دانشگاه ولي عصر (عج) رفسنجان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته ریاضی
گرایش جبر

ایده‌آل‌های اول وابسته تعمیم‌یافته و رادیکال زیرمدول‌ها

استاد راهنما :
دکتر رضا نکوئی

استاد مشاور :
دکتر سمیه کریم‌زاده

دانشجو:
مریم ضیاءالدینی دشتخاکی

مهر ماه ۱۳۸۹

[اُ ِ] [اُ ِ] [اُ ِ] [اُ ِ] [اُ ِ] [اُ ِ]

هو العلیم

سپاس و ستایش پروردگاری را که با الطاف بیکران خود چراغ هدایت را در مسیر من قرار داد و به‌راستی که حمد و ستایش سزاوار ذات اوست چرا که دوستدار دانایان و دانای حقیقی اوست.

سپاس بی‌پایان تقدیم به

همه‌ی عزیزانی که در طول تحصیل مرا یاری کرده‌اند، دوستان، یاران، عزیزانی که دلسوزانه با شعور و آگاهی مراحل پژوهشم را دنبال کردند.

هزاران هزار گوهر سپاس تقدیم به استاد راهنمایم جناب آقای دکتر نکوئی، که در لحظات علم‌آموزی راهنمایی‌های ایشان چراغ راهم بود.

از استاد مشاورم سرکار خانم دکتر کریم‌زاده صمیمانه تشکر می‌کنم.

هم‌چنین از جناب آقای دکتر هدایت و سرکار خانم دکتر جهانشاهی که داوری این پایان‌نامه را به عهده داشتند کمال تشکر را دارم.

در نهایت سپاس و ستایش خود را از صمیم قلب تقدیم به پدر و مادر عزیزم می‌کنم کسانی که شعر زندگی‌ام ترنّم آهنگ مهربانی آنان است. آن ستاره‌های درخشان آسمان زندگی‌ام که هیچ‌گاه نورشان به خاموشی نخواهد گرایید.

باسمه تعالی

چکیده

یکی از مسائل اساسی در سال‌های اخیر پیدا کردن یک توصیف مناسب از رادیکال زیرمدول N از یک مدول (نوتری) M روی یک حلقه جابجایی می‌باشد. در این پایان‌نامه ایده‌آل‌های اول وابسته به زیرمدول‌ها و به‌خصوص ایده‌آل‌های اول وابسته به رادیکال یک زیرمدول مورد توجه قرار گرفته و سپس یک تجزیه اول نرمال از رادیکال زیرمدول N از مدول نوتری M ارائه شده است.

پیش‌گفتار

یکی از اساسی‌ترین سؤالات در نظریه زیرمدول‌های اول، پیدا کردن رادیکال یک زیرمدول است. همان‌طور که می دانیم اگر I یک ایده‌آل از حلقه جابجایی R باشد، آن‌گاه اشتراک تمام ایده‌آل‌های اول شامل I به صورت $\sqrt{I} = \{r \in R \mid \exists n \in \mathbb{N};\ r^n \in I\}$ می باشد. امّا در مدول‌ها به واسطه‌ی این‌که نمی توان اعضای یک مدول را در هم ضرب کرد، مشخص کردن رادیکال یک زیرمدول، یعنی اشتراک تمام زیرمدول‌های اول شامل آن، به یکی از مسائل اساسی زیرمدول‌های اول مبدل شده است. این موضوع ابتدا توسط مَک‌اسلند [۱] و مور[۲]، در مرجع[۱۰]، درباره‌ی مدول‌های با تولید متناهی انجام شد. این افراد در حالتی که مدول‌ها با تولید متناهی نباشند نیز به بررسی این موضوع پرداخته‌اند. سپس اسمیت [۳] و جن‌کینز [۴]، در مرجع[۶]، رادیکال یک مدول را روی دامنه‌های ددکیند کاملاً مشخص کرده‌اند.

در این پایان نامه توصیفی از رادیکال یک زیرمدول از یک مدول نوتری را ارائه می دهیم.

این پایان نامه شامل پنج فصل بوده و در سرتاسر آن حلقه‌ها جابجایی و یکدار و مدول‌ها یکانی می باشند. فصل اول شامل تعاریف و مفاهیم مقدماتی است که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می گیرند. در فصل دوم به معرفی زیرمدول‌های اول، زیرمدول‌های اولیه، تجزیه اولیه، رادیکال یک زیرمدول، اول‌های کمین، تجزیه اول و ایده‌آل‌های اول وابسته پرداخته و برخی از خصوصیات آن‌ها را همراه با مثال‌هایی بیان می کنیم. توصیفی از رادیکال یک زیرمدول از یک مدول نوتری، در فصل سوم ارائه شده است. در فصل چهارم

---

[۱] McCasland

[۲] Moore

[۳] Smith

[۴] Jenkins

پس از معرفی ایده‌آل‌های اول وابسته تعمیم یافته، ارتباط مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول وابسته تعمیم یافته زیرمدول‌های یک مدول نوتری و مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول وابسته به رادیکال آن زیرمدول را مشخص کرده‌ایم. در فصل پنجم با ارائه روشی برای تشخیص ایده‌آل‌های اول وابسته به رادیکال یک زیرمدول از یک مدول نوتری و به کمک فصل سوم، رادیکال آن زیرمدول را به‌طور کامل مشخص خواهیم کرد.

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیش‌نیازها

فرض کنید R یک حلقه باشد. یک زیرمجموعه‌ی S از R را بسته ضربی گوییم هرگاه $1 \in S$ و S تحت عمل ضرب R، بسته باشد. رابطه «$\sim$» روی $R \times S$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(a, s) \sim (b, t) \iff \exists u \in S \ ; \ u(at - bs) = 0.$$

به‌وضوح «$\sim$» یک رابطه هم‌ارزی بوده و کلاس‌های هم‌ارزی ناشی از این رابطه‌ی هم‌ارزی را $\frac{a}{s}$ نمایش می دهیم. هم‌چنین مجموعه‌ی تمام این کلاس‌های هم‌ارزی را با $S^{-1}R$ یا R_S نمایش داده و به آن حلقه کسرهای R نسبت به S گوییم. حال با تعریف عمل‌های جمع و ضرب به صورت زیر، R_s را به یک حلقه جابجایی و یکدار تبدیل می کنیم.

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st} \ , \ \frac{a}{s}.\frac{b}{t} = \frac{ab}{st}.$$

به‌سادگی می توان نشان داد که تعاریف فوق مستقل از انتخاب نمایش (a, s) و (b, t) می باشند. حال یک حالت بسیار مهم از حلقه کسرها را بیان می کنیم. فرض کنید p یک

ایده‌آل اول از حلقه R باشد. به وضوح $S = R \setminus p$ یک زیر مجموعه‌ی بسته ضربی از R بوده و لذا

$$R_S = \{\frac{a}{s} \mid a \in R, s \in R - p\}.$$

در این حالت R_S یک حلقه‌ی موضعی با تنها ایده‌آل بیشین $m = \{\frac{a}{s} \in R_S \mid a \in p\}$ می باشد. معمولاً در این حالت، R_S را با R_p و m را با pR_p نمایش می دهیم. در ضمن R_p را موضعی‌سازی R در p گوییم.

به‌طور مشابه می توان مدول کسرها را تعریف کرد. فرض کنید M یک $R-$ مدول و S یک زیر مجموعه‌ی بسته ضربی از R باشد. حال رابطه هم‌ارزی «$\sim$» را روی $M \times S$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(m, s) \sim (m', s') \Longleftrightarrow \exists t \in S \; ; \; t(sm' - ms') = ۰.$$

مجموعه‌ی کلاس‌های هم‌ارزی $\frac{m}{s}$ $(s \in S \; , \; m \in M)$، ناشی از این رابطه هم‌ارزی را با $S^{-۱}M$ و یا M_S نمایش می دهیم. به عبارت دیگر

$$M_S = \{\frac{m}{s} \mid m \in M \; , \; s \in S\}.$$

با اعمال زیر می توان M_S را به یک R_S- مدول تبدیل کرد

$$\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} = \frac{s'm + sm'}{ss'} \; , \; \frac{r}{s}.\frac{m}{s'} = \frac{rm}{ss'}.$$

همچنین اگر p یک ایده‌آل اول از حلقه R و $S = R \setminus p$ باشد، آن‌گاه M_S را با M_p نمایش می دهیم.

حال فرض کنید $f : M' \longrightarrow M$ یک همریختی از $R-$ مدول‌ها باشد. در این صورت یک همریختی از R_S مدول‌ها را به صورت زیر خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} f_S : M'_S &\longrightarrow M_S \\ \frac{m'}{s} &\mapsto \frac{f(m')}{s}. \end{aligned}$$

گزاره ۱.۱.۱ اگر N و P زیرمدول‌هایی از $R-$ مدول M باشند، آن‌گاه R_S- مدول‌های $(\frac{M}{N})_S$ و $\frac{M_S}{N_S}$ یکریخت می باشند.

اثبات : رجوع شود به [۲، نتیجه ۳.۴]. ■

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنید M یک $R-$ مدول باشد. پوچساز M را با $Ann_R(M)$ نمایش داده و به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$Ann_R(M) = \{r \in R \mid rM = \circ\}.$$

به‌وضوح $Ann_R(M)$ ایده آلی از R بوده و $Ann_R(M) = \bigcap_{m\in M} Ann_R(m)$ است.
اگر N و P زیرمدول‌هایی از $R-$ مدول M باشند، آن‌گاه قرار می دهیم

$$(N : P) = \{r \in R \mid rP \subseteq N\}.$$

گزاره ۳.۱.۱ فرض کنید M یک $R-$ مدول باتولید متناهی و S یک زیرمجموعه‌ی بسته ضربی از R باشد. در این صورت $S^{-1}(Ann(M)) = Ann(S^{-1}M)$ است.

اثبات : رجوع شود به [۲، گزاره ۳.۱۴]. ■

تعریف ۴.۱.۱ بعد کرول حلقه R را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$dimR = sup\{n \in \mathbb{N} \cup \{\circ\} \mid p_\circ \subsetneqq p_1 \subsetneqq \dots \subsetneqq p_n \; ; \; p_i \in Spec(R)\}.$$

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنید p یک ایده‌آل اول باشد. ارتفاع p را با $ht(p)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$ht(p) = sup\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \ldots \subsetneq p_n = p;\ p_i \in Spec(R)\}.$$

اگر p ایده‌آل اولی شامل I باشد به‌طوری‌که برای هر ایده‌آل اول q شامل I، $q \subseteq p$ نتیجه دهد $q = p$، آن‌گاه گوییم p یک ایده‌آل اول کمین وابسته به I است.
فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه R باشد. ارتفاع I را با $ht(I)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$ht(I) = inf\{ht(p) \mid \text{ایده‌آل اول کمینی روی } I \text{ باشد } p\}.$$

در حالتی که $I = R$، $ht(I)$ را یکی بیشتر از بعد R در نظر می گیریم (اگر بعد R نامتناهی باشد، $ht(R)$ را بی‌نهایت می گیریم).

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنید M یک $R-$ مدول روی قلمرو صحیح R باشد. زیرمدول تابی M را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$T(M) = \{m \in M \mid \exists 0 \neq r \in R\ ;\ rm = 0\}.$$

اگر $T(M) = 0$، آن‌گاه M را فارغ از تاب گوییم.

تعریف ۷.۱.۱ در جبر جابجایی، یک حلقه‌ی منظم، حلقه‌ی نوتری است که موضعی‌سازی هر ایده‌آل اول آن موضعی منظم باشد. به این معنی که موضعی‌سازی هر ایده‌آل اول آن

دارای این خاصیت باشد که کمترین تعداد مولدهای ایده‌آل بیشین آن برابر با بعد کرول آن باشد.

قضیه ۸.۱.۱ فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه R و M یک $R-$ مدول تولید شده توسط n عنصر باشد. اگر $x \in R$ به‌طوری‌که $xM \subseteq IM$، آن‌گاه عنصر $y \in I$ وجود دارد به‌طوری‌که $(x^n + y)M = ۰$.

اثبات : فرض کنید $m_۱, m_۲, \ldots, m_n \in M$ موجود باشند به‌طوری‌که $M = Rm_۱ + \ldots + Rm_n$. لذا داریم

$$\begin{aligned} xm_i &= \sum_{j=۱}^{n} y_{ij} m_j \; ; \; y_{ij} \in I \; , \; \forall i, j = ۱, ۲, \ldots, n \\ &\Longrightarrow \; A \begin{pmatrix} m_۱ \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = ۰ \end{aligned}$$

جایی که ماتریس A به شکل زیر است

$$A = \begin{pmatrix} x - y_{۱۱} & -y_{۱۲} & \cdots & -y_{۱n} \\ -y_{۲۱} & x - y_{۲۲} & \cdots & -y_{۲n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -y_{n۱} & -y_{n۲} & \cdots & x - y_{nn} \end{pmatrix}.$$

حال با توجه به اینکه $A'A = (detA)I_n$ که A' ماتریس الحاقی A و I_n ماتریس همانی است، $(detA)M = ۰$ و لذا $detA \in Ann_R(M)$. از طرفی

$$detA = x^n + a_۱ x^{n-۱} + \ldots + a^n \; ; \; a_i \in I \; , \; \forall i = ۱, ۲, \ldots, n.$$

لذا $detA = x^n + y$ به‌طوری‌که $y \in I$. بنابراین $x^n + y \in Ann_R(M)$. ■

گزاره ۹.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه نوتری و I ایده‌آلی از R باشد. در این صورت $(\sqrt{I})^n \subseteq I$، برای بعضی $n \in \mathbb{N}$.

اثبات : رجوع شود به [۲، گزاره ۱۴.۷]. ■

فصل ۲

اول‌های وابسته

۱.۲ زیرمدول‌های اول و اولیه

در این بخش ابتدا مدول اول و اولیه را تعریف کرده و برخی از خصوصیات آن‌ها را بیان می کنیم. سپس تجزیه اولیه مدول‌ها را مطرح کرده و نشان می دهیم هر زیرمدول (ایده‌آل) یک مدول (حلقه) نوتری تجزیه اولیه نرمال دارد.

تعریف ۱.۱.۲ فرض کنید M یک $R-$ مدول باشد. زیرمدول سره P از M را اول گوییم هرگاه برای $r \in R$ و $m \in M$، اگر $rm \in P$، آن‌گاه یا $m \in P$ و یا $r \in (P : M)$. **مجموعه** زیرمدول‌های اول M را با $Spec(M)$ نمایش داده و به آن طیف M گوییم.

ابتدا به بیان مثال‌هایی از زیرمدول‌های اول می‌پردازیم.

مثال ۲.۱.۲ هر ایده‌آل اول از حلقه R، یک زیرمدول اول از $R-$ مدول R است و بالعکس.

مثال ۳.۱.۲ فرض کنید p عددی اول باشد. گروه جمعی

$$\mathbb{Z}_{p^\infty} = \{\frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} | a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

را به‌عنوان $\mathbb{Z}-$ مدول در نظر بگیرید. فرض کنید N زیر مدولی از $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ باشد. می دانیم N توسط $\frac{1}{p^k} + \mathbb{Z}$ تولید می شود که k عدد صحیح و مثبتی است. چون $p(\frac{1}{p^{k+1}} + \mathbb{Z}) \in N$ لذا یا $(\frac{1}{p^{k+1}} + \mathbb{Z}) \in N$ و یا $p\mathbb{Z}_{p^\infty} \subseteq N$. اگر $(\frac{1}{p^{k+1}} + \mathbb{Z}) \in N$ آن‌گاه $t \in \mathbb{Z}$ای وجود دارد به‌طوری‌که $p^{k+1} \mid 1 - tp$ و در نتیجه $p \mid 1$ را که تناقض است. حال اگر $p\mathbb{Z}_{p^\infty} \subseteq N$، آن‌گاه

$$\frac{1}{p^{k+1}} + \mathbb{Z} = p(\frac{1}{p^{k+2}} + \mathbb{Z}) \in N$$

و مشابه قسمت قبل، بایستی $p \mid 1$، که تناقض است. در نتیجه $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ به‌عنوان $\mathbb{Z}-$ مدول فاقد زیر مدول اول است. بنابراین ممکن است طیف یک مدول تهی باشد.

مثال ۴.۱.۲ فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F باشد. اگر W زیرفضایی سره از V باشد، آن‌گاه $(W : V) = 0$ و به آسانی می توان دید که همه زیر فضاهای سره‌ی V، اول می باشند.

مثال ۵.۱.۲ فرض کنید R حلقه چند جمله‌ای‌های $\mathbb{Z}[x]$ و M، $R-$ مدول $R \oplus R$ باشد و قرار دهید $K = R \oplus Rx$. K یک زیرمدول اول از M است زیرا هرگاه برای $f(x) \in R$ و $(g_1(x), g_2(x)) \in M$، $f(x)(g_1(x), g_2(x)) \in R \bigoplus Rx$ باشد آن‌گاه

$$\begin{aligned}(f(x)g_1(x), f(x)g_2(x)) \in R \oplus Rx \quad &\Longrightarrow \quad f(x)g_2(x) \in Rx \\ &\Longrightarrow \quad f(0)g_2(0) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad f(0) = 0 \text{ یا } g_2(0) = 0.\end{aligned}$$

اگر $f(\circ) = \circ$، آن‌گاه $f(x)(R \oplus R) \in K$، یعنی $f \in (K : M)$. امّا اگر $g_2(\circ) = \circ$، آن‌گاه $(g_1, g_2) \in K$.

لم ۲.۱.۶ فرض کنید M یک $R-$ مدول باشد. آن‌گاه زیرمدول N از $R-$ مدول M اول است اگر وتنها اگر $p = (N : M)$ ایده‌آل اولی از R بوده و $\frac{R}{p}-$ مدول $\frac{M}{N}$، فارغ از تاب باشد.

اثبات : ابتدا فرض کنید N یک زیرمدول اولی از M باشد. هرگاه برای $r, s \in R$، $rs \in (N : M)$ و $s \notin (N : M)$، آن‌گاه $m \in M$ وجود دارد به‌طوری‌که $sm \notin N$ و $rsm \in N$، چون N اول است لذا $r \in (N : M)$. بنابراین $(N : M)$ ایده‌آل اولی از R می باشد. همچنین فرض کنید $m \in M$ و $r \in R$ای وجود داشته باشد به‌طوری‌که $m + N \neq N$، $r + p \neq p$ و $(r+p)(m+N) = N$. لذا $rm \in N$ و چون N اول است یا $r \in p$ است و یا $m \in N$، که هر دو حالت تناقض است. لذا $T(\frac{M}{N}) = \circ$ در نتیجه $\frac{R}{p}-$ مدول $\frac{M}{N}$، فارغ از تاب می باشد.

برعکس، فرض کنید $p = (N : M)$ ایده‌آل اولی از R بوده و $\frac{R}{p}-$ مدول $\frac{M}{N}$، فارغ از تاب باشد. هرگاه برای $r \in R$ و $m \in M$، $rm \in N$، آن‌گاه $(r+p)(m+N) = N$. چون $T(\frac{M}{N}) = \circ$ لذا $r + p = p$ یا $m + N = N$. در نتیجه $r \in p$ و یا $m \in N$ است. ■

اگر N زیرمدول اولی از M باشد، آن‌گاه $(N : M)$ ایده‌آل اولی از حلقه R خواهد بود امّا در حالت کلی، عکس این مطلب درست نمی باشد. به‌عنوان مثال، $(\mathbb{Z} : \mathbb{Q}) = \circ$ ایده آل اولی از $\mathbb{Z}$ بوده ولی $\mathbb{Z}$ زیرمدول اولی از $\mathbb{Z}-$ مدول $\mathbb{Q}$ نمی باشد.

اگر N زیرمدول اولی از M باشد، آن‌گاه $p = (N : M)$ ایده‌آل اولی از R بوده و گوییم N یک زیرمدول$p-$ اول از M است. در مثال ۲.۱.۵، به‌وضوح $(R \oplus Rx : R \oplus R) \subseteq Rx$ می باشد.

فرض کنید $f \in (R\oplus Rx : R\oplus R)$، لذا $f(R\oplus R) \subseteq (R\oplus Rx)$. پس $f(0, 1) \in (R\oplus Rx)$.
بنابراین $f \in Rx$ و $Rx \subseteq ((R \oplus Rx) : (R \oplus R))$. در نتیجه $Rx = ((R \oplus Rx) : (R \oplus R))$
و لذا $(R \oplus Rx)$ یک زیرمدول $Rx-$ اول از M می باشد.

لم ۷.۱.۲ فرض کنید R یک حلقه و N زیرمدولی از $R-$ مدول M باشد. اگر L زیرمدول اولی از M باشد به‌طوری‌که $N \nsubseteq L$، آن‌گاه $L \cap N$ یک زیرمدول اول از N بوده و $(L \cap N : N) = (L : M)$.

اثبات : فرض کنید برای $r \in R$ و $n \in N$، $rn \in (L \cap N)$ و $r \notin (L \cap N : N) = (L : N)$.
چون $(L : M) \subseteq (L : N)$، لذا $r \notin (L : M)$. از طرفی $rn \in L$ و L زیرمدول اولی از M بوده لذا $n \in L$. پس $n \in (N \cap L)$. در نتیجه $(N \cap L)$ اول می باشد.
حال فرض کنید $r \in (L \cap N : N)$. پس $rN \subseteq L$، چون $N \nsubseteq L$ لذا $n \in N \setminus L$ وجود دارد به‌طوری‌که $rn \in L$، چون L زیرمدول اولی از M می باشد لذا $r \in (L : M)$.
بنابراین $(L \cap N : N) \subseteq (L : M)$. از طرفی $(L\cap N : N) = (L : N) \supseteq (L : M)$. لذا $(L \cap N : N) = (L : M)$. ■

تعریف ۸.۱.۲ فرض کنید M یک $R-$ مدول باشد. زیرمدول سره Q از M را اولیه گوییم هرگاه برای $r \in R$ و $m \in M$، اگر $rm \in Q$، آن‌گاه $m \in Q$ یا $r \in \sqrt{(Q : M)}$.
گوییم زیرمدول اولیه Q از مدول M، $q-$ اولیه است هرگاه $q = \sqrt{(Q : M)}$.
به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۹.۱.۲ هر ایده‌آل اولیه از حلقه R، یک زیرمدول اولیه از $R-$ مدول R است.

مثال ۱۰.۱.۲ هر زیرمدول اول N از $R-$ مدول M، اولیه است.

توجه کنید عکس مثال ۱۰.۱.۲ درست نمی باشد(ایده آل های اولیه $\mathbb{Z}$ را در نظر بگیرید).

مثال ۱۱.۱.۲ فرض کنید $R = \mathbb{Z}[x]$ و $M = R \oplus R$ را به‌عنوان $R-$ مدول در نظر بگیرید. در این صورت $N = R(2, x) + R(x, 0)$ یک زیرمدول اولیه از M می باشد. به‌وضوح

$$\begin{aligned} N &= \{(2r(x) + xh(x), xr(x)) \in M \mid r(x), h(x) \in R\} \\ &= \{(f(x), g(x)) \in M : g(0) = 0, f(0) = 2g'(0)\}. \end{aligned}$$

که $g'(0)$ مشتق g در $x = 0$ است. حال نشان می دهیم N زیرمدول اولیه‌ای از M است. چون $(1, 1) \in M \setminus N$، لذا $N \neq M$. فرض کنید برای $(f(x), g(x)) \in M$ و $h(x) \in R$ داشته باشیم

$$h(x)(f(x), g(x)) \in N \text{ و } (f(x), g(x)) \notin N$$
$$\implies h(0)g(0) = 0,\ f(0)h(0) = 2h'(0)g(0) + 2h(0)g'(0)$$

چون $(f(x), g(x)) \notin N$، لذا ممکن است دو حالت زیر اتفاق بیفتد.

حالت اول: $g(0) \neq 0$. **بنابراین** $h'(0) = h(0) = 0$. **حال برای هر** $(t(x), s(x)) \in M$ **داریم**

$$h(0)s(0) = 0\ ,\ h(0)t(0) = 0 = 2h'(0)s(0) + 2h(0)s'(0).$$

در نتیجه $h(x)(t(x), s(x)) \in N$ **و لذا** $h(x)M \subseteq N$.

حالت دوم : $f(0) \neq 2g'(0)$. **اگر** $h(0) \neq 0$، **آن‌گاه چون**

$$g(0)h(0) = 0 \implies g(0) = 0, h(0)f(0) = 2h(0)g'(0) + 2h'(0)g(0)$$

$$\Longrightarrow \quad h(\circ)f(\circ) = ۲h(\circ)g'(\circ).$$

بنابراین $f(\circ) = ۲g'(\circ)$، که تناقض است. لذا می پذیریم $h(\circ) = \circ$. حال برای هر $(t(x), s(x)) \in M$ داریم

$$h^۲(\circ)s(\circ) = \circ \ , \ h^۲(\circ)t(\circ) = \circ = ۴h(\circ)h'(\circ)s(\circ) + ۲h^۲(\circ)s'(\circ)$$

که این نتیجه می دهد $h^۲(x)(t(x), s(x)) \in N$ و لذا $h^۲(x)M \subseteq N$.

بنابراین در هر حالت، $h(x) \in \sqrt{(N : M)}$ و لذا N زیرمدول اولیه‌ای از M خواهد بود.

لم ۱۲.۱.۲ فرض کنید R حلقه‌ای یکدار بوده و A زیرمدول اولیه‌ای از $R-$ مدول M باشد. در این صورت $Q_A = (A : M)$ یک ایده آل اولیه در R است.

اثبات : چون $A \neq M$، $۱ \notin Q_A$، لذا $Q_A \neq R$. هرگاه $rs \in Q_A$ و $s \notin Q_A$، آن‌گاه $sM \nsubseteq A$. در نتیجه به‌ازای $m \in M$ای، $sm \notin A$ ولی $r(sm) \in A$. چون A اولیه است، به ازای nای، $r^nM \subseteq A$، یعنی $r^n \in Q_A$. بنابراین Q_A اولیه می باشد. ■

لم ۱۳.۱.۲ فرض کنید N زیرمدول اولیه‌ای از $R-$ مدول M باشد. در این صورت N اول است اگر و تنها اگر $(N : M)$ ایده آل اولی از حلقه R باشد.

اثبات : با توجه به لم ۶.۱.۲، کافی است نشان دهیم اگر N زیرمدول اولیه‌ای از $R-$ مدول M و $(N : M)$ ایده آل اولی از حلقه R باشد آن‌گاه N اول است.

فرض کنید برای $r \in R$ و $m \in M$، $rm \in N$ ولی $m \notin N$. چون N اولیه است $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که $r^n \in (N : M)$. از طرفی $(N : M)$ اول بوده لذا $r \in (N : M)$، بنابراین N اول است. ■