بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه جهت اخذ درجه‌ی کارشناسی‌ارشد

رشته‌ی ریاضی کاربردی (گرایش آنالیز عددی)

عنوان:

توسیع روش نیوتن برای حل دستگاه معادلات غیرخطی با استفاده از روش آدومین

استاد راهنما:

آقای دکتر سعید عباس‌بندی

استاد مشاور:

آقای دکتر داوود رستمی

تدوین:

الهام کشاورز هدایتی

بهمن ماه ۱۳۸۷

دانشگاه بین المللی امام خمینی

IMAM KHOMEINI INTERNATIONAL UNIVERSITY

بسمه تعالی

دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره)

معاونت آموزشی دانشگاه- مدیریت تحصیلات تکمیلی

(فرم شماره ۲۶)

تعهد نامه اصالت پایان نامه

اینجانب الهام کشورزهرایی دانشجوی رشته ریاضی کاربردی مقطع تحصیلی کارشناسی ارشد بدین وسیله اصالت کلیه مطالب موجود در مباحث مطروحه در پایان نامه / تز تحصیلی خود، با عنوان توسیع روش نیوتن برای حل دستگاه معادلات غیرخطی با استفاده از روش آدومین را تأیید کرده، اعلام می نمایم که تمامی محتوی آن حاصل مطالعه ، پژوهش و تدوین خودم بوده و به هیچ وجه رونویسی از پایان نامه و یا هیچ اثر یا منبع دیگری، اعم از داخلی، خارجی و یا بین المللی ، نبوده و تعهد می نمایم در صورت اثبات عدم اصالت آن و یا احراز عدم صحت مفاد و یا لوازم این تعهد نامه در هر مرحله از مراحل منتهی به فارغ التحصیلی و یا پس از آن و یا تحصیل در مقاطع دیگر و یا اشتغال و ... دانشگاه حق دارد ضمن رد پایان نامه نسبت به لغو و ابطال مدرک تحصیلی مربوطه اقدام نماید. مضافاً اینکه کلیه مسئولیت ها و پیامدهای قانونی و یا خسارت وارده از هر حیث متوجه اینجانب می باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو

امضاء و تاریخ

الهام کشورزهرایی

بسمه تعالی

دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

جلسه دفاع از پایان نامه خانم الهام کشاورز هدایتی دانشجوی مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی در مورخ 87/11/7 تحت عنوان

« توسیع روش نیوتن برای حل دستگاه
معادلات غیر خطی با استفاده از روش آدومین »

در دانشگاه تشکیل گردید و مورد تأیید نهایی هیأت داوران قرار گرفت.

هیأت داوران :

1- استاد راهنما :
آقای دکتر سعید عباس بندی
امضاء

2- استاد مشاور :
آقای دکتر داوود رستمی
امضاء

3-عضو هیأت علمی به عنوان داور خارجی:
آقای دکتر محمود هادی زاده
امضاء

4-عضو هیأت علمی به عنوان داور داخلی:
آقای دکتر عزیز اله عزیزی
امضاء

5-نماینده تحصیلات تکمیلی:
آقای دکتر عبد الرحمن رازانی
امضاء

اداره تحصیلات تکمیلی
حوزه آموزشی
دانشگاه بین المللی امام خمینی

سپاس

پروردگار را که توفیقم بخشید و ذره ای از دانش بیکران خویش را به این حقیر ارزانی داشت و در همه حال با من بود.

تقدیم به مادر عزیزم:

که سپاس و ستایش در برابرش حقیر است.

تقدیم به او که وجودش آرامش و اطمینان دلم بود و در سایه پرمهرش نوشتم و آموختم زندگی کردن را.

تقدیم به پدر عزیزم:

که معنای واقعی انسانیت و فداکاری و صداقت را در وجودش یافتم و در راه علم همیشه مشوق و حامی من بود و با حمایت و پشتیبانی اش با سختیها مبارزه کردم.

تقدیم به همسر عزیزم:

که لحظه ای عطوفت خویش را از من دریغ نکرد و با وجودش تنهایی را احساس نمی کنم.

تقدیم به مونس و همدم زندگیم که تا ابد همراهش خواهم بود و عشق پاک خود را نثار راهش خواهم کرد.

وتقدیم به آنانیکه همواره دوستشان دارم:

خواهران و برادرهای عزیزم...

دوست همیشه همراهم...

تشکر وقدردانی :

در اینجا شایسته است که از زحمات بی دریغ اساتید گرانقدر جناب آقای دکتر سعید عباس بندی و جناب آقای دکتر داوود رستمی سپاسگذاری نمایم که اشاراتشان در این فراز و نشیب ها مرا حامی بوده است.

و...

سپاس از تمام اساتید، آموزگاران و کسانیکه طی سالهای تحصیل، درس علم و زندگی را به من آموختند.

چکیده

در این پایان‌نامه، روش تجزیه‌ی آدومین برای حل دستگاه معادلات غیرخطی مورد استفاده قرار خواهد گرفت. اساس کار، روش نیوتن بوده و با تصحیح روش آدومین، روش توسعه یافته‌ی نیوتن برای حل دستگاه معادلات غیرخطی ارائه خواهد شد. مثالهای عددی، برای الگوریتم‌های ارائه شده آورده شده‌اند.

به طور کلی در این پایان‌نامه ۲۴ مقاله مورد مطالعه قرار گرفته که مقالات [۱۵]، [۱۶] و [۱۷] مراجع اصلی در تحقیق بوده‌اند.

کلید واژه‌ها: دستگاه معادلات غیرخطی، روش نیوتن، روش تجزیه‌ی آدومین.

فهرست مطالب

فصل اول

مقدمه

۱.۱ تاریخچه

در سالهای اخیر، روش تجزیه‌ی آدومین برای حل دسته وسیعی از مسائل احتمالی و قطعی در ریاضیات و فیزیک به کار رفته است. نتایج خوب به دست آمده، نشان دهنده‌ی مؤثر بودن این روش است.

این نوع روش تجزیه اولین بار توسط آدومین[1] در سال ۱۹۸۲ برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی به کارگرفته شد و در سال ۱۹۸۳ اولین کتاب در این رابطه به چاپ رسید [۲]. بعد از آن در دومین کتاب چاپ شده در سال ۱۹۸۵، معادلات دیفرانسیل خاصی حل شدند [۳]. در سومین کتاب که دارای دو بخش است، ابتدا روش تجزیه مورد بحث قرارگرفته و سپس به حل معادله حرارت و مسأله غیرخطی پلاسما پرداخته شده است [۴]. در آخرین کتاب چاپ شده در سال ۱۹۹۴، وی از روش تجزیه برای حل مسائل اولیه و مرزی خیلی پیچیده استفاده کرده است [۵].

اولین محققی که کار روی همگرایی روش تجزیه‌ی آدومین را شروع کرد شخصی به نام چرالت[2] بود. او اولین مقاله خود را در سال ۱۹۸۹ ارائه داد [۹]. در این مقاله با استفاده از قضیه‌ی مقدار ثابت،

1) G. Adomian   2) Y. Cherruault

همگرایی روش، ثابت شد. از سال ۱۹۸۹ به بعد، وی با کمک دیگران مقالات زیادی در باب استفاده از روش تجزیه‌ی آدومین چاپ کرد.

روش تجزیه‌ی آدومین به طور وسیعی برای حل معادلات خطی و غیرخطی به کار گرفته شده است. وقتی این روش برای حل مسائل خطی به کار می‌رود، چیزی بیشتر از روش کلاسیک تقریبات متوالی نیست. در حقیقت اهمیت این روش درکاربرد آن روی مسائل غیرخطی است. به ویژه این که کاربرد این روش و برنامه‌نویسی آن در مسائل مهندسی بسیار ساده و فارغ از خطی سازی و گسسته سازی است.

در مقالات متعددی سعی در سرعت بخشیدن به همگرایی الگوریتم منتج از تجزیه‌ی آدومین شده است، به عنوان مثال [۱۱, ۱۰, ۹]. در [۶] مرتبه همگرایی روش تجزیه‌ی آدومین مورد بحث و بررسی قرارگرفته است. تعداد زیادی از مقالات سعی در مقایسه‌ی این روش با روش‌های قبلی کرده‌اند. به عنوان مثال در [۸]، روش تجزیه با روش اختلال مورد مقایسه قرار گرفته و مؤثر بودن آن نتیجه شده است. مزایای این روش در مقایسه با به‌کارگیری روش تکراری پیکارد در [۱۸] مورد تأکید قرار گرفته است. اخیراً مقایسه‌ای بین روش تجزیه و روش Wavelet-Galerkin در حل مسأله‌ی انتگرال ـ دیفرانسیل در [۱۸] انجام شده است. مقایسه‌های انجام شده، روی دسته‌ی خاصی از مسائل نشان از برتری روش تجزیه‌ی آدومین دارد. بدیهی است در مسائلی که جواب با فرضیات روش تجزیه‌ی آدومین همخوانی ندارد، کاربرد این روش نتایج رضایت‌بخشی ارائه نخواهد داد.

۲.۱ تعاریف و قضایا

۱.۲.۱ تعریف (فضای برداری نرمدار): یک فضای برداری را فضای برداری نرمدار می‌گویند هرگاه به هر تابع f یک عدد حقیقی نامنفی $\|f\|$ مربوط کنیم به گونه‌ای که

۱) $\|f\| = 0 \Longleftrightarrow f = 0$،

۲) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$،

۳) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$.

۲.۲.۱ تعریف (فضای باناخ): یک فضای خطی نرمدار، کامل گفته می‌شود هرگاه هر دنباله‌ی کشی در این فضا همگرا باشد. هر فضای خطی نرمدار کامل، باناخ نامیده می‌شود.

۳.۲.۱ تعریف (ضرب داخلی): فرض کنیم V فضای خطی روی $\mathbb{C}$ یا $K = \mathbb{R}$ باشد. ضرب داخلی $(.,.)$ تابعی از $V \times V$ به K است با خواص زیر

۱) برای هر $u \in V$، $(u,u) \geq 0$ و $(u,u) = 0$ اگر و فقط اگر $u = 0$.

۲) برای هر $u, v \in V$، $(u,v) = \overline{(v,u)}$،

۳)برای هر $u, v, w \in V$ و $\alpha, \beta \in K$، $(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u,w) + \beta(v,w)$.

۴.۲.۱ تعریف (فضای هیلبرت): فضای ضرب داخلی کامل را فضای هیلبرت نامند.

۵.۲.۱ قضیه (نقطه‌ی ثابت): اگر g تابعی حقیقی و $g(x) \in C^1[a,b]$ و وجود داشته باشد $L \in [0,1)$، به طوری که برای هر $x \in (a,b)$ داشته باشیم

$$|g'(x)| \leq L < 1$$

آنگاه معادله‌ی $x = g(x)$ تنها یک ریشه دارد که متعلق به $[a,b]$ است.

۶.۲.۱ تعریف (عملگر انقباض): فرض کنیم V فضای باناخ با نرم $\|\cdot\|_V$ و K زیرمجموعه‌ای از V باشد. عملگر $T : K \subseteq V \longrightarrow V$ با ثابت انقباضی $\alpha \in [0,1)$ ، انقباض نامیده می‌شود، اگر

$$\|T(u) - T(v)\|_V \leq \alpha\|u - v\|_V, \qquad \forall u, v \in K$$

۷.۲.۱ قضیه (نقطه‌ی ثابت باناخ): فرض کنیم K زیرمجموعه‌ای ناتهی از فضای باناخ V و $T : K \longrightarrow K$ یک نگاشت انقباض با ثابت انقباضی α، $0 \leq \alpha < 1$ باشد، آنگاه نتایج زیر برقرار است:

۱) وجود و یکتایی: $u \in K$ یکتا موجود است به طوری که

$$u = T(u)$$

۲) همگرایی و تخمین خطا: برای هر $u_0 \in K$، دنباله‌ی $\{u_n\} \subseteq K$ که

$$u_{n+1} = T(u_n), \qquad n = 0, 1, \ldots$$

به u همگراست یعنی

$$\|u_n - u\|_V \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

کرانهای خطا به شکل زیر است:

$$\|u_n - u\|_V \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|u_0 - u_1\|_V,$$
$$\|u_n - u\|_V \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\|u_{n-1} - u_n\|_V,$$
$$\|u_n - u\|_V \leq \alpha\|u_{n-1} - u\|_V.$$

۸.۲.۱ تعریف: دوآل یک فضای برداری حقیقی V، فضای برداری از توابع خطی و کراندار $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ می‌باشد که با V' نمایش داده می‌شود.

۹.۲.۱ تعریف (مشتق فرشه): فرض کنید $A : X \longrightarrow Y$ عملگری بین فضاهای نرمدار خطی X و Y باشد. اگر برای هر $x_0 \in X$ یک عملگر $A'(x_0)$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $0 \neq h \in X$ با شرط $\|h\| \longrightarrow 0$ ، حد زیر برقرار باشد:

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|A(x+h) - A(x) - A'(x_0)h\|}{\|h\|} = 0$$

آنگاه می‌گوئیم A دیفرانسیل‌پذیر قوی در x_0 است و عملگر $A'(x_0)$ را مشتق قوی یا مشتق فرشه می‌نامند.

مثال: فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد. تابع $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = \|x\|^2 = (x, x)$ را در نظر گیرید. داریم

$$f(x+h) - f(x) = \|x+h\|^2 - \|x\|^2 = 2(x, h) + \|h\|^2$$

بنابراین f در هر نقطه‌ای عضو H دیفرانسیل‌پذیر فرشه بوده و

$$df(x)h = (df(x), h) = 2(x, h)$$

۳.۱ روش نیوتن ـ رافسون

محاسبه‌ی ریشه‌های معادله

$$\begin{cases} f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 0 \end{cases} \qquad (1-1)$$

مسأله‌ای معمولی در ریاضی کاربردی است و به دنبال روش‌های عددی ساده‌ای هستیم که توسط آنها این معادله را حل کنیم. فرض کنیم تخمین اولیه‌ای از ریشه را در اختیار داشته باشیم روش‌های عددی جهت حل (۱-۱) از این تخمین اولیه استفاده نموده و دنباله‌ای را تولید می‌کنند که این دنباله تخمین‌هایی با دقت بهتر در خصوص ریشه ارائه می‌دهد. این گونه روش‌ها را روش‌های تکراری می‌نامند.

یکی از روش‌های مهم و معمول برای ریشه‌یابی، روش تکراری نیوتن ـ رافسون است که در زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

فرض کنیم α جواب معادله‌ی (۱-۱)، متعلق به $[a, b]$ و روی این بازه، f دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته باشد و به علاوه فرض کنیم $|f'(\alpha)| > 0$. با استفاده از بسط تیلور داریم:

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + O(h^2). \qquad (2-1)$$

برای حل معادله اصلی، باید h به قدر کافی کوچک را به گونه‌ای پیدا کنیم که

$$f(x-h)=0\approx f(x)-hf'(x),$$

و بنابراین باید

$$h=\frac{f(x)}{f'(x)},\qquad x-h=x-\frac{f(x)}{f'(x)},$$

که از اینجا روش نیوتن ـ رافسون به صورت

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{۱-۳}$$

با تقریب اولیه x_0 برای α به دست می‌آید. طرح تکراری (۱-۳) برای x_0 به قدر کافی نزدیک به α، به α همگراست.

در ادامه روی تحلیل خطای روش نیوتن مطالبی ارائه می‌شود.

فرض کنید به ازای کلیه‌ی xها در یک همسایگی ریشه‌ی α، تابع $f(x)$ دارای حداقل مشتق دوم پیوسته باشد. به علاوه فرض کنید که

$$f'(\alpha)\neq 0.$$

معنای مطلب فوق این است که مماس منحنی $y=f(x)$ در نقطه‌ی $x=\alpha$ موازی محور x ها نیست. بنابراین نتیجه می‌گیریم که به‌ازای کلیه‌ی xهای نزدیک به α، $f'(x)\neq 0$. با استفاده از قضیه‌ی تیلر داریم:

$$f(\alpha)=f(x_n)+(\alpha-x_n)f'(x_n)+\frac{1}{2}(\alpha-x_n)^2f''(c_n)$$

که c_n یک نقطه‌ی نامعلوم بین α و x_n است. با توجه به فرض $f(\alpha)=0$ و با تقسیم طرفین رابطه فوق بر $f'(x_n)$ داریم:

$$0=\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}+\alpha-x_n+(\alpha-x_n)^2\frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}$$

و با توجه به رابطه‌ی (۱-۳) داریم:

$$0 = x_n - x_{n+1} + \alpha - x_n + (\alpha - x_n)^2 \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}.$$

با حل معادله‌ی فوق برحسب $\alpha - x_{n+1}$، داریم:

$$\alpha - x_{n+1} = \left(\frac{-f''(c_n)}{2f'(x_n)}\right)(\alpha - x_n)^2. \qquad (۱-۴)$$

فرمول فوق این مطلب را بیان می‌کند که خطا در x_{n+1} متناسب با مربع خطا در x_n است. اگر خطای اولیه به اندازه‌ی کافی کوچک باشد، آنگاه خطای تکرارهای بعدی به شدت کاهش خواهد یافت.

اگر تکرارهای x_n نزدیک به α فرض شود، آنگاه عامل حاصل ضرب سمت راست معادله‌ی (۱-۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{-f''(c_n)}{2f'(x_n)} = \frac{-f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \cong M.$$

بنابراین

$$\alpha - x_{n+1} = M(\alpha - x_n)^2, \qquad n \geq 0.$$

با ضرب طرفین معادله فوق در M داریم:

$$M(\alpha - x_{n+1}) = (M(\alpha - x_n))^2.$$

اگر کلیه تکرارها نزدیک به ریشه باشند، آنگاه با استقراء ثابت می‌شود که

$$M(\alpha - x_n) = (M(\alpha - x_n))^{2n}.$$

برای آن که $\alpha - x_n$ همگرا به صفر باشد، باید شرط زیر برقرار باشد:

$$|M(\alpha - x_0)| < 1$$

و یا

$$|\alpha - x_0| < \frac{1}{|M|} = |\frac{2f'(\alpha)}{f''(\alpha)}|.$$

اگر کمیت $|M|$ بسیار بزرگ باشد، آنگاه برای همگرایی باید $x_\circ$ به اندازه کافی نزدیک به α شود و در این وضعیت از روش ساده دو بخشی برای تعیین $x_\circ$ می‌توان استفاده کرد.

انتخاب $x_\circ$ در تعیین همگرایی روش نیوتن اهمیت به‌سزایی دارد. متأسفانه هیچ استراتژی مشخص و کارایی برای انتخاب $x_\circ$ وجود ندارد. در برخی از حالتها انتخاب $x_\circ$ ناشی از وضعیت فیزیکی مسأله‌ای است که منجر به یک مسأله ریشه‌یابی شده است. در سایر حالات، رسم نمودار $y = f(x)$ نیز ممکن است مورد استفاده قرارگیرد و یا این که چند تکرار اولیه توسط روش دو بخشی تولید شود تا بتوان حدس اولیه مناسبی را به دست آورد.

۴.۱ روش تجزیه برای معادلات تابعی

معادله‌ی تابعی زیر را فرض کنید

$$x - N(x) = c \tag{۵-۱}$$

که N عملگری غیرخطی از فضای هیلبرت H به H و c تابعی داده شده در H است؛ ما در جستجوی $x \in H$ای هستیم که در (۱-۵) صدق کند. فرض کنیم معادله‌ی فوق جواب یکتایی برای $c \in H$ داشته باشد.

روش تجزیه‌ی آدومین در جستجوی جوابی به فرم سری

$$x = \sum_{i=\circ}^{\infty} x_i \tag{۶-۱}$$

است و عملگر غیرخطی N، به صورت

$$N(x) = \sum_{i=\circ}^{\infty} A_i\,(x_\circ, x_1, \ldots, x_i) \tag{۷-۱}$$

تجزیه می‌شود که A_iها چندجمله‌ای‌هایی وابسته به $x_\circ, \ldots, x_i$ (به نام چندجمله‌ای‌های آدومین) هستند

و به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$Z = \sum_{i=0}^{\infty}(\lambda^i x_i), \qquad N(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i x_i) = \sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i A_i$$

که پارامتر λ برای راحتی کار معرفی می‌شود. از روابط بالا به وضوح می‌توان دید ضریب جمله nـام در سری بسط تیلور $N(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i x_i)$ به شکل

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i x_i)\right]_{\lambda=0}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (۱-۸)$$

می‌باشد.

تعدادی از جملات ابتدایی این چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned}
A_0 &= [N(x_0 + \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 + \ldots)]_{\lambda=0} = N(x_0)\\
A_1 &= \frac{d}{d\lambda}[N(x_0 + \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 + \lambda^3 x_3 + \ldots)]_{\lambda=0}\\
&= [(x_1 + 2\lambda x_2 + 3\lambda^2 x_3 + \ldots)N'(x_0 + \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 + \lambda^3 x_3 + \ldots)]_{\lambda=0} = x_1 N'(x_0)\\
A_2 &= \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\lambda^2}[N(x_0 + \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 + \ldots)]_{\lambda=0}\\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{d\lambda}[\frac{d}{d\lambda}N(x_0 + \lambda x_1 + \ldots)]_{\lambda=0}\\
&= \frac{1}{2}[(2x_2 + 6\lambda x_3 + \ldots)N'(x_0 + \lambda x_1 + \ldots)\\
&\quad + (x_1 + 2\lambda x_2 + \ldots)(x_1 + 2\lambda x_2 + \ldots)N''(x_0 + \lambda x_1 + \ldots)]_{\lambda=0}\\
&= x_2 N'(x_0) + \frac{1}{2}x_1^2 N''(x_0) \qquad (۱-۹)
\end{aligned}$$

چندجمله‌ای‌های A_n، برای هر نوع از معادلات غیرخطی تولید می‌شوند [۵, ۹, ۲۴] . به محض جایگذاری (۱-۶) و (۱-۷) در (۱-۵) به دست می‌آید:

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i - \sum_{i=0}^{\infty} A_i = c$$

و x_iها و A_iها با استفاده از روابط زیر می‌توانند تعیین می‌شوند:

$$\begin{cases} x_0 = c \\ x_1 = A_0 \\ \vdots \\ x_n = A_{n-1} \end{cases} \qquad (۱-۱۰)$$

x_0 و x_1 و ... و x_n به صورت بازگشتی تعریف می‌شوند. در واقع داریم $x_1 = A_0$ و A_0 فقط به x_0ای که قبلاً معلوم شده، وابسته است. سپس $x_2 = A_1$ که A_1 تابعی است معلوم، وابسته به x_0 و x_1 که قبلاً محاسبه شده‌اند. بنابراین، هر جمله‌ای از سری $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ را می‌توانیم مشخص کنیم و در نهایت جواب مطلوب یعنی x به دست می‌آید.

مثال: معادله انتگرال غیرخطی زیر را حل کنید:

$$x(t) = 2t - \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{4}\int_0^t x^3(s)ds$$

با قرار دادن $x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i$، $N(x) = x^3$ و $N(x) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i$ در معادله‌ی فوق داریم:

$$x_0 + x_1 + x_2 + \cdots = 2t - \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{4}\int_0^t (A_0 + A_1 + A_2 + \dots)ds$$

حال با استفاده از روابط (۱-۸) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} A_0 &= N(x_0) = x_0^3 \\ A_1 &= x_1 N'(x_0) = x_1(3x_0^2) = 3x_0^2 x_1 \\ A_2 &= x_2 N'(x_0) + \frac{1}{2}x_1^2 N''(x_0) = x_2(3x_0^2) + \frac{1}{2}x_1^2(6x_0) \\ &= 3(x_0^2 x_2 + x_1^2 x_0), \dots \end{aligned}$$