دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه فردوسی مشهد

دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم ریاضی و آمار

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض
گرایش هندسه– دستگاههای دینامیکی

عنوان :

نقاط هموکلینیک ، بازگشتی و زنجیر بازگشتی از دیفیومورفیسم های حافظ حجم بدون ژنریک

استاد راهنما :

دکتر بهمن هنری

استاد مشاور :

دکتر علیرضا زمانی بهابادی

نگارنده :

اعظم احسانی سرخ آبادی

فهرست مندرجات

مقدمه

یک بخش مهم در مطالعه یک دستگاه دینامیکی، دریافتن ساختارهای منیفلدهای پایدار (و منیفلدهای ناپایدار)، جاذب هاو مجموعه های زنجیر بازگشتی سیستم دینامیکی می باشد. در این مقاله M یک منیفلد و $f: M \longrightarrow M$ یک دیفیومورفیسم حافظ حجم (نه لزوماً C^1 ژنریک) در نظر گرفته شده است. زیا[1] [۲۰] نشان داد که به طور ژنریک نقطه ی تناوبی هذلولوی p از f دارای نقطه ی هموکلینیک است و بعلاوه نقاط هموکلینیک p در منیفلد پایدار و منیفلد ناپایدار p چگال هستند. اما یکی از اهداف این مقاله بدست آوردن نتیجه ای مشابه بدون فرض ژنریک بوده است. اهداف اصلی این رساله عبارتند از (۱) بدست آوردن رابطه ای بین مؤلفه های زنجیری C^1 − سایه ای − پایدار و هذلولوی بودن منیفلد، (۲) بیان رابطه ی بین پایداری لاگرانژ f و زنجیر بازگشتی بودن M، (۳) بدست آوردن رابطه ای بین نقاط زنجیر بازگشتی و نقاط هموکلینیک.
مقالات اصلی به کار برده شده در این رساله عبارتند از

1. Bonatti,C.,Crovisier,S.:Récurrence et généricité, Invent.Math. 158 (2004), 33-104.

2. Jaeyoo Choy, Hahng-Yun Chu ,Min Kyu Kim:On homoclinic points , recurrences and chain recurrences of volume-preserving diffeomorphisms whithout genericity,(Submitted on 7 Apr 2009).

---

[1] Xia

3. Wen,X.,Gan,S.,Wen,L.:C^1-stably shadowable chain components are hyperbolic .J.Differential Equations 246 (2009),340-357.

این رساله شامل سه فصل می باشد. در فصل اول نمادها و تعاریف مقدماتی مورد نیاز این رساله جمع آوری شده است. فصل دوم خود شامل سه بخش می باشد. در بخش اول به بررسی نقاط زنجیر بازگشتی در منیفلد های فشرده و حافظ حجم می پردازیم. در بخش دوم با فرض فشردگی M وجود مجموعه ی مانده در $Diff^1_\omega(M)$ را اثبات می کنیم و همچنین اثبات می کنیم که با اضافه کردن شرط همبندی روی منیفلد، زنجیر بازگشتی بودن منیفلد بدست می آید. در ادامه ی این بخش شرط معادل C^1 – پایدار – سایه ای را بیان و اثبات می‌کنیم. در بخش سوم نیز به بررسی نقاط قویاً زنجیر بازگشتی در منیفلدها ی نه لزوماً فشرده می پردازیم. فصل سوم این رساله شامل قضایا و نتایجی است که اهداف اصلی را بیان و اثبات می کند.

فصل ۱

نمادها و تعاریف مقدماتی

۱.۱

فرض کنیم M یک منیفلد مشتق پذیر n ـبعدی و $f : M \longrightarrow M$ یک C^1 دیفیومورفیسم باشد.

تعریف ۱.۱.۱ یک n ـصورت روی M عبارت است از نگاشتی مانند $\theta : p \longrightarrow \theta_p$ که θ_p یک n ـتانسور متناوب روی T_pM است.
یک n ـصورت ω روی M که هیچ جا صفر نمی شود را یک صورت حجم خوانند.
یک ۲ ـتانسور θ روی T_pM ناتباهیده نامیده می شود اگر $\theta(X,Y) = 0$ برای هر $Y \in T_pM$ ایجاب کند که $X = 0$.
یک صورت سادکی ω روی M عبارتست از یک ۲ ـصورت هیچ جا تباهیده روی M. فرض کنیم ω یک دو صورت هیچ جا تباهیده باشد. اگر $p \in M$ای موجود باشد که $(\omega \wedge \cdots \wedge \omega)_p = 0$ آنگاه برای $X \neq 0$ و برا ی هر Y، $(\omega \wedge \cdots \wedge \omega)_p(X, Y \cdots, X, Y) = 0$ و لذا برای هر Y، $\omega(X,Y) = 0$ که متناقض با ناتباهیدگی ω است. لذا ناتباهیدگی ω شبیه ضرب گوه‌ای $\frac{n}{2}$ دفعه ای $\omega^{\frac{n}{2}} = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ است که یک صورت حجم روی M تعریف می‌کند. بنابراین وقتی صحبت از یک صورت سادکی می کنیم، n زوج فرض می شود.

تعریف ۲.۱.۱ ۲ − صورت θ را روی M مشتق پذیر خوانیم اگر برای هر همسایگی مختصاتی (U,φ) توابع $\beta_{ij} : p \in U \longrightarrow \theta_p(\varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_i}|_p), \varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_j}|_p))$ مشتق پذیر باشند.

تعریف ۳.۱.۱ منیفلد مشتق پذیر M را منیفلد ریمانی از بعد n نامیم اگریک ۲ ـصورت متقارن، مثبت معین و مشتق پذیر مانندΦ روی M موجود باشد. Φ را متریک ریمانی روی M خوانند.

فرض کنیم M یک منیفلد ریمانی از بعد n و Φ متریک ریمانی روی M باشد. برای $p \in M$، فرض کنیم (U,φ) یک همسایگی مختصاتی باشد با$\varphi(U) = O \subseteq \mathbb{R}^n$ و فرض کنیم $\varphi(p) = x$. در این صورت تعریف می کنیم $g_{ij}(p) = \Phi_p(E_{ip}, E_{jp})$ جایی که $E_{ip} = \varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_i}|_p)$ و قرار می دهیم $g_{ij}(x) = g_{ij} \circ \varphi^{-1}(x)$.

فرض کنیم $\mathcal{B}(M)$، σ ـجبر تولید شده توسط مجموعه های باز M باشد. برای یک تابع بورل اندازه پذیر υ که محمل υ، یعنی بستار نقاطی از دامنه υ که مقادیر υ درآن نقاط مخالف صفر است ، روی دامنه یک همسایگی مختصاتی قرار گرفته است انتگرال به صورت زیر بیان می‌شود

$$\int \upsilon dv = \int \upsilon(x)\sqrt{g(x)}dx$$

جایی‌که $\upsilon(x) = \upsilon \circ \varphi^{-1}(x)$ و $g(x) = detG(x)$ که درایه های ماتریس $G(x)$، عبارتند از $g_{ij}(x)$.

برای $E \subseteq M$، تابع χ_E که به صورت

$$\chi_E = \begin{cases} ۱ & x \in E \\ ۰ & x \notin E \end{cases}$$

تعریف می شود را در نظر می گیریم. اگر $E \in \mathcal{B}(M)$ واگر E در دامنه ی یک همسایگی مختصاتی مانند (U,φ) قرار داشته باشد اندازه ی لبگ E را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$m(E) = \int_E dv = \int_{\varphi(E)} \sqrt{g(x)}dx.$$

زیر مجموعه ی فشرده از M بسته است پس لبگ اندازه پذیراست و با توجه به تعریف اندازه لبگ از اندازه ی متناهی می باشد. بنابراین گوی های بسته با شعاع های متناهی از اندازه ی متناهی هستند.

تعریف ۴.۱.۱ برای منیفلد M و C^1 دیفیومورفیسم $f : M \longrightarrow M$ نگاشتهای

$$f_* : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}M \text{ و } f^* : T_{f(p)}M^* \longrightarrow T_pM^*$$

(که T_pM^* فضای دوگان TpM است) را به ترتیب به صورت $f_*(X_p)g = X_p(g \circ f)$ و$(f^*\omega)_p(X_{1p}, \cdots, X_{np}) = \omega_{f(p)}(f_*X_{1p}, \cdots, f_*X_{np})$ تعریف می کنیم. اگر $f^*\omega = \omega$ آنگاه f را حافظω نامیم.

لم ۵.۱.۱ فرض کنیم ω یک صورت سادکی است و f حافظ ω. در این صورت f حافظ حجم است.

برهان . چون $f^*(\omega \wedge \cdots \wedge \omega) = f^*(\omega) \wedge \cdots \wedge f^*(\omega) = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ ([۳] را ببینید) لذا لم برقرار است. □

لم ٦.۱.۱ اگر $f : M \longrightarrow M$ حافظ حجم باشد، آنگاه f حافظ اندازه است یعنی برای یک زیر مجموعه‌ی لبگ اندازه پذیر $E \subseteq M$ داریم $m(E) = m(f(E))$.

برهان . فرض کنیم (U, φ) همسایگی مختصاتی است با $E \subseteq U$ و $\varphi : U \longrightarrow O$ که O زیر مجموعه ی بازی از $\mathbb{R}^n$ است، در این صورت

$$\psi = \varphi \circ f^{-1} : f(U) \longrightarrow O$$

یک همسایگی مختصاتی است که $f(E) \subseteq f(U)$. بنابراین

$$m(f(E)) = \int_{\psi(f(E))} \sqrt{g'(x)}dx$$

که $g'(x) = detG'(x)$ و درایه های $G'(x)$ عبارتند از

$$g'_{ij}(x) = g_{ij} \circ \psi^{-1}(x) = g_{ij} \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = \Phi_{f\circ\varphi^{-1}(x)}(E_{if\circ\varphi^{-1}(x)}, E_{jf\circ\varphi^{-1}(x)})$$

$$= \Phi_{f(p)}(E_{if(p)}, E_{jf(P)}) = \Phi_{f(p)}(f_*(E_{ip}), f_*(E_{jp}))$$

زیرا

$$E_{ip} = \varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_i} |_p) \Longrightarrow E_{if(p)} = (\varphi\circ f^{-1})_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_i} |_p) = (f^{-1})_*^{-1}\circ\varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_i} |_p) = f_*(E_{ip})$$

بنابراین اگر $f^*\omega = \omega$، آنگاه

$$g'_{ij}(x) = \Phi_{f(p)}(f_*(E_{ip}), f_*(E_{jp})) = \Phi_p(E_{ip}, E_{jp}).$$

همچنین اگر $x \in O$ و E $\varphi^{-1}(x) \in$ آنگاه $\chi_E(x) = 1$ و به علاوه $f \circ \varphi^{-1}(x) \in f(E)$.
بنابراین $\chi_{f(E)}(X) = 1$ و در نتیجه $m(E) = m(f(E))$ □

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنیم $p \in M$ یک نقطه ی تناوبی هذلولوی با دوره ی تناوب k باشد، منیفلدهای پایدار و ناپایدار به صورت زیر تعریف می شوند

$$W^s(p,f) = \{u \in M; \lim_{n\to\infty} d(f^n(u), f^n(p)) = 0\}$$

$$W^u(p,f) = \{u \in M; \lim_{n\to\infty} d(f^{-n}(u), f^{-n}(p)) = 0\}$$

تعریف ۸.۱.۱ دنباله‌ی $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ درM را یک δ ـمدار نمای f خوانیم در صورتی که برای هر $i \in \mathbb{Z}$، $d(x_{i+1}, f(x_i)) < \delta$.

فرض کنیم $\epsilon > 0$ مفروض است، گوئیم مدار نمای $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ بوسیله ی مدار واقعی $(f^i(x))_{i\in\mathbb{Z}}$ از f، ϵ ـسایه می شود در صورتی که برای هر $i \in \mathbb{Z}$

$$d(x_i, f^i(x)) < \epsilon.$$

تعریف ۹.۱.۱ دیفیومورفیسم f را دارای ویژگی سایه‌ای خوانیم در صورتی که برای هر $\epsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که هر δ ـمدارنمای آن توسط یک مدار f، ϵ ـسایه شود. در همین چارچوب گوئیم که دیفیومورفیسم f ناسایه ای است اگر $\epsilon > 0$ ای وجود داشته باشد، به طوی که برای هر $\delta > 0$ بتوان یکδ ـمدارنمایافت که هیچ مداری در M آن را ϵ ـسایه نکند.

تعریف ۱۰.۱.۱ نگاشت خطی $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ، هذلولوی نامیده می شود در صورتی که هیچیک از n ویژه مقدار آن (حساب شده با تکرار آنها) دارای قدر مطلق ۱ نباشند. یک نقطه‌ی ثابت p ازنگاشت مشتق پذیر f را هذلولوی خوانند در صورتی که D_pf، مشتق آن در نقطه‌ی p، هذلولوی باشد. نقطه ی تناوبی p از f با دوره ی تناوب n را هذلولوی خوانیم در صورتی که $D_p(f^n) : T_pM \longrightarrow T_pM$، هذلولوی باشد. مدار چنین pای را یک مدار تناوبی هذلولوی گویند.

تعریف ۱۱.۱.۱ نقطه ی q را هموکلینیک خوانند در صورتی که نقطه ی تناوبی هذلولوی ای مانند $q \neq p$ وجود داشته باشد که $q \in W^s(p, f) \cap W^u(p, f)$.

تعریف ۱۲.۱.۱ مجموعه ی فشرده و f ـپایای Λ، هذلولوی نامیده می شود اگر کلاف مماسی $T_\Lambda M$، $T_\Lambda M=\cup_{p\in M}\{p\}\times T_pM$، یک تجزیه ی Df ـپایای پیوسته به صورت جمع مستقیم $E\oplus F$ داشته باشد و ثابت های $c>0$ و $1>\lambda>0$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\| Df^n\mid_{E(x)}\|\leq c\lambda^n \text{ و } \| Df^{-n}\mid_{F(f^n(x))}\|\leq c\lambda^n$$

برای هر $x\in\Lambda$ و $n\geq 0$.

پیوسته بودن تجزیه بدین معنا است که برای هر $p\in M$ نگاشت های

$$p\longrightarrow F(p) \text{ و } p\longrightarrow E(p)$$

پیوسته باشند. پیوستگی نگاشت $p\longrightarrow F(p)$ یعنی: برای $\epsilon>0$ مفروض عددی مانند $\delta>0$ موجود باشد که اگر $d(p,q)<\delta$ آنگاه

$$F(q)\subset C_p^u(\epsilon)=\{v^u+v^s: v^u\in F(p), v^s\in E(p); ||v^s||\leq\epsilon||v^u||\}$$

تعریف ۱۳.۱.۱ فرض کنیم f یک همسانریختی از فضای متریک فشرده ی X باشد و $p\in X$. مجموعه ی امگا ـحدی p که به صورت $\omega(p,f)$ نوشته می شود عبارتست از مجموعه‌ی نقاطی مانند $q\in M$ که دنباله‌ای از اعداد صحیح n_j وجود داشته باشد که اگر $j\to\infty$ آنگاه $n_j\to\infty$ و $q=\lim_{j\to\infty}f^{n_j}(p)$.

قضیه ۱۴.۱.۱ مجموعه‌ی $\omega(p,f)$ ناتهی، بسته و f ـپایا است.

برهان . مجموعه ی $\omega(p,f)$ ناتهی است زیرا اگر $\{t_n\}\subseteq\mathbb{R}$ به گونه‌ای باشد که $t_n\to\infty$، آنگاه $\{f^{t_n}(p)\}$ یک دنباله از X است و چون X فشرده است عضوی مانند $q\in X$ و زیردنباله‌ای مانند $\{t_{n_j}\}$ وجود دارد به طوری که $f^{t_{n_j}}\to q$. بنابراین $q\in\omega(p,f)$. همچنین

$\omega(p,f)$ بسته است زیرا فرض کنیم $q \in \omega(p,f)^c$ از طرفی بنابر تعریف $\omega(p,f)$، یک همسایگی $V_q \subseteq X$ از q و عددی مانند $T > 0$ وجود دارد که $\{f^t(p) : t \geq T\} \cap V_q = \emptyset$، بنابراین $V_q \cap \omega(p,f) = \emptyset$ و در نتیجه $\omega(p,f)^c$ باز است. بالاخره مجموعه ی امگا حدی f ـپایا نیز می باشد. زیرا اگر $q \in \omega(p,f)$ آنگاه $\lim_{n_j\to\infty} f^{n_j}(p) = q$، ولی f همسانریختی است بنابراین $\lim_{n_j\to\infty} f(f^{n_j}(p)) = f(q)$ و $\lim_{n_j\to\infty} f^{-1}(f^{n_j}(p)) = f^{-1}(q)$، یعنی $f(q), f^{-1}(q) \in \omega(p,f)$. □

تعریف ۱.۱.۱۵ نقطه ی $q \in X$ را (مثبت)بازگشتی یا امگا ـبازگشتی برای f خوانیم درصورتی که $q \in \omega(q,f)$.

فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک و $f : X \longrightarrow X$ نگاشتی پیوسته باشد.

تعریف ۱.۱.۱۶ برای $\epsilon > 0$، زیر مجموعه ی باز ناتهی U ازX را ϵ — جمع کننده خوانیم در صورتی که برای هر$x \in U$ گوی باز $B_\epsilon(f(x))$، در U جای داشته باشد. U جمع کننده است اگر$\epsilon > 0$ ای وجود داشته که U، ϵ — جمع کننده باشد. به عبارت دیگر f مجموعه ی U را در یک فاصله‌ی یکنواخت ϵ به درونش می نگارد.
به عنوان مثال اگر $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه ی $f(x) = \frac{x}{2}$ تعریف شود آنگاه مجموعه ی $U = B_1(0)$، $\frac{1}{2}$ — جمع کننده است.

تعریف ۱.۱.۱۷ فرض کنیم U زیر مجموعه‌ا ی جمع کننده از X باشد. مجموعه ی بسته ی $A = \cap_{n\geq 0}\overline{f^n(U)}$ را مجموعه ی جاذب — مانند مشخص شده توسط U خوانند. در صورتی که X فشرده باشد A را به اختصار جاذب مشخص شده توسط U خوانیم. مجموعه ی باز $\cup_{n\geq 0} f^{-n}(U)$ را حوضچه ی A نسبت به U خوانند و با$B(A;U)$ نشان می دهند.

لم ۱.۱.۱۸ $B(A;U)$ برابراست با مجموعه ی نقاطی که مجموعه ی ω ـحدی آنها در A جای دارد.

برهان . فرض کنیم $p \in \cup_{n\geq 0} f^{-n}(U)$ در این صورت نقطه ی $q \in U$ و عدد صحیح $n_0 \geq 0$ موجود است طوری که $p = f^{-n_0}(q)$. فرض کنیم $r \in \omega(p,f)$ در این صورت دنباله ای مانند $\{m_k\}$ وجود دارد که $\lim_{m_k\to\infty} f^{m_k}(p) = r$. بنابراین $\lim_{m_k\to\infty} f^{m_k-n_0}(q) = r$. فرض کنیم V همسایگی دلخواه از r باشد، در این صورت برای هر $n \geq 0$، میتوان m_k را طوری انتخاب کرد که اولاً $m_k - n_0 > n$ و ثانیاً $f^{m_k-n_0} \in V$. از طرفی چون U، جمع کننده است داریم $f^{m_k-n_0}(U) \subseteq f^n(U)$. بنابراین $f^{m_k-n_0}(q) \in f^n(U) \cap V$ واین یعنی برای هر $n \geq 0$، $r \in \overline{f^n(U)}$. پس $r \in \cap_{n\geq 0}\overline{f^n(U)} = A$.

برعکس فرض کنیم $p \in M$ و $\omega(p,f) \subseteq A$. در این صورت اگر $r \in \omega(p,f)$ آنگاه به ازای هر $n \geq 0$، $r \in \overline{f^n(U)}$. حال به ازای هر $n \geq 0$، $q_n \in U$ای وجود دارد به طوری که $d(f^n(q_n), r) < \frac{\epsilon}{2}$. همچنین دنباله‌ای مانند $\{n_j\}$ موجود است که $\lim_{n_j\to\infty} f^{n_j}(p) = r$، یعنی $n_{j_0} > 0$ ای وجود دارد که $d(f^{n_{j_0}}(p), r) < \frac{\epsilon}{2}$. ولی

$$d(f^{n_{j_0}}(p), f^1(q_1)) \leq d(f^{n_{j_0}}(p), r) + d(r, f^1(q_1)) < \epsilon$$

وچون U، ϵ ـجمع کننده است پس $f^{n_{j_0}}(p) \in U$ ودر نتیجه $p \in f^{-n_{j_0}}(U) \subseteq B(A;U)$. □

لم ۱.۱.۱۹ اگر X فشرده باشد، $B(A;U)$ مستقل از انتخاب مجموعه های باز جمع کننده U است.

برهان . فرض کنیم U و U' دو مجموعه ی جمع کننده باشند که $A = \cap_{n\geq 0}\overline{f^n(U)} = \cap_{n\geq 0}\overline{f^n(U')}$. اگر $p \in B(A;U) = \cup_{n\geq 0} f^{-n}(U)$ و $p \notin B(A;U') = \cup_{n\geq 0} f^{-n}(U')$، آنگاه به ازای هر $n \geq 0$،

$$f^n(p) \notin U' \tag{1}$$

از طرفی چون X فشرده است، $\omega(p,f) \neq \emptyset$. پس اگر $q \in \omega(p,f)$ آنگاه دنباله‌ای مانند

$\{n_j\}$ وجود دارد که $\lim_{n_j\to\infty} f^{n_j}(p) = q$. ولی $M \setminus U'$ بسته است پس با توجه به (۱)، $f^{n_j}(p) \in M \setminus U'$ و در نتیجه

$$q \notin U' \qquad (۲)$$

ازطرفی $p \in \cup_{n\geq 0} f^{-n}(U)$ پس $\omega(p,f) \subseteq A$ یعنی $q \in A$ و بنابراین $q \in \overline{f(U')}$. حال فرض کنیم ϵ ،U' – جمع کننده است پس نقطه ای مانند $q' \in U'$ وجود دارد که$d(f(q'),q) \leq \epsilon$ و بنابراین به خاطر ϵ ـجمع کننده بودن U' داریم $q \in U'$ که متناقض با (۲) است. □

در حالت فشردگی معمولاً حوضچه ی A را به صورت $B(A)$ نشان می دهند.

تعریف ۲۰.۱.۱ نقطه ی $x \in X$ را یک نقطه ی ناسرگردان نگاشت f خوانند در صورتی که برای هر همسایگی باز U ازx عدد صحیح مثبتی مانند N وجود داشته باشد که $f^N(U) \cap U \neq \emptyset$. مجموعه ی نقاط ناسرگردان f را با نماد $\Omega(f)$ نشان می دهند.

لم ۲۱.۱.۱ مجموعه ی $\Omega(f)$ بسته و مثبت ـپایا است. بویژه اگر f دو سویی باشد آنگاه $\Omega(f)$، f ـپایا نیز است. به علاوه در فضای فشرده X، مجموعه ی نقاط ناسرگردان ناتهی است.

برهان . برای هر $x \notin \Omega(f)$، یک همسایگی U از x وجود دارد که به ازای هر $N > 0$، $f^N(U) \cap U = \emptyset$. پس اگر $y \in U$ آنگاه $y \notin \Omega(f)$. بنابراین $X \setminus \Omega(f)$ باز و در نتیجه $\Omega(f)$ بسته است. این مجموعه مثبت ـپایا است زیرا اگر $x \in \Omega(f)$ و V همسایگی باز دلخواهی از $f(x)$ باشد آنگاه $f^{-1}(V)$ یک همسایگی باز از x است و بنابراین $N > 0$ ای موجود است که

$$f^N(f^{-1}(V)) \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$$

یعنی

$$f^{-1}(f^N(V)) \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$$

پس $f^N(V) \cap (V) \neq \emptyset$ و در نتیجه $f(x) \in \Omega(f)$. بویژه اگر f دو سویی باشد، با استدلالی مشابه $f(\Omega(f)) = \Omega(f)$. اگر X فشرده باشد، برای هر $p \in X$ و هر $q \in \omega(p, X)$ یک دنباله از اعداد طبیعی مانند $\{n_j\}$ وجود دارد که $\lim_{n_j \to \infty} f^{n_j}(p) = q$. فرض کنیم U یک همسایگی باز دلخواه از q باشد، در این صورت $n_{j_\circ}$ ای وجود دارد که اگر $n_j \geq n_{j_\circ}$ آنگاه $f^{n_j}(p) \in U$.
فرض کنیم $n_j > n_{j_\circ}$ و $n_j = n_{j_\circ} + k$ که k یک عدد صحیح مثبت است. در این صورت

$$f^{n_{j_\circ}}(p) = f^{-k}(f^{n_j}(p)) \in U$$

بنابراین $f^{n_j}(p) \in f^k(U)$. از اینرو

$$f^{n_j}(p) \in f^k(U) \cap U$$

و در نتیجه $q \in \Omega(f)$. پس $\omega(p, X) \subseteq \Omega(f)$. □

تعریف ۲۲.۱.۱ یک ϵ ـزنجیر (ϵ ـمدار نما) از $x_\circ$ به x_n برای f عبارتست از دنباله‌ای مانند

$$x_\circ, x_\text{۱}, \cdots, x_n$$

که برای هر $\circ \leq i < n$، $d(f(x_i), x_{i+\text{۱}}) < \epsilon$.

نقطه ی x یک نقطه ی زنجیر بازگشتی است اگر برای هر $\epsilon > \circ$، یک ϵ ـزنجیر با نقطه‌ی ابتدا و انتهای x وجود داشته باشد، یعنی وجود داشته باشد عدد طبیعی $n \in \mathbb{Z}_+$ و نقاط $x_\circ, x_\text{۱}, \cdots, x_n \in X$ به طوری که $x = x_\circ, x_n$ و $d(f(x_i), (x_{i+\text{۱}})) < \epsilon$ برای هر $i = \circ, \text{۱}, \cdots, n - \text{۱}$.

مجموعه ی همه ی نقاط زنجیر بازگشتی را مجموعه ی زنجیر بازگشتی f خوانند وبا $CR(f)$ نشان می دهند، یعنی

$$CR(f) = \{p \in X \mid \text{برای هر } \epsilon > \circ \text{، یک } \epsilon \text{ ـزنجیر از } p \text{ به خودش وجود دارد}\}$$

لم ۲۳.۱.۱ $CR(f)$ مجموعه ای بسته است.

برهان . فرض کنیم $p \in \overline{CR(f)}$. چون f پیوسته است برای هر $\epsilon > 0$ وجود دارد $\delta > 0$ای که $\delta < \epsilon$ و اگر $d(p,q) < \delta$ آنگاه $d(f(p),f(q)) < \frac{\epsilon}{2}$. چون $p \in \overline{CR(f)}$ دنباله‌ای مانند (p_n) از نقاط $CR(f)$ موجود است که $p_n \to p$. بنابراین عددی طبیعی مانند $n_0 > 0$ وجود دارد که اگر $n \geq n_0$ آنگاه $d(p_n,p) < \delta$. از آنجا که $p_{n_0} \in CR(f)$، عدد صحیح مثبت $m \in \mathbb{Z}_+$ و نقاط $p^0_{n_0}, p^1_{n_0}, \cdots, p^{n-1}_{n_0}, p^m_{n_0}$ وجود دارد که $p_{n_0} = p^m_{n_0} = p^0_{n_0}$ و $d(f(p^i_{n_0}), p^{i+1}_{n_0}) < \frac{\epsilon}{2}$. حال داریم

$$d(f(p),p^1_{n_0}) \leq d(f(p),f(p_{n_0})) + d(f(p_{n_0}),p^1_{n_0}) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

و

$$d(f(p^m_{n_0}),p) \leq d(f(p^m_{n_0}),p_{n_0}) + d(p_{n_0},p) < \epsilon$$

پس $p, p^1_{n_0}, \cdots, p^m_{n_0}, p$ یک $\epsilon-$ زنجیر از p به خودش می باشد و بنابراین $p \in CR(f)$، یعنی $CR(f)$ بسته است. □

فرض کنیم M یک منیفلد فشرده و $f : M \longrightarrow M$ یک دیفیومورفیسم روی M باشد.
فرض کنیم $p,q \in M$. برای هر $\epsilon > 0$ رابطه ی هم ارزی R روی $CR(f)$ تعریف می کنیم به این ترتیب که pRq در صورتی که یک ϵ ـزنجیر از p به q ویک ϵ ـزنجیر از q به p وجود داشته باشد. رده های هم ارزی این رابطه ی هم ارزی را مؤلفه‌های زنجیری خوانند. مولفه ی زنجیری شامل p از f را با $C_f(p)$ نشان می دهیم.

لم ۲۴.۱.۱ مؤلفه های زنجیری $C_f(p)$ فشرده و پایا می باشند و قابل تجزیه به دو مجموعه ی فشرده، پایا و مجزا نیستند.

برهان . چون مؤلفه ها بسته اند پس فشرده می باشند. به علاوه اگر $q \in C_f(p)$ آنگاه یک ϵ ـزنجیر $\{p = p_0, p_1, \cdots, p_n = q\}$ وجود دارد. بنابراین $\{p, p_0, p_1, \cdots, p_n = q, f(q)\}$ یک ϵ ـزنجیر از p به $f(q)$ است. به علاوه به خاطر فشردگی M و در نتیجه پیوستگی

یکنواخت f برای هر $\epsilon > 0$ عددی مانند $\frac{\epsilon}{2} > \delta > 0$ وجود دارد به طوری که اگر $d(x,y) < \delta$ آنگاه $d(f(x),f(y)) < \frac{\epsilon}{2}$. چون $q \in C_f(p)$، یک δ ـزنجیر از q به p مانند $\{q = x_0, x_1, \cdots, x_m = p\}$ موجود است. بنابراین $\{f(q), f(x_1), \cdots, f(p)\}$ یک $\frac{\epsilon}{2}$ ـزنجیر از $f(q)$ به $f(p)$ می باشد. از $d(f^2(q), f(x_1)) < \frac{\epsilon}{2}$ و $d(f(x_1), x_2) < \delta < \frac{\epsilon}{2}$ نتیجه می گردد $d(f^2(q), x_2) < \epsilon$ پس $\{f(q), x_2, x_3, \cdots, x_m = p\}$ یک ϵ ـزنجیر از $f(q)$ به p است. بنابراین مؤلفه ها پایا می باشند.

بالاخره یک مؤلفه ی زنجیری نمی تواند به دو مجموعه ی فشرده ی پایا و مجزا تجزیه شود زیرا اگر $C_f(p)$ به صورت اجتماع دو مجموعه ی فشرده، پایا و مجزای A و B باشد و فرض کنیم $p \in A$، آنگاه برای هر $q \in B$، مدار مثبت q در داخل B باقی می ماند ولی اگر یک ϵ ـزنجیر از q به p وجود داشته باشد و ϵ به اندازه ی کافی کوچک باشد به خاطر پیوستگی یکنواخت، بایستی مدار q در امتداد زنجیر حرکت کند واز B خارج شود که تناقض است. $\square$

تعریف ۲۵.۱.۱ دیفیومورفیسم f روی منیفلد M را متعدی خوانیم در صورتی که نقطه ای مانند $p_0 \in M$ وجود داشته باشد که مدار آن تحت f در M چگال باشد.

تعریف ۲۶.۱.۱ فرض کنیم f یک دیفیومورفیسم روی منیفلد M است. زیر مجموعه ی پایا A ازM را متعدی زنجیری خوانند در صورتی که برای هر دونقطه ی p وq در A و هر $\epsilon > 0$، یک ϵ ـمدار نما با نقطه ی شروع p و نقطه ی پایان q وجود داشته باشد، یعنی یک دنباله ی متناهی مانند $\{p = x_0, x_1, \cdots, x_n = q\}$ به طوری که $d(f(x_i), f(x_{i+1})) < \epsilon$ برای $0 \leq i \leq n-1$. این دنباله‌ی $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ را یک ϵ ـزنجیر واصل p وq در A خوانند.

تعریف ۲۷.۱.۱ زیر مجموعه ی R از M را مانده ای خوانیم در صورتی که شامل اشتراکی شمارا از زیرمجموعه های باز و چگال باشد. ویژگی P در یک فضای متریک X را ژنریک خوانیم اگر زیرمجموعه ای مانده ای مانند R از X وجود داشته باشد که هر $y \in R$ ویژگی P را دارا باشد. چنین مجموعه ی مانده ای را یک مجموعه ی ژنریک خوانند.

تعریف ۲۸.۱.۱ فرض کنیم f یک دیفیومورفیسم روی یک منیفلد فشرده ی M باشد و فرض کنیم $\Lambda \subseteq M$ یک مجموعه ی بسته f ـپایا باشد. گوئیم زیر مجموعه ی Λ از M موضعاً بیشین در U است در صورتی که یک همسایگی فشرده U از Λ موجود باشد که $\Lambda = \cap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U)$.

تعریف ۲۹.۱.۱ یک زیر مجموعه مانندΛ از M را C^1 ـپایدار ـسایه ای خوانیم در صورتی که

۱) در یک همسایگی فشرده مانند U مجموعه‌ی Λ موضعاً بیشین باشد و

۲) یک C^1 ـهمسایگی $\mathcal{U}(f)$ از f وجود داشته باشد به طوری که برای هر $g \in \mathcal{U}(f)$، $g\mid_{\Lambda_g}$ خاصیت سایه ا ی داشته باشد جایی که $\Lambda_g = \cap_{n\in\mathbb{Z}} g^n(U)$.

مجموعه ی Λ_g پیوستار Λ نامیده می شود. بویژه اگر $\Lambda = M$، به طور ساده گفته می شود f، C^1 ـپایدار ـسایه ای است.

تعریف ۳۰.۱.۱ فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک و $f: X \longrightarrow X$ یک همسانریختی باشد. فرض کنیم $P = \{\epsilon : X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \mid$ پیوسته است $\epsilon\}$. زیر مجموعه ی باز ناتهی U از X جمع کننده ضعیف برای f است در صورتی که یک نگاشت $\epsilon \in P$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in U$، $\overline{B_{\epsilon(f(x))}(f(x))} \subseteq U$. وقتی U جمع کننده ضعیف است، مجموعه ی $A = \cap_{n\geq 0} \overline{f^n(U)}$ را جاذب ضعیف مشخص شده توسط U خوانیم. برای $\epsilon \in P$ دنباله ی $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ را یک $\epsilon(x)$ ـزنجیر خوانیم در صورتی که $d(f(x_j), x_{j+1}) < \epsilon(f(x_j))$ برای $0 \leq j \leq n-1$. عدد n طول ϵ ـزنجیر نامیده می شود. نقطه ی p قویاً زنجیر بازگشتی برای f است اگر برای هر $\epsilon \in P$، یک $\epsilon(x)$ ـزنجیر با طول حداقل ۱ با نقطه ی شروع و پایان p موجود باشد. مجموعه ی همه ی نقاط قویاً زنجیر بازگشتی f را با $CR^+(f)$ نشان می دهیم.
یک مجموعه ی جمع کننده ضعیف یک قطعه ی جاذب نیز نامیده می شود.

لم ۳۱.۱.۱ مجموعه ی U قطعه ی جاذب است اگر و فقط اگر $\overline{f(U)} \subseteq U$.

برهان . اگر مجموعه ی U قطعه ی جاذب باشد آنگاه $\epsilon \in P$ ای موجود است که $B_{\epsilon(f(x))}(f(x)) \subset U$، و بنابراین $f(U) \subset U$. حال اگر y یک نقطه ی حدی $f(U)$ باشد آنگاه یک دنباله مانند (x_n) در U وجود دارد که $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \longrightarrow y$. می توان n را به قدر کافی بزرگ در نظر گرفت که $d(f(x_n), y) < \epsilon(f(x_n))$. بنابراین $y \in B_{\epsilon(f(x_n))}(f(x_n))$ پس $y \in U$ واین یعنی $\overline{f(U)} \subseteq U$.
برعکس فرض کنیم $\overline{f(U)} \subseteq U$. قرار می دهیم

$$\epsilon(x) = \frac{d(x, \overline{f(U)}) + d(x, X \setminus U)}{۲}$$

حال اگر برای $x \in U$ ی داشته باشیم $y \in \overline{B_{\epsilon(f(x))}(f(x))}$ و اگر $y \in B_{\epsilon(f(x))}(f(x))$ آنگاه

$$d(y, f(x)) < \frac{d(f(x), \overline{f(U)}) + d(f(x), X \setminus U)}{۲} = \frac{d(f(x), X \setminus U)}{۲}.$$

در نتیجه $y \in U$. به علاوه اگر y نقطه ی حدی $B_{\epsilon(f(x))}(f(x))$ باشد آنگاه دنباله ای ازعناصر مانند (y_n) در $B_{\epsilon(f(x))}(f(x))$ موجود است که $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. بنابراین عدد طبیعی مانند $n_۰$ موجود است که برای هر $n \geq n_۰$، $d(y, y_n) < \frac{\epsilon(f(x))}{۳}$. پس داریم

$$d(y, f(x)) \leq d(y, y_{n_۰}) + d(y_{n_۰}), f(x)) \leq \frac{d(f(x), \overline{f(U)}) + d(f(x), X \setminus U)}{۲ * ۳} + \frac{d(f(x), X \setminus U)}{۲}$$

$$= \frac{۲}{۳} d(f(x), X \setminus U))$$

در نتیجه $y \in U$. □

تعریف ۳۲.۱.۱ در فضاهای غیر فشرده حوضچه ی یک جاذب ضعیف A وابسته به U عبارتست از مجموعه ی باز $\cup_{n\geq ۰} f^{-n}(U)$، و با نماد $B(A, U)$ نمایش داده می شود.
مشابه لم ۱۸.۱.۱ هر نقطه از $B(A; U)$ یک مجموعه امگا ـحدی دارد که در A قرار گرفته است.
فشردگی فضا شرط لازم برای مستقل بودن $B(A; U)$ از U می باشد.
به عنوان مثال دو مجموعه ی $U, U' \subseteq \mathbb{R}^۲$ به صورت $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^۲; ۰ < x < ۱\}$ و

$U' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲; -۱ < x < ۰\}$ را در نظر می گیریم. برای نگاشت $f : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}^۲$ با ضابطه ی $f(x,y) = (\frac{x}{۲}, y)$ داریم $A = \cap_{n\geq ۰}\overline{f^n(U)} = \cap_{n\geq ۰}\overline{f^n(U')} = \{(۰,y) : y \in \mathbb{R}\}$ در حالی که $\cup_{n\geq ۰} f^{-n}(U) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲; x > ۰\}$ و $\cup_{n\geq ۰} f^{-n}(U') = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲; x < ۰\}$ که بیانگر این مطلب است که$B(A;U)$ وابسته به U می باشد. بنابراین برای جاذب ضعیف A، مفهوم حوضچه ی توسیع یافته $B(A)$ را به صورت اجتماع مجموعه ی $B(A,U)$ که U روی مجموعه ی همه ی قطعه ی جاذب هایی که A را مشخص می کند، تعریف می کنیم.

تعریف ۳۳.۱.۱ برای $p \in M$، مدار مثبت p را بانماد $O_f^+(p)$ در نظر گرفته و قرار می‌دهیم $K^+(p) = \overline{O_f^+(p)}$. M را پایدار لاگرانژ برای f خوانیم در صورتی که برای هر $p \in M$ مجموعه‌ی $K^+(p)$ فشرده باشد. در فضاهای متریک چون مجموعه ها ی فشرده کراندار هستند، پایدار لاگرانژی ایجاب می کند که $O_f^+(p)$ کراندار است.

تعریف ۳۴.۱.۱ فرض کنیم Λ یک زیر مجموعه ی f ـپایا از M باشد. گوئیم Λ یک تجزیه‌ی مسلط دارد اگر $T_\Lambda M$ یک تجزیه Df ـپایای پیوسته به صورت $E \oplus F$ داشته باشد به طوری که ثابتهای $C > ۰$ و $۰ < \lambda < ۱$ موجود باشند که برای هر $x \in \Lambda$ وهر $n \geq ۰$

$$\| Df^n |_{E(x)}\| \cdot \| Df^{-n} |_{F(f^n(x))}\| \leq C\lambda^n$$

تعریف ۳۵.۱.۱ فرض کنیم $f \in Diff^۱(M)$، Λ یک مجموعه ی فشرده ی f ـپایا، $T_\Lambda M = E \oplus F$ یک تجزیه ی Df ـپایا ی پیوسته باشد و $\lambda \in (۰,۱)$. مدار $\{x, f(x), \cdots, f^n(x)\}$ در Λ یک ریسمان λ ـشبه هذلولوی مربوط به تجزیه ی $E \oplus F$ نامیده می شود در صورتی که شرطها ی زیر برقرار باشند

۱) $\prod_{i=0}^{k-1} \| df \mid_{E(f^i(x))} \| \leq \lambda^k$ برای $k = 1, 2, \cdots, n$

۲) $\prod_{i=k-1}^{n-1} m(Df \mid_{F(f^i(x))}) \geq \lambda^{k-n-1}$ برای $k = 1, 2, \cdots, n$

۳) $\frac{\|Df|_{E(f^i(x))}\|}{m(Df|_{F(f^i(x)})} \leq \lambda^2$ برای $k = 1, 2, \cdots, n-1$

جایی که $m(A) = \inf\{\| Av \| : \| v \| = 1\}$.

تعریف ۳۶.۱.۱ برای $p \in M$ تابع $\exp_p : T_pM \longrightarrow M$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\exp_p(v_p) = \gamma_{v_P}(1)$$

جایی که γ_{v_P} ژئودزیکی (منحنی با مینیمم فاصله) است که $\gamma_{v_p}(0) = p$ و $\gamma'_{v_p}(0) = v_p$.