر و همچنین نظریه‌های اسکالر-تانسوری گرانشی بیان شده‌است.

---

1 - Cosmic Microwave Background Radiation
2 - Non-clustered fluid
3 - Dark Energy
4 - Lambda- Cold Dark Matter

در فصل دوم، مدل استاندارد کیهان‌شناسی برپایه‌ی نظریه‌ی نسبیت عام معرفی شده. سیر تاریخی، برخی پیامدهای مشاهداتی، موفقیت‌ها و مشکلات این مدل بیان شده‌است.

فصل سوم، به معرفی روشی برای تحلیل جواب‌های یک سیستم دینامیکی اختصاص داده شده است. صفحه‌ی فاز برای یک سیستم دینامیکی در این فصل تعریف شده است. جواب‌ها و مسیرهای مختلف در این فضا و چگونگی تحلیل پایداری جواب‌ها به طور مختصر و در حد نیاز مورد بحث قرار گرفته‌اند.

در فصل چهارم، نوع متفاوتی از تعمیم نسبیت عام اینشتین را مورد بررسی قرار داده‌ایم که لاگرانژی آن متناسب با R^n است و در حد $n \to 1$ نسبیت عام را بازمی‌یابیم. این نوع نظریه‌ی گرانشی دارای خواص جذابی است و برخلاف برخی دیگر از نظریه‌های گرانشی مرتبه بالاتر، پذیرای جواب‌های دقیق و ساده‌ای برای مدل‌های کیهان‌شناسی فریدمان است. همچنین این نظریه جواب تحلیلی ایستا با تقارن کروی بدست می‌دهد که تعمیمی بر متریک شوارتزشیلد[1] است. این جواب‌ها، زمینه مناسبی برای مقایسه نظریه با مشاهدات فراهم می‌کنند.

[1] - Schwarzschild

فصل اول

نسبیت عام

نسبیت عام در حال حاضر موفق‌ترین نظریه گرانش نسبیتی است که در سال ۱۹۱۵ میلادی توسط آلبرت اینشتین ارائه شد. اینشتین طبیعتاً اصل هم‌ارزی و نظریه نسبیت خاص را در این نظریه گنجاند. این نظریه حاصل استنتاجات اینشتین، بدون درنظر گرفتن نتایج مشاهدات و آزمایش‌هایی که در پی خواهد داشت و صرفاً در محدوده نظری ارائه شد. با این وجود او به زودی می‌بایست نظریه‌اش را در بوته آزمون‌های تجربی قرار می‌داد. سه آزمون مهمی که نسبیت عام را تایید کردند عبارتند از: ۱) حضیض غیرعادی عطارد ۲) خمش نور توسط خورشید ۳) انتقال به سرخ گرانشیِ پرتوهای نوری. نسبیت عام یک نظریه متریکی است.

۱-۱-بنیاد نظریه‌های متریکی: اصل هم‌ارزی

شالوده‌ی هر نظریه گرانشی متریکی، اصل هم‌ارزی (EP)[۱] است. ریشه‌ی اصل هم‌ارزی برمی‌گردد به نظریه گرانشی که توسط گالیله و نیوتن مورد بررسی قرار گرفت که به آن اصل هم‌ارزی ضعیف[۲] (WEP) گفته می‌شود و بیان می‌کند که جرم لختی m، و جرم گرانشی M، هر جسم هم‌ارزند. در فیزیک نیوتنی، جرم لختی m ضریبی است که در معادله دوم نیوتن، $\vec{F} = m\vec{a}$، ظاهر می‌شود، $\vec{F}$ نیرویی است که به جرم m با شتاب $\vec{a}$ وارد می‌شود. در نسبیت خاص (منظور در غیاب گرانش است) جرم لختی یک جسم متناسب با انرژی سکون جسم است: $E=mc^2$.

جرم گرانشی را می‌توانیم با در نظرگرفتن قانون جاذبه گرانشی نیوتن تعریف کنیم: نیروی جاذبه گرانشی بین دو جرم گرانشی Mو M' برابر است با $F=GMM'/r^2$ که G ثابت گرانش نیوتن است و rفاصله بین دو جسم است. بسیاری از آزمایش‌ها نشان می‌دهند که $m=M$. دقت این تساوی در حال حاضر از مرتبه $۱۰^{-۱۳}$ است. پروژه‌های فضایی طراحی شده‌اند که به دقت‌های $۱۰^{-۱۵}$ و $۱۰^{-۱۸}$ برای این تساوی دست یابند. [7]

اصل هم‌ارزی ضعیف بیان می‌کند که در آزمایشِ اجرام سقوط‌آزاد-کننده[۳]، تاثیرات یک میدان گرانشی از تاثیرات یک چهارچوب با شتاب یکنواخت، قابل تمیز نیستند.

[1] - Equivalence Principle
[2] - Weak Equivalence Principle
[3] - Free-falling که برای اختصار، از این پس "در حال سقوط" گفته می‌شود

یک تعمیم از اصل هم‌ارزی این است که نسبیت خاص تنها به صورت محلی معتبر است. این تعمیم توسط اینشتین و پس از فرمول‌بندی نسبیت خاص بدست آمد، که در این نظریه، جرم مفهوم یکتای خود را از دست داده و به نوعی بیانگر انرژی و تکانه هم می‌باشد. بنابر اظهارات اینشتین، نه تنها برای اجرام در حال سقوط، بلکه آزمایش هرچه باشد، غیرممکن است که بتوان بین شتاب یکنواخت و تاثیرات یک میدان گرانشی خارجی، تفاوتی قائل شد. این اصل هم‌ارزی، اصل هم‌ارزی اینشتین[1] (EEP) خوانده می‌شود که موارد زیر را بیان می‌کند:

الف) اصل هم‌ارزی ضعیف معتبر است

ب) نتیجه هر آزمایش محلیِ غیرگرانشی، مستقل از سرعت تجهیزاتِ در حالِ سقوط است

پ) نتیجه هر آزمایش محلیِ غیرگرانشی، مستقل از مکان و زمان انجام آزمایش در عالم است.

که منظورمان از آزمایش محلیِ غیرگرانشی، آزمایشی است که در یک آزمایشگاهِ در حالِ سقوطِ کوچک (کوچک، برای دوری جستن از ناهمگنی‌های احتمالی) انجام می‌شود.

از اصل هم‌ارزی اینشتین اینگونه برداشت می‌شود که برهمکنش گرانشی به انحنای فضا-زمان وابسته است که این وابستگی فرض هر نظریه‌ی گرانش متریکی است که باید برآورده شود:

الف) فضا-زمان با یک متریک g_{ab} مشخص می‌شود.

ب) جهان-خط[2]های جرم آزمون، ژئودزیک‌های متریک هستند.

پ) در چهارچوب‌هایِ در حالِ سقوطِ محلی، که چهارچوب‌های لورنتس نامیده می‌شوند، قوانین غیرگرانشی فیزیک همان قوانین نسبیت خاص هستند.

یکی از پیش‌بینی‌های این اصل، انتقال به سرخ گرانشی است که توسط مشاهدات در سال ۱۹۶۰ تایید شده‌است.

دوباره تاکید می‌شود که اصل هم‌ارزی ضعیف و اصل هم‌ارزی اینشتین در مورد برهمکنش‌های گرانشی صحبت نمی‌کنند. برای دسته‌بندی نظریه‌های جایگزین گرانشی، باید اصل هم‌ارزی ضعیف گرانشی[3] (GWEP) و اصل هم‌ارزی قوی[4] (SEP) تعریف شوند.

اصل هم‌ارزی قوی، با در برگرفتن همه قوانین فیزیک (با در نظر گرفتن گرانش)، اصل هم‌ارزی اینشتین را بسط می‌دهد:

---

[1] - Einstein Equivalence Principle
[2] - World-line
[3] - Gravitational Weak Equivalence Principle
[4] - Strong Equivalence Principle

الف) اصل هم‌ارزی ضعیف برای اجرام خود-گرانندە[1] و همچنین برای جرم آزمون معتبر است. (GWEP)

ب) نتیجه هر آزمایش محلی، مستقل از سرعت تجهیزاتِ در حال سقوط است.

پ) نتیجه هر آزمایش محلی، مستقل از مکان و زمان انجام آزمایش در عالم است.

۱-۲- گذری مختصر بر نسبیت عام

حال، به مرور کوتاهی از فرمول‌بندی نظریه نسبیت عام که توسط اینشتین ارائه شد می‌پردازیم.

تانسور اینشتین به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \qquad (1.1)$$

که R_{ab} تانسور ریچی است که از تانسور ریمان به صورت $R_{ab}=R^{c}{}_{acb}$ محاسبه می‌شود و $R=R^{a}{}_{a}=g^{ab}R_{ab}$ انحنای اسکالر ریچی است. تانسور اینشتین متقارن است و این خاصیت را از تانسور ریچی و تانسور متریک به ارث برده است. تانسور اینشتین در اتحاد بیانکی[2] $\nabla^{a} G_{ab} = 0$ صدق می‌کند. پایستگی انرژی-تکانه برقرار است. یعنی تانسور انرژی-تکانه، T_{ab}، بدون دیورژانس است.

معادلات اینشتین رابطه‌ی فضا-زمان را در نسبیت عام بیان می‌کند: ماده باعث خمیدگی فضا-زمان اطرافش می‌شود. این رابطه دو تانسور مرتبه ۲ در ۴ بعد را با یک ضریب تناسب به هم مرتبط می‌کند. تانسور اینشتین G_{ab} خمیدگی یک خمینه[3] را توصیف می‌کند و تانسور انرژی-تکانه، T_{ab}، شامل چگالی و جریان‌های انرژی و تکانه است.

معادلات اینشتین از دو روش قابل دسترسی هستند. اول تعمیم هم‌وردای معادله پواسون برای پتانسیل گرانشی نیوتنی با اصول موضوعه‌ی مربوط، یعنی:

$$G_{ab} = \chi T_{ab} \qquad , \chi = \frac{8\pi G}{c^{4}} \qquad (1.2)$$

که G ثابت گرانش نیوتنی است و c سرعت نور است.

ضریب تناسب χ با فرض همگرا شدن نظریه به گرانش نیوتنی در حد میدان‌های گرانشی ضعیف و غیروابسته به زمان و در سرعت‌های پایین به دست آمده است.

(به نقل از: واژگان فیزیک، ویرایش دوم، سیدمحمد امینی، مرکز نشر دانشگاهی)

[1] - Self-gravitating
[2] - Bianchi Identity
[3] - Manifold

معادلات اینشتین معادلات دیفرانسیل غیرخطی مرتبه دوم هستند. در چهاربعد، ۱۰ معادله مستقلِ جبری وجود دارد چون طرفین معادله اینشتین تانسورهای متقارن با دو اندیس هستند. علاوه بر این، اتحاد بیانکی ۴ قید اضافی روی R_{ab} بدست می‌دهد، بنابراین، نهایتاً ۶ معادله مستقل دینامیکی داریم.حل کردن این معادلات به صورت عمومی بسیار مشکل است و حتی رسیدن به حل‌های خاص، مانند حل‌های خلاء، بدون در نظر گرفتن فرض‌های ساده‌سازی، مشکل است.

دومین راه برای بدست آوردن معادلات اینشتین از وردش دادن کنش و استفاده از اصل کنش است.

کنش نسبیت عام، کنش اینشتین-هیلبرت است:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + S_m \tag{1.3}$$

که برحسب انحنای اسکالر ریچی، R ،که به صورت کمینه جفت شده است، خطی است. G، ثابت جفت‌شدگی گرانشی است، g دترمینان متریک و L_m چگالی لاگرانژی ماده است.

در ادامه، حل خلاء معادلات اینشتین را با توزیع ماده متقارن کروی ارائه می‌دهیم. این حل، برای بررسی نظریه‌های گرانشی در منظومه شمسی مفید خواهد بود.

۱-۲-۱- حل شوارتزشیلد

حالتی را در نظر می‌گیریم که فضا تهی است، غیر از جرم M که در $r=0$ قرار گرفته است. اثبات می‌شود که شکل کلی یک متریک با تقارن کروی و وابسته به زمان به صورت زیر است:

$$ds^2 = -E(r,t)dt^2 + F(r,t)dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2) \tag{1.4}$$

با حل معادلات اینشتین برای متریک فوق، مشاهده می‌کنیم که E و F مستقل از زمان هستند

$$E(r,t)=E(r),\ F(r,t)=F(r)$$

و

$$E(r) = \frac{1}{F(r)} = 1 - \frac{2MG}{rc^2}$$

بنابراین متریک شوارتزشیلد به صورت زیر است:

$$ds^2 = -E(r)dt^2 + \frac{dr^2}{E(r)} + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta\, d\varphi^2) \tag{1.5}$$

معمولاً شعاع شوارتزشیلدی که به جرمِ قرار گرفته در مرکز نسبت داده می‌شود، $R_S = \frac{2GM}{c^2}$ خیلی کوچکتر از شعاع فیزیکی جرم، R_0، است و بنابراین جواب (1.5) فقط در محدوده $r \geq R_0 > R_S$ معتبر است. در منظومه شمسی، ما با این شعاع سروکار نخواهیم داشت. به هر حال سطح $r=R_s$ فضا را به دو بخش تقسیم می‌کند که فضای متراکم، $R_0<R_S$، موسوم به سیاهچاله شوارتزشیلد است. در محدوده خارج از سیاهچاله، $r>R_S$، مختصات t و r به ترتیب زمان-گونه و فضا-گونه هستند. ($g_{tt}=E>0$ و $g_{rr}=-1/E<0$) وقتی یک منبع نوری به سطح $r=R_s$ نزدیک می‌شود، انتقال به سرخ گرانشی آنقدر شدید می‌شود که فرکانس نور صفر می‌شود و فوتون‌ها انرژی خود را از دست می‌دهند و دیگر قابل مشاهده نخواهند بود. سطح $r=R_s$ آخرین سطحی است که از بیرون مشاهده می‌شود و بنابراین "افق" نامیده می‌شود.

اینکه جواب شوارتزشیلد به زمان وابستگی ندارد نتیجه قضیه بیرکهوف[1] است.

قضیه بیرکهوف

در اصل تابع E که در حل شوارتزشیلد ظاهر شد، می‌تواند به زمان وابسته باشد،

$$E(r,t) = f(t)\left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right)$$

ولی با بازتعریف زمان به صورت $t \rightarrow t'$ که

$$t' = \int \sqrt{f(t)}dt$$

می‌توانیم $f(t)$ را حذف کنیم. بنابر قضیه بیرکهوف، یک میدان گرانشی متقارن کروی در فضای تهی باید ایستا باشد و توسط متریک شوارتزشیلد داده می‌شود.

این قضیه مشابه نتیجه‌ی گرانش نیوتنی خارج از یک توزیع جرمی متقارن کروی است که میدان گرانشی مانند حالتی است که جرم در مرکز قرار گرفته باشد. قضیه بیرکهوف نشان می‌دهد که یک توزیع جرم غیرایستا با تقارن کروی نمی‌تواند امواج گرانشی تولید کند.

[1] - Birkhoff's Theorem

۱-۲-۲- حد پارامتری پسا-نیوتنی[1]

نسبیت عام تنها نظریه گرانشی نیست و از دهه ۱۹۶۰ میلادی تا به حال حدود ۲۵ نظریه گرانشیِ جایگزین مورد بررسی قرار گرفته است که فضا-زمان "نسبیت خاص"ی را به عنوان زمینه[2] در نظر می‌گرفتند و با گرانش به عنوان ناوردای لورنتسی روی زمینه برخورد می‌کردند.

دو دسته‌ی متفاوت از آزمایش‌ها مورد بررسی قرار گرفته‌اند: دسته اول آن‌هایی که مبانی نظریه گرانشی، از جمله اصل هم‌ارزی، را می‌آزمودند و دسته دوم آن‌هایی که نظریه‌های گرانشی مبتنی بر متریک را بررسی می‌کردند که در آنها فضا-زمان بوسیله یک تانسور متریک داده می‌شود و همچنین اصل هم‌ارزی اینشتین در آنها برقرار است. به هر حال، میدان‌های اضافی ممکن است برای توصیف گرانش به کار آیند مثل میدان‌های اسکالر یا تصحیحات مرتبه بالاتر از ناورداهای انحناء.

بدون مد نظر قرار دادن ملاحظات کیهان‌شناسی، میدانِ گرانشی که معمولاً در این نظریه‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد میدان گرانشی مربوط به خورشید است. با فرض تقارن کروی و یک میدان گرانشی ایستا، می‌توان نشان داد که دستگاه مختصات همسانگردی به صورت زیر وجود دارد

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + A(r)r^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2 +) \tag{1.6}$$

که dt زمان ویژه بین دو رویداد در همسایگی یکدیگر است.

میدان گرانشی نیوتنی از $\frac{GM_\odot}{R_\odot c^2} \sim 2\times10^{-6}$ تجاوز نمی‌کند. C سرعت نور، $M_\odot$ جرم خورشید و $R_\odot$ شعاع خورشید است. $A(r)$ و $B(r)$ توابع بدون بعدی هستند که فقط به G، M، c و r وابسته‌اند. در واقع تنها عدد بدون بعدی که از این کمیت‌ها می‌تواند ساخته شود GM/rc^2 است. متریک ادینگتون-رابرتسون با بسط تیلر A و B بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(1 - 2\alpha\frac{GM}{rc^2} + 2\beta\left(\frac{GM}{rc^2}\right)^2 + \ldots\right)dt^2 + \\ &+\left(1 - 2\gamma\frac{GM}{rc^2} + \ldots\right)(dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2)) \end{aligned} \tag{1.7}$$

ضرایب α، β و γ پارامترهای پسا-نیوتنی نامیده می‌شوند و مقادیر آن‌ها به نظریه‌ی گرانشیِ مورد مطالعه بستگی دارد. مثلا در نسبیت عام، $\alpha = \beta = \gamma = 1$. تعمیم بسط فوق به سازوکار پسا-نیوتنیِ پارامتری منجر می‌شود.

---

[1] - Parameterized Post-Newtonian limit (PPN)
[2] - Background

وقتی حد PPN مورد استفاده قرار می‌گیرد، مقایسه نظریه‌های گرانشی متریکی با نتایج آزمایش‌ها بسیار ساده می‌شود.

فرض‌های زیر باید در نظر گرفته شوند:

الف) ذرات با سرعت‌های خیلی کم نسبت به سرعت نور حرکت می‌کنند.

ب) میدان گرانشی ضعیف است و به عنوان یک اختلال به فضا-زمان تخت در نظر گرفته می‌شود.

پ) میدان گرانشی ایستا است، یعنی با زمان تغییر نمی‌کند.

معمولاً، حد PPN نظریه‌های گرانشی متریکی با مجموعه‌ی ۱۰تایی از پارامترهای با مقدار حقیقی مشخص می‌شود. هر نظریه گرانشی متریکی پارامترهای PPN مربوط به خود را دارد. قالب PPN ابتدا برای تحلیل آزمایش‌های گرانشی در منظومه شمسی مورد استفاده قرار گرفت و سپس برای تعریف و تحلیل آزمایش‌های جدید گرانشی به کار گرفته شد و دست آخر برای تحلیل و طبقه‌بندی نظریه‌های گرانشیِ متریکیِ جایگزین استفاده شده است.

از اواسط دهه‌ی ۱۹۷۰ میلادی، منظومه شمسی دیگر تنها آزمایشگاه نظریه‌های گرانشی به حساب نمی‌آمد. بسیاری از نظریه‌های گرانشی جایگزین در حد پسا-نیوتنی با نسبیت عام و در نتیجه با آزمایش‌های منظومه شمسی مطابقت دارند. با اینحال برخی از این نظریه‌ها با پیش‌بینی‌های دیگری مانند کیهان‌شناسی، ستاره‌های نوترونی، سیاه‌چاله‌ها و تابش گرانشی مطابقت ندارند و در ضمن حد پسا-نیوتنی برای این نوع آزمایش‌ها کفایت نمی‌کند. به علاوه امکان اینکه کاوش‌گرهایی در آینده در دسترس قرار بگیرند که آزمایش‌های فرا-منظومه شمسی را انجام دهند، منظومه شمسی را از عرصه‌ی یکه‌تازی در آزمایشگاه نظریه‌های گرانشی بیرون رانده است.

مطالعه تپ‌اخترهای دوتایی[1] *PSR 1913+16* که توسط *J.Taylor* و *R. Hulse* کشف شدند[8]، نشان داد که این سیستم اثرات نسبیتی میدان گرانشی را ،که مربوط به تپ‌اختر است، با شواهدی از تابش گرانشی، که مربوط به سیستم دوتایی است، توأماً دربردارد. اثرات نسبیتی میدان گرانشی اجازه می‌دهد که پارامترهای نجومی را با دقت بالایی اندازه‌گیری کنیم، مانند جرم دو ستاره نوترونی. همچنین اندازه‌گیری نرخ تغییرات دوره تناوب مداریِ سیستم ستاره‌ی دوتایی با پیش‌بینی تابش امواج گرانشی در نسبیت عام مطابقت دارد در حالی که با پیش‌بینی‌های بیشتر نظریه‌های گرانشیِ جایگزین در تناقض است، حتی آنهایی که در حد PPN مشابه نسبیت عام هستند. با همه این اوصاف، شواهد قطعی برای بیرون راندن نظریه‌های دیگر وجود ندارد چون برخی کاستی‌ها تا به حال بدون توضیح باقی‌مانده است.

[1] - Binary Pulsars

۱-۳- نظریه‌های تعمیم‌یافته گرانشی

همانطور که قبلاً نیز اشاره شد، آزمون‌های کلاسیک نسبیت عام، این نظریه را تایید کردند ولی مدل استاندارد کیهان‌شناسی که بر پایه نسبیت عام بنا شد علاوه بر موفقیت‌هایی که به دست آورد، در توضیح مسائلی -که به برخی از آنها در ادامه اشاره می‌شود و در بخش کیهان‌شناسی بیشتر به آنها خواهیم پرداخت- توفیقی به دست نیاورد. مانند:

- مسئله افق کیهان‌شناسی
- مسئله تختی کیهان‌شناسی و اینکه چرا عالم تا این حد به تخت‌بودن نزدیک است
- مسئله تک قطبی مغناطیسی
- مسئله ثابت کیهان‌شناسی

از میان همه نظریه‌های تعمیم‌یافته گرانشی، در اینجا به نظریه‌های اسکالر-تانسور و مرتبه‌بالاتر گرانشی می‌پردازیم.

نظریه‌های گرانش مرتبه‌بالاتر و اسکالر-تانسوری

اگر لاگرانژی گرانشی برحسب اسکالر ریچی و ناورداهای انحنا غیرخطی باشد، معادلات میدان حاکم بر دینامیک، مرتبه‌ای بالاتر از دو خواهند داشت، به همین دلیل به این نوع از نظریه‌ها معمولا نظریه‌های مرتبه بالاتر گفته می‌شود.

می‌توانیم عمومی‌ترین دسته از نظریه‌های مرتبه‌بالاتر-اسکالر-تانسور در چهار بعد را در نظر بگیریم. این نظریه‌ها ممکن است با کنشی با شکل عمومی زیر تولید شوند:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g}\left[F(R, \Box R, \Box^2 R, ..\Box^k R, \phi) - \frac{\varepsilon}{2} g^{ab}\phi_{,a}\phi_{,b} + L_m\right] \tag{1.8}$$

که F یک تابع تحلیلی و نامشخص از ناورداهای انحنا و یک میدان اسکالر ϕ است. جمله L_m سهم ماده معمولی است که به صورت کمینه جفت شده است. و آحاد فیزیکی $8\pi G = c = \hbar = 1$ به کار گرفته‌شده‌اند. ε یک ثابت است که جمله سینتیک نظریه را مشخص می‌کند.

معادلات میدان با وردش معادله (1.8) برحسب متریک، g_{ab}، بدست می‌آیند: