

**دانشگاه صنعتی امیرکبیر**  
( پلی تکنیک تهران )

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر  
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد  
آنالیز عددی

عنوان:

# روش چند قطبی سریع المان‌های مرزی برای حل معادلات با مشتقات جزئی

دانشجو:

داود میرزائی

استاد راهنما:

دکتر مهدی دهقان

استاد مشاور:

دکتر حجت‌اله ادیبی

دی ماه ۱۳۸۶



تاریخ :  
پیوست :

فرم اطلاعات پایان نامه  
کارشناسی ارشد و دکترا  
( پلی تکنیک تهران )

دانشگاه صنعتی امیر کبیر  
معاونت پژوهشی

نام و نام خانوادگی : داود میرزائی  دانشجوی آزاد  بورسیه  معادل

شماره دانشجویی : ۸۴۱۱۳۰۳۶ دانشکده : ریاضی و علوم کامپیوتر رشته تحصیلی : ریاضی کاربردی

نام و نام خانوادگی استاد راهنما : دکتر مهدی دهقان

عنوان پایان نامه به فارسی : روش چندقطبی سریع المان‌های مرزی برای حل معادلات با مشتقات جزئی  
عنوان پایان نامه به انگلیسی : Fast multipole boundary element method for solving PDEs.

نوع پروژه :  کارشناسی ارشد :  کاربردی  بنیادی  توسعه ای  نظری   
 دکتری

تاریخ شروع : ۸۵/۰۷/۰۱ تاریخ خاتمه : ۸۶/۱۰/۲۶ تعداد واحد : ۶

سازمان تأمین کننده اعتبار :

واژه های کلیدی به فارسی : معادلات با مشتقات جزئی وابسته به زمان و مستقل از زمان؛ معادلات با مشتقات جزئی غیرخطی، روش المان‌های مرزی، جواب اساسی، روش دوگان متقابل، روش چندقطبی سریع، روش معادله انتگرال موضعی مبتنی بر روش بدون شبکه، جواب همراه.

**Keywords:** Time dependent and time independent PDEs, Nonlinear PDEs, Boundary element method, Fundamental solution, Dual reciprocity method, Fast multipole method, Meshless local boundary integral equation method, Companion solution.

نظرها و پیشنهادهای به منظور بهبود فعالیتهای پژوهشی دانشگاه :

استاد راهنما : دکتر مهدی دهقان

دانشجو : داود میرزائی

امضاء استاد راهنما : تاریخ :

نسخه ۱ : معاونت پژوهشی

نسخه ۲ : کتابخانه و به انضمام دوجلد پایان نامه به منظور تسویه حساب با کتابخانه و مرکز اسناد و مدارک علمی

تقدیم به

پدر

و

مادر

مهربانم

## تقدیر و تشکر

اکنون که با یاری خداوند متعال این مرحله از تحصیل خود را به اتمام رسانده‌ام بر خود لازم می‌دانم زحمات بزرگوارانی که اینجانب را یاری نموده‌اند ارج نهاده و از استاد محترم جناب آقای دکتر مهدی دهقان که راهنمایی‌های ارزشمندشان راهگشای اینجانب در نگارش این پایان‌نامه بوده، تشکر و قدردانی نمایم. همچنین از جناب آقای دکتر حجت‌اله ادیبی که استاد مشاور این پایان‌نامه بودند قدردانی نموده و از جناب آقایان دکتر کمال شاه نظری و دکتر حسن قاسمی که مطالعه و داوری این پایان‌نامه را تقبل فرمودند تشکر می‌نمایم. از تمامی دوستانم مخصوصاً اکبر، مجید و حسین که در تمام این مدت همراه و همگام من بودند نیز قدردانی می‌نمایم و برایشان آرزوی موفقیت در تمامی مراحل زندگی را دارم.

## چکیده

در این پایان نامه ابتدا روش المان‌های مرزی ( $BEM$ ) مورد بررسی قرار می‌گیرد و تقریب‌های مختلف روی المان‌ها را شرح خواهیم داد. سپس روش دوگان متقابل المان‌های مرزی را ارائه خواهیم داد. با کمک این روش معادلات بیشتری از قبیل معادلات ناهمگن و غیر خطی تحت پوشش روش المان‌های مرزی قرار خواهند گرفت. در ادامه روش چند قطبی سریع المان‌های مرزی را مطالعه خواهیم کرد که با کمک آن پیچیدگی محاسباتی روش المان‌های مرزی از  $O(N^3)$  به  $O(N)$  کاهش پیدا خواهد کرد. در نهایت ترکیب جدید و جالبی از روش معادله انتگرال مرزی ( $BIEM$ ) و روش بدون شبکه کمترین مربعات متحرک ( $MLS$ ) تحت عنوان روش معادله انتگرال مرزی موضعی مبتنی بر روش بدون شبکه ارائه خواهد شد و روش حل مسائل مختلف با آن بررسی می‌شود.

### لغات کلیدی :

معادلات با مشتقات جزئی وابسته به زمان و مستقل از زمان، معادلات با مشتقات جزئی غیرخطی، روش المان‌های مرزی، جواب اساسی، روش دوگان متقابل المان‌های مرزی، روش چند قطبی سریع، روش معادله انتگرال موضعی مبتنی بر روش بدون شبکه، جواب همراه.

# فهرست مندرجات

|    |  |       |
|----|--|-------|
| iv | پیش گفتار                                    |       |
| ۱  | تعاریف و مقدمات اولیه                        | ۱     |
| ۱  | قضیه دیورژانس                                | ۱.۱   |
| ۱  | تابع دلتای دیراک                             | ۲.۱   |
| ۲  | انتگرال‌های منفرد                            | ۳.۱   |
| ۵  | شرایط وجود انتگرال نوع CPV در حالت یک بعدی   | ۱.۳.۱ |
| ۷  | شرایط وجود انتگرال نوع CPV در حالت دو بعدی   | ۲.۳.۱ |
| ۸  | روش المان‌های مرزی                           | ۲     |
| ۸  | فرم انتگرال معادله لاپلاس                    | ۱.۲   |
| ۹  | معادله انتگرال برای نقاط درونی               | ۱.۱.۲ |
| ۱۰ | معادله انتگرال برای نقاط مرزی                | ۲.۱.۲ |
| ۱۴ | اعمال روش المان‌های مرزی روی معادله لاپلاس   | ۲.۲   |
| ۱۵ | روش المان‌های ثابت                           | ۱.۲.۲ |
| ۱۶ | محاسبه انتگرال‌های حالت المان‌های ثابت       | ۲.۲.۲ |
| ۱۹ | اعمال شرایط مرزی و دستگاه معادلات خطی نهایی  | ۳.۲.۲ |
| ۲۱ | المان‌های خطی پیوسته                         | ۴.۲.۲ |
| ۲۲ | محاسبه انتگرال‌های حالت المان‌های خطی پیوسته | ۵.۲.۲ |

|    |  |       |  |
|----|--|-------|--|
| ۲۶ | ..... اعمال شرایط مرزی و دستگاه معادلات خطی نهایی    | ۶.۲.۲ |  |
| ۳۰ | ..... روش المان های خطی ناپیوسته                     | ۷.۲.۲ |  |
| ۳۳ | ..... محاسبه انتگرال های حالت المان های خطی ناپیوسته | ۸.۲.۲ |  |
| ۳۵ | ..... اعمال شرایط مرزی و دستگاه معادلات خطی نهایی    | ۹.۲.۲ |  |
| ۳۶ | ..... جواب های پایه ای دیگر                          | ۳.۲   |  |
| ۳۶ | .....  | ۱.۳.۲ |  |
| ۳۷ | ..... معادله پخش-واکنش                               | ۲.۳.۲ |  |
| ۳۹ | ..... معادله پخش-انتقال-واکنش                        | ۳.۳.۲ |  |
| ۳۹ | ..... معادله هلمهولتز                                | ۴.۳.۲ |  |
| ۴۰ | ..... مثال های عددی                                  | ۴.۲   |  |
| ۴۶ | ..... روش دوگان متقابل المان های مرزی                | ۳     |  |
| ۴۶ | ..... روش دوگان متقابل                               | ۱.۳   |  |
| ۵۱ | ..... مثال های عددی                                  | ۲.۳   |  |
| ۶۱ | ..... روش چند قطبی سریع المان های مرزی               | ۴     |  |
| ۶۱ | ..... روش المان های مرزی متداول                      | ۱.۴   |  |
| ۶۲ | ..... فرمول بندی روش چند قطبی سریع                   | ۲.۴   |  |
| ۶۳ | ..... بسط چند قطبی (گشتاورها)                        | ۱.۲.۴ |  |
| ۶۴ | ..... تبدیل گشتاور به گشتاور (M2M)                   | ۲.۲.۴ |  |
| ۶۵ | ..... بسط موضعی و تبدیل M2L                          | ۳.۲.۴ |  |
| ۶۶ | ..... تبدیل L2L                                      | ۴.۲.۴ |  |
| ۶۶ | ..... بسط انتگرال با هسته $q^*$                      | ۵.۲.۴ |  |
| ۶۷ | ..... الگوریتم FM-BEM                                | ۶.۲.۴ |  |
| ۷۰ | ..... تخمین هزینه محاسباتی                           | ۷.۲.۴ |  |
| ۷۲ | ..... مثال عددی                                      | ۳.۴   |  |

|    |  |       |
|----|--|-------|
| ۷۴ | روش معادله انتگرال مرزی موضعی مبتنی بر روش بدون شبکه | ۵     |
| ۷۵ | معرفی روش  | ۱.۵   |
| ۷۵ | معادله انتگرال مرزی موضعی                            | ۱.۱.۵ |
| ۷۸ | مختصری در مورد روش کمترین مربعات متحرک               | ۲.۱.۵ |
| ۸۱ | پیاده‌سازی روش                                       | ۳.۱.۵ |
| ۸۲ | محاسبه انتگرال‌های مرزی و دامنه‌ای                   | ۴.۱.۵ |
| ۸۳ | مثال‌های عددی  | ۲.۵   |
| ۹۰ | نتیجه‌گیری   |       |
| ۹۱ | واژه‌نامه  |       |



## پیشگفتار

در طول سه دهه اخیر روش المان‌های مرزی به یکی از روش‌های جالب و کارا در حل معادلات پتانسیل و کشش و کرنش تبدیل شده است. مزیت اصلی این روش نسبت به دیگر روش‌های تجزیه دامنه، مانند روش المان‌های محدود و روش تفاضلات متناهی، حل معادله روی مرز می‌باشد که باعث می‌شود مسئله در یک بعد پایین‌تر حل شود. این حسن که حسن بسیار بزرگی است باعث شده است محققین زیادی در رشته‌های ریاضی و مهندسی به این روش بپردازند تا جایی که مجله علمی معتبری نیز به نام همین روش موجود است<sup>۱</sup>. در این رساله به معرفی این روش و ترکیب آن با روش‌های دیگر می‌پردازیم. فصل بندی پایان نامه به صورت زیر می‌باشد:

بعد از اینکه در فصل اول مقدمات اولیه را بیان کردیم در فصل دوم روش المان‌های مرزی را شرح خواهیم داد و انواع تقریب‌ها روی المان‌ها را بررسی می‌کنیم و در نهایت با ارائه چند مثال کارایی آن را تصدیق می‌نماییم.

گفتیم در این روش معادله روی مرز حل می‌شود. برای انتقال معادله دیفرانسیل به معادله انتگرال روی مرز نیاز به یک جواب پایه‌ای (اساسی) داریم. اما آیا این جواب برای همه عملگرهای دیفرانسیل وجود دارد. به وضوح پاسخ منفی است یعنی همه معادلات به مرز انتقال نمی‌یابند، همچنین انواع معادلات ناهمگن و غیرخطی نیز وجود دارد که در مورد آن‌ها نیز مشکل ذکر شده وجود دارد. این مشکل تا حدودی در فصل سوم و با ارائه ترکیبی از روش المان‌های مرزی و روش دوگان متقابل مرتفع می‌شود. جایی که در آن به کمک یک ایده بسیار ساده و در عین حال کارا قسمت‌های ناهمگن و غیرخطی معادله را نیز روی مرز انتقال می‌دهیم.

در فصل چهارم به موضوع جدیدتری می‌پردازیم که نامتقارن و پر بودن ماتریس نهایی روش المان‌های مرزی ما را به این کار وادار می‌کند. در این فصل ترکیبی از روش المان‌های مرزی و روش چندقطبی سریع را بررسی خواهیم کرد که پیچیدگی محاسباتی روش را از  $O(N^3)$  به  $O(N)$  کاهش می‌دهد. این روش در دهه اخیر توجه محققین را به خود جلب کرده است.

در فصل آخر به بررسی یک روش نو دیگر که در سال ۱۹۹۸ ارائه گردیده است می‌پردازیم. این روش تحت عنوان روش معادله انتگرال مرزی موضعی مبتنی بر روش بدون شبکه است که در آن به جای استفاده از معادله انتگرال مرزی سراسری از معادله انتگرال مرزی موضعی، حول نقاط انتخاب شده برای روش بدون

<sup>۱</sup> Engineering Analysis with Boundary Elements, Publisher (Elsevier)

شبکه، استفاده می‌شود. این روش تا به حال کمتر مورد استفاده محققین کشور قرار گرفته است در حالی که در دیگر نقاط دنیا هر روز در حال گسترش است. در اینجا ما برای حل انتگرال‌های منفرد به وجود آمده در روش، از ایده ساده و کارایی استفاده کرده‌ایم که باعث کاهش زمان محاسبات و تولید جواب‌هایی با دقت قابل قبول شده است.

قابل ذکر است که با استفاده از مطالب موجود در این رساله و مطالب جانبی دیگر مقالات [۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴] در زمینه‌های مختلف استخراج شده‌اند.

# فصل ۱

## تعاریف و مقدمات اولیه

در این فصل تعاریف و مقدماتی را که در فصل‌های بعد به آن‌ها نیاز داریم ارائه می‌دهیم.

### ۱.۱ قضیه دیورژانس

فرض کنید  $\Omega$  یک ناحیه منظم با مرز  $\Gamma$  و  $F$  یک تابع برداری پیوسته و مشتق پذیر در هر نقطه  $\Omega$  باشد. قضیه گوس یا دیورژانس<sup>۱</sup> بیان می‌کند

$$\int_{\Omega} \nabla F \, d\Omega = \int_{\Gamma} F \cdot n \, d\Gamma,$$

که در آن  $n$  بردار نرمال عمود بر مرز  $\Gamma$  است که می‌تواند داخلی یا خارجی باشد. قضیه دیورژانس را بیشتر در حالت سه بعدی به کار می‌گیرند و در حالت دو بعدی به آن قضیه استوکس<sup>۲</sup> می‌گویند.

### ۲.۱ تابع دلتای دیراک

دنباله توابع  $f_{\varepsilon}(t)$  را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$f_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & |t| < \varepsilon \\ 0 & |t| > \varepsilon \end{cases}$$

اگر حد نقطه‌ای توابع بالا وقتی  $\varepsilon \rightarrow 0$  را با  $\delta(t)$  نشان دهیم که به تابع دلتای دیراک<sup>۳</sup> مشهور است. یعنی داریم

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} f_{\varepsilon}(t),$$

---

<sup>۱</sup> Divergence

<sup>۲</sup> Stokes

<sup>۳</sup> Dirac delta function

که در نقطهٔ صفر مقدار بینهایت و در بقیه نقاط مقدار آن صفر است. در مورد تابع دلتای دیراک رابطهٔ زیر همواره برقرار است

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\varepsilon}(t) dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} dt = 1,$$

و نیز به ازای هر تابع  $u(t)$  که در نقطهٔ صفر پیوسته باشد داریم

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)u(t) dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\varepsilon}(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} u(t) dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} [u(t) - u(0)] dt + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(0)}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dt = 0 + u(0) = u(0). \end{aligned}$$

وقتی  $\varepsilon \rightarrow 0$  به تبع آن  $t \rightarrow 0$  و چون  $u(t)$  در صفر پیوسته است  $u(t) \rightarrow u(0)$  و حد اول صفر می‌شود.

### ۳.۱ انتگرال‌های منفرد

در اینجا انتگرال‌هایی که مقدار انتگرال ده آن‌ها در یک یا چند نقطه در دامنهٔ انتگرال‌گیری به سمت بینهایت میل می‌کند را انتگرال‌های منفرد می‌گوییم. در این حالت اگر مقدار انتگرال به یک عدد متناهی میل کند می‌گوییم انتگرال وجود دارد. در حالت کلی انتگرال‌های منفرد را با در نظر گرفتن یک ناحیهٔ کوچک شامل نقطهٔ منفرد و به دست آوردن حد انتگرال با کوچکتر کردن ناحیهٔ مذکور به صورت

$$\int_D f dv = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D-D_{\varepsilon}} f dv, \quad (1)$$

مورد بررسی قرار می‌دهیم. در حالت یک بعدی  $D_{\varepsilon}$  یک بازه و در حالت دو بعدی یک دایره به شعاع  $\varepsilon$  و در حالت سه بعدی یک کره به شعاع  $\varepsilon$  می‌باشد.

اگر حد انتگرال بالا تحت هیچ شرایطی وجود نداشته باشد می‌گوییم انتگرال واگرا است و منفرد بودن را از نوع قوی<sup>۱</sup> می‌نامیم. اگر حد انتگرال (۱)، مستقل از اینکه  $\varepsilon$  چگونه به سمت صفر میل کند، وجود داشته باشد می‌گوییم انتگرال به صورت ناسره<sup>۲</sup> وجود دارد و منفرد بودن را از نوع ضعیف<sup>۳</sup> می‌نامیم. اگر حد انتگرال، بسته به اینکه  $\varepsilon$  چگونه به سمت صفر میل کند، وجود داشته باشد می‌گوییم انتگرال دارای مقدار اساسی کوشی (CPV)<sup>۴</sup> می‌باشد که در ادامه در مورد آن بحث می‌کنیم. بنابراین سه حالت مختلف از انتگرال‌های منفرد وجود دارد: اول انتگرال‌های منفرد قوی که انتگرال واگرا خواهد بود. دوم انتگرال‌های منفرد ضعیف که مقدار انتگرال به صورت ناسره وجود دارد و سوم انتگرال‌هایی که دارای مقدار اساسی کوشی هستند.

<sup>۱</sup> strong singularity

<sup>۲</sup> improper

<sup>۳</sup> weak singularity

<sup>۴</sup> Cauchy Principal Value

مثال از یک انتگرال واگرا

انتگرال زیر را در نظر بگیرید

$$I = \int_{-a}^b \frac{1}{|x|} dx,$$

بنابراین با توجه به (۱) داریم

$$I = \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0} \left( \int_{-a}^{-\varepsilon_1} \frac{1}{|x|} dx + \int_{\varepsilon_2}^b \frac{1}{|x|} dx \right) = \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0} [-\ln \varepsilon_1 + \ln a + \ln b - \ln \varepsilon_2] = \infty,$$

بنابراین این انتگرال واگرا می‌باشد.

مثال از یک انتگرال ناسره

انتگرال زیر را در نظر بگیرید

$$I = \int_{-a}^b \ln |x| dx, \quad a > 0, \quad b > 0,$$

برای به دست آوردن مقدار این انتگرال با توجه به نقطه منفرد صفر داریم

$$I = \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0} \left( \int_{-a}^{-\varepsilon_1} \ln |x| dx + \int_{\varepsilon_2}^b \ln |x| dx \right),$$

با انتگرال گیری جزء به جزء و بعد از محاسباتی ساده داریم

$$I = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} [-\varepsilon_1 \ln \varepsilon_1 + \varepsilon_1 - (-a \ln a + a)] + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} [b \ln b - b - (\varepsilon_2 \ln \varepsilon_2 - \varepsilon_2)],$$

و با توجه به اینکه  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \varepsilon = 0$  داریم

$$I = a \ln a + b \ln b - (a + b).$$

انتگرال بالا یک انتگرال ناسره است همچنین می‌توان نشان داد انتگرال زیر نیز ناسره است:

$$I = \int_{-a}^b \frac{1}{|x|^k} dx, \quad 0 < k < 1.$$

مثال از یک انتگرال با مقدار اساسی کوشی

انتگرال زیر را در نظر بگیرید

$$I = \int_{-a}^b \frac{1}{x} dx,$$

باز هم با توجه به (۱) داریم

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0} \left( \int_{-a}^{-\varepsilon_1} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon_2}^b \frac{1}{x} dx \right) = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} [\ln|x|]_{-a}^{-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} [\ln|x|]_{\varepsilon_2}^b \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} [\ln \varepsilon_1 - \ln a] + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} [\ln b - \ln \varepsilon_2] = \ln \frac{a}{b} + \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0} \ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \end{aligned}$$

این انتگرال یک انتگرال ناسره نیست چرا که حد آخر همواره وجود ندارد. اما در حالت‌هایی خاص مثلاً وقتی  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$  حد آخر صفر می‌شود و می‌گوییم انتگرال دارای مقدار اساسی کوشی  $\ln a/b$  می‌باشد. حالت‌های مختلف دیگری را نیز می‌توان برای انتخاب  $\varepsilon_1$  و  $\varepsilon_2$  در نظر گرفت مثلاً با فرض  $\varepsilon_1 = c\varepsilon_2$  نیز مقدار انتگرال وجود خواهد داشت. اما برای یکدست شدن محاسبات فرض می‌کنیم در این حالت همواره  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ . انتگرال‌های که دارای CPV می‌باشند را با علامت  $\int$  نمایش می‌دهیم و می‌نویسیم

$$I = \int_{-a}^b \frac{1}{x} dx = \ln \frac{a}{b}.$$

انتگرال‌هایی که در روش BEM برای مسائل دوبعدی و روی مرز مسئله پدیدار می‌شوند دارای هسته منفرد قوی  $1/|x| = 1/r$  می‌باشند که در نگاه اول واگرا می‌نمایند اما خوشبختانه در یک تابع کراندار نیز ضرب می‌شوند که به فرم زیر می‌باشند:

$$I = \int_{-a}^b \frac{f(s)}{r} u(s) ds.$$

که نشان می‌دهیم تحت شرایطی دارای مقدار اساسی کوشی خواهند بود. همچنین در BEM گاهی انتگرال‌های دارای CPV به دو قسمت متناسب با دو المان مجاور تقسیم می‌شوند که نقطه منفرد در وسط واقع می‌شود (این حالت زمانی رخ می‌دهد که نقطه هم‌مکانی انتهای المان در نظر گرفته شود مثلاً در تقریب المان‌های خطی پیوسته که بعداً آن را شرح خواهیم داد). در این حالت انتگرال‌ها در طول یک المان به تنهایی وجود ندارد چراکه یک سمت آن‌ها منفرد است:

$$I_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx = -\ln a + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \varepsilon,$$

$$I_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^b \frac{1}{x} dx = +\ln b - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \varepsilon.$$

قسمت نامنفرد این انتگرال‌ها را قسمت متناهی  $\int$  می‌گوییم و با علامت  $\int$  نمایش داده و می‌نویسیم

$$\int_{-a}^{\circ} \frac{1}{x} dx = -\ln a, \quad \int_{\circ}^b \frac{1}{x} dx = \ln b.$$

رابطه بین CPV و انتگرال‌های با قسمت متناهی به صورت زیر است:

$$\int_{-a}^b \frac{1}{x} dx = \int_{-a}^{\circ} \frac{1}{x} dx + \int_{\circ}^b \frac{1}{x} dx.$$

### ۱.۳.۱ شرایط وجود انتگرال نوع CPV در حالت یک بعدی

در اینجا شرایط لازم برای وجود انتگرال‌های CPV در روش المان‌های مرزی را بررسی می‌کنیم. ابتدا تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

۱.۳.۱. تعریف. گوئیم تابع  $u(x)$  در اطراف نقطه  $x'$  در شرط هولدر<sup>۱</sup> صدق می‌کند اگر

$$\exists A > 0, 0 < \alpha \leq 1 : |u(x) - u(x')| \leq A|x - x'|^\alpha.$$

شرط هولدر در حقیقت یک حالت بین پیوستگی و مشتق‌پذیری می‌باشد. حال به بررسی انتگرال‌های CPV در روش المان‌های مرزی برای مسائل دو بعدی می‌پردازیم. گفتیم که این انتگرال‌ها به فرم زیر می‌باشند

$$I = \int_{-a}^b \frac{f(x)}{r} u(x) dx, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad r = |x|, \quad (2)$$

به طوریکه  $f/r$  را هسته و خود  $f$  را تابع مشخصه می‌گوئیم که تابعی نامنفرد بوده و  $u(x)$  نیز تابع چگالی می‌باشد.

۲.۳.۱. قضیه. انتگرال (۲) را در نظر بگیرید. اگر تابع چگالی  $u(x)$  در اطراف نقطه منفرد صفر در شرط هولدر صدق نماید و همچنین  $f'(x)$  در دامنه انتگرال‌گیری کراندار باشد و نیز تابع مشخصه  $f(x)$  در شرط زیر صدق نماید

$$\exists A > 0, 0 < \alpha \leq 1 : |f(\varepsilon) + f(-\varepsilon)| \leq A\varepsilon^\alpha,$$

آنگاه انتگرال (۲) دارای مقدار اساسی کوشی است.

اثبات. انتگرال (۲) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$I = \int_{-a}^b \frac{f(x)}{r} u(x) dx = \int_{-a}^b \frac{f(x)}{r} [u(x) - u(0)] dx + u(0) \int_{-a}^b \frac{f(x)}{r} dx.$$

---

<sup>۱</sup>Hölder condition

چون  $u(x)$  در نقطه صفر در شرط هولدر صدق می‌کند بنابراین انتگرال اول سمت راست به وضوح وجود دارد. حال انتگرال دوم را بررسی می‌کنیم. داریم

$$\int_{-a}^b \frac{f(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-\varepsilon}^{-a} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^b \frac{f(x)}{x} dx \right] = I_1 + I_2.$$

در مورد  $I_1$  به کمک انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم

$$I_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{-a} \frac{f(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \underbrace{\ln(|x|) f(x)}_{I_{11}} \Big|_{-\varepsilon}^{-a} - \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{-a} \ln(|x|) f'(x) dx}_{I_{12}} \right).$$

چون  $f'(x)$  کراندار می‌باشد پس انتگرال  $I_{12}$  وجود دارد. و مقدار  $I_{11}$  نیز به صورت زیر خواهد بود،

$$I_{11} = \ln(a)f(-a) - \ln(\varepsilon)f(-\varepsilon),$$

و اگر  $I_2$  را نیز مانند  $I_1$  محاسبه کنیم در مجموع به حد زیر خواهیم رسید.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\ln(a)f(-a) - \ln(\varepsilon)f(-\varepsilon) + \ln(b)f(b) - \ln(\varepsilon)f(\varepsilon)].$$

حال اگر داشته باشیم

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{-\ln(\varepsilon)[f(\varepsilon) + f(-\varepsilon)]\} = 0,$$

آنگاه  $I$  دارای مقدار متناهی خواهد شد. این رابطه نیز با توجه به اینکه در فرض قضیه داشتیم

$$|f(\varepsilon) + f(-\varepsilon)| \leq A\varepsilon^\alpha, \quad A > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad \varepsilon > 0,$$

به سادگی برقرار می‌باشد. چون در تمام حالت‌های حدگیری با فرض  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$  پیش آمدیم بنابراین انتگرال (۲) دارای مقدار کوشی می‌باشد.

□

به سادگی می‌توان نشان داد اگر وجود داشته باشد  $A > 0$  و  $0 < \alpha < 1$  به طوریکه تابع  $f$  در شرط

$$|f(\varepsilon)| \leq A\varepsilon^\alpha, \quad \varepsilon > 0,$$

صدق کند آنگاه انتگرال (۲) یک انتگرال ناسره خواهد بود و همچنین می‌توان نشان داد اگر وجود داشته باشد  $A > 0$  به طوریکه  $f$  در شرط

$$|f(\varepsilon)| \leq A\varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

صدق کند آنگاه انتگرال (۲) یک انتگرال منظم خواهد بود.



## ۲.۳.۱ شرایط وجود انتگرال نوع CPV در حالت دو بعدی

اکنون انتگرال‌های منفرد تعریف شده در  $\mathbb{R}^2$  را بررسی می‌کنیم. این گونه انتگرال‌ها در روش المان‌های مرزی و در مورد مسائل سه بعدی پدیدار می‌شوند و دارای هسته منفرد از درجه دو ( $1/r^2$ ) هستند. فرم کلی آنها در روش المان‌های مرزی به صورت

$$I(p) = \int_D \frac{f(p, \theta)}{r^2} u(x) dv, \quad (3)$$

می‌باشد که در آن  $r = |x - p|$  و  $D$  یک زیر مجموعه  $\mathbb{R}^2$  است.  $f(p, \theta)/r^2$  هسته انتگرال و  $f(p, \theta)$  تابع مشخصه می‌باشد که در آن قطب و زاویه‌ای است که  $r$  با محور مختصات می‌سازد.  $u(x)$  نیز چگالی انتگرال می‌باشد.

۳.۳.۱ قضیه. انتگرال (۳) را در نظر بگیرید. اگر تابع چگالی  $u(x)$  در اطراف نقطه منفرد  $p$  در شرط هولدر صدق نماید و همچنین تابع مشخصه  $f(p, \theta)$  در شرط

$$\int_0^{2\pi} f(p, \theta) d\theta = 0,$$

صدق کند آنگاه انتگرال (۳) دارای مقدار اساسی کوشی است.

اثبات. انتگرال (۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} \int_D \frac{f(p, \theta)}{r^2} u(x) dv &= \int_{D \cap (r \geq \delta)} \frac{f(p, \theta)}{r^2} u(x) dv \\ &+ \int_{r < \delta} \frac{f(p, \theta)}{r^2} [u(x) - u(p)] dv + u(p) \int_{r < \delta} \frac{f(p, \theta)}{r^2} dv, \end{aligned}$$

که در آن  $\delta$  به گونه‌ای انتخاب می‌شود که  $\{x : |x - p| < \delta\} \subseteq D$ . به وضوح انتگرال اول سمت راست یک انتگرال منظم است چراکه نقطه منفرد در دامنه آن قرار ندارد. اگر تابع چگالی  $u(x)$  حول  $p$  در شرط هولدر صدق کند به وضوح انتگرال دوم نیز وجود خواهد داشت. حال انتگرال سوم را بررسی می‌کنیم، داریم:

$$\int_{r < \delta} \frac{f(p, \theta)}{r^2} dv = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < r < \delta} \frac{f(p, \theta)}{r^2} dv,$$

با توجه به اینکه  $dv = r d\theta dr$  نتیجه می‌گیریم

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < r < \delta} \frac{f(p, \theta)}{r^2} r d\theta dr = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{1}{r} dr \int_0^{2\pi} f(p, \theta) d\theta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \frac{\delta}{\varepsilon} \int_0^{2\pi} f(p, \theta) d\theta = 0.$$

□

در بالا شرایط وجود انتگرال‌های نوع CPV برای حالت خاصی از انتگرال‌ده، که در روش المان‌های مرزی به وجود می‌آید، مورد بررسی قرار گرفت که در فصل‌های بعد به آن‌ها ارجاع داده می‌شود.

## فصل ۲

# روش المان‌های مرزی

### ۱.۲ فرم انتگرال معادله لاپلاس

گیریم  $u(\mathbf{x})$  که از این پس تابع پتانسیل نامیده می‌شود روی ناحیه  $\Omega$  با مرز  $\Gamma$  تعریف شده باشد و روی  $\Omega$  پیوسته و نیز دارای مشتقات جزئی پیوسته باشد همچنین فرض کنید این تابع در معادله پواسن زیر صدق کند:

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}) \quad (1)$$

اگر  $p(\mathbf{x}) = 0$  باشد معادله لاپلاس به دست می‌آید. با فرض اینکه  $u^*$  نیز روی  $\Omega$  پیوسته و دارای مشتقات جزئی پیوسته باشد و با توجه به قضیه دوم گرین<sup>۱</sup> داریم:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [u(\mathbf{z}) \nabla^2 u^*(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - u^*(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \nabla^2 u(\mathbf{z})] d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} \left[ u(\mathbf{y}) \frac{\partial u^*}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}) \right] d\Gamma \end{aligned} \quad (2)$$

حال اگر  $u^*$  را به گونه‌ای انتخاب کنیم که در معادله زیر صدق کند:

$$\nabla^2 u^*(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = -\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}),$$

که در آن  $\delta$  تابع دلتای دیراک می‌باشد در این صورت برای حالت دو بعدی خواهیم داشت:

$$u^*(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = -\frac{1}{2\pi} \ln r,$$

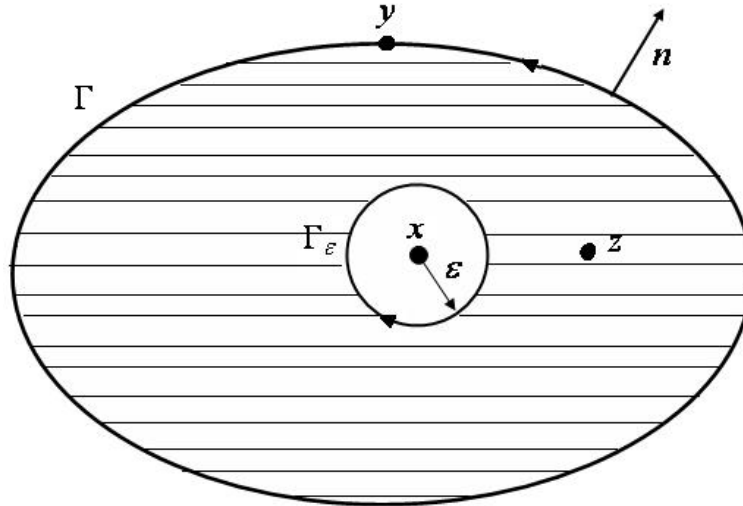
و برای حالت سه بعدی نیز داریم

---

Second Green Theorem<sup>۱</sup>

$$u^*(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \frac{1}{4\pi r},$$

که در آن  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{z}|$  یعنی  $r$  فاصله نقطه هم‌مکانی  $\mathbf{x}$  و نقطه میدانی  $\mathbf{z}$  می‌باشد. در ادامه فرم معادله انتگرال را در دو حالت مورد بررسی قرار می‌دهیم.



شکل ۱.۲: دامنه انتگرال گیری

### ۱.۱.۲ معادله انتگرال برای نقاط درونی

در این حالت با توجه به منفرد بودن تابع  $u^*$  دامنه انتگرال گیری که قرار است قضیه دوم گرین روی آن به کار برده شود را به صورت شکل ۱.۲ (در حالت دو بعدی) در اطراف نقطه تنها (ایزوله)  $\mathbf{x}$  تعریف می‌کنیم. بنابراین دامنه جدید انتگرال گیری  $\Omega - \Omega_\varepsilon$  و مرز جدید  $\Gamma + \Gamma_\varepsilon$  خواهد شد. در ادامه قضیه گرین را می‌توان برای مرز و دامنه جدید به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} u(\mathbf{z}) \nabla^2 u^*(\mathbf{x}, \mathbf{z}) d\Omega &= \int_{\Gamma} \left[ u(\mathbf{y}) \frac{\partial u^*}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}) \right] d\Gamma \\ &\quad - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left[ u(\mathbf{y}) \frac{\partial u^*}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}) \right] d\Gamma, \end{aligned} \quad (3)$$

در این صورت انتگرال سمت چپ (۳) به وضوح صفر خواهد بود چون  $\mathbf{x} \neq \mathbf{z}$  و در نتیجه  $\nabla^2 u^* = 0$ . قسمت اول انتگرال دوم سمت راست معادله (۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u(\mathbf{y}) \frac{\partial u^*}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Gamma_\varepsilon} (u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})) \frac{\partial u^*}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma - u(\mathbf{x}) \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u^*}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma \right].$$

حال با توجه به اینکه منفردی  $\partial u^* / \partial n$  در دو بعد  $[= 1 / (2\pi r)]$  از درجه ۱ و در سه بعد  $[= 1 / (4\pi r^2)]$  از درجه ۲ است بنابراین اگر  $u$  در شرط هولدر صدق کند مقدار انتگرال اول سمت راست معادله بالا صفر خواهد بود. انتگرال دوم نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(\mathbf{x}) \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u^*}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(\mathbf{x}) \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi\varepsilon} \varepsilon d\theta = u(\mathbf{x}).$$

برای حالت سه بعدی نیز می‌توان رابطه مشابهی را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(\mathbf{x}) \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u^*}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(\mathbf{x}) \int_0^{2\pi} \left[ \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \varepsilon^2 \cos(\varphi) d\varphi \right] d\theta \\ &= \frac{u(\mathbf{x})}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \cos(\varphi) d\varphi \right] d\theta = u(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

حال قسمت دوم انتگرال سمت راست معادله (۲) را بررسی می‌کنیم. در حالت دو بعدی داریم:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ -\frac{\ln \varepsilon}{2\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}) d\Gamma \right] = 0,$$

رابطه بالا با توجه به این حقیقت برقرار است که تابع  $\frac{\partial u}{\partial n}$  یک تابع تحلیلی است و مقدار انتگرال آن روی یک مرز بسته برابر صفر است. رفتار مشابهی را نیز می‌توان برای حالت سه بعدی به صورت زیر به دست آورد:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ -\frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}) d\Gamma \right] = 0.$$

بنابراین اگر روابط به دست آمده بالا را در معادله (۳) جایگذاری کنیم، داریم:

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \left[ u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \frac{\partial u^*}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] d\Gamma, \quad \mathbf{x} \in \text{int}(\Omega), \quad \mathbf{y} \in \Gamma. \quad (4)$$

مشاهده می‌شود که رابطه بالا مقدار  $u$  را به ازای هر  $\mathbf{x}$  تنها به انتگرال روی مرز مربوط کرده است. در تمامی روابط بالا فرض بر این بود که نقطه  $\mathbf{x}$  درون ناحیه باشد. اگر  $\mathbf{x}$  روی مرز باشد معادله انتگرال به صورت زیر به دست می‌آید.

## ۲.۱.۲ معادله انتگرال برای نقاط مرزی

وقتی نقطه هم مکانی (نقطه منبع) روی مرز ناحیه باشد روابط قبل را می‌توان با یک سری اصلاحات پیاده‌سازی نمود. در اینجا حالت دو بعدی را بررسی می‌کنیم. حالتی که نقطه هم مکانی روی مرز باشد در شکل ۲.۲ رسم شده است.