بسم الله الرحمن الرحيم

١٥٠٧٠٧

دانشگاه تربیت معلم

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (جبر)

عنوان

مدولهای قویا" گرنشتاین
و
بعدهای گرنشتاین

تدوین

طیبه اویسی فردوی

استاد راهنما

دکتر عبدالجواد طاهری زاده

شهریور ۱۳۸۹

بسمه تعالی

تاریخ:..........................
شماره:.........................
پیوست:........................
واحد:...........................

دانشکده علوم ریاضی
و
کامپیوتر

صورتجلسهٔ دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

جلسهٔ دفـاع از پایان نامه خانم طیبه اویسی فردوی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض تحت عنوان :

مدولهای قویاً گرنشتاین و بعدهای گرنشتاین

در روز شنبه مورخ ۸۹/۶/۲۷ دردانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر تشکیل گردید و نتیجه آزمون به شرح زیر تعیین می گردد. نمره این آزمون

۱۸/۲۵ (هجده و بیست و پنج صدم) می باشد .

۱- عالی ☑
۲- بسیارخوب ☐
۳- خوب ☐
۴- قابل قبول ☐
۵- غیر قابل قبول ☐

استاد راهنما	داور خارجی	داور داخلی
دکترطاهری زاده	دکتراحمد موسوی	دکتر حسین ذاکری

اسمعیل بابلیان
رئیس دانشکده
علوم ریاضی و کامپیوتر

...ایان طالقانی ، بعد از
...بهار ، شماره ۵۹۹ ،
۱۵۶۱۸ :
۷۷۵۰۷...
۷۷۶۰۲۹۸...
...بان شهید بهشتی ، میدان
دانشگاه تربیت معلم ،
: ۳۷۵۵۱ _ ۳۱۹۷۹ ،
۰۲۶۱ _ ۴۵۷۹۶

من که باشم که برآن خاطر عاطر گذرم
لطف‌ها می‌کنی ای خاک درت تاج سرم
دلبرا بنده نوازیت که آموخت بگو
که من این ظن به رقیبان تو هرگز نبرم
همتم بدرقه راه کن ای طاهر قدس
که دراز است ره مقصد و من نو سفرم

تقدیم به:

قلب پرمهر و دستان مهربان
پدر
و
مادرم

تقدیر و سپاس

خداوند مهربان را سپاس می‌گویم که لطفش شامل حالم گردید و فرصتی جهت علم آموزی به من عطا نمود. آرزومندم بتوانم قدردان این نعمت بزرگ بوده و لیاقت دریافت نعمت‌های بیش از پیش خالق مهربان را در خود ایجاد نمایم. برخود واجب می‌دانم ازکلیه عزیزانی که بر من منت نهاده و به نحوی در به ثمر رسیدن این اثر مرا یاری کرده‌اند تشکر و قدردانی نمایم.

بی شک نگارش این پایان‌نامه بدون راهنمایی‌های استاد فرهیخته و بزرگوارم جناب آقای دکتر طاهری‌زاده مقدور و میسر نبود، از زحمات این استاد عزیز وگرانمایه کمال تشکر و امتنان را دارم.

بر خود واجب می‌دانم بوسه به دستان پرلطف پدر و مادر مهربانم زنم و از این دو عزیزکه توانشان رفت تا به توانایی برسم، مویشان سپید گشت تا سپیدروی بمانم، کوشیدند تا بیاسایم، رنج کشیدند تا بیارامم، تشکر کنم. صبر و بردباریشان تکیه‌گاهم و تداوم سایه‌شان آروزیم.

همچنین از خواهر و برادرم که تشویق و مهربانی‌هایشان امیدبخش مسیرم بود تشکر و سپاسگزاری می‌کنم.

از سرکار خانم گلزاری که زحمت تایپ این پایان نامه راکشیدند متشکرم.

در پایان خداوند را به خاطر وجود همهٔ این عزیزان در مسیر زندگیم خالصانه سپاس می‌گویم.

اظهارنامه

مطالب این پایان‌نامه براساس مقالات زیر تنظیم گردیده است:

1) Mahdou, N., Ouarghi, K. Rings over which all (finitely generated) strongly Gorenstein projective modules are projective. Available from ArXiv: Math. AC/0902.223 V1 13 Feb 2009.

2) Mahdou, N., Ouarghi, K. Gorenstein dimensions in trivial ring extensions. J. Commutative Algebra and it's application, Berlin, New York(walter de Gruyter)(2009), 61-68.

چکیده

مدول‌های قویاً گرنشتاین حالتی خاص از مدول‌های گرنشتاین است که توسط دریس بنیس[1] و نجیب محدو[2] در مقاله‌ی مرجع [8] معرفی شده‌اند. در این پایان‌نامه حلقه‌هایی که روی آنها مدول‌های قویاً گرنشتاین تصویری (با تولید متناهی)، تصویری هستند را بررسی می‌کنیم. همچنین به بیان خواص معادل با مدول‌های قویاً گرنشتاین تصویری که تصویری هستند، می‌پردازیم. پس از آن بعد گرنشتاین را روی حلقه‌ی توسیع بدیهی بررسی کرده و انتقال خواص گرنشتاین بین یک حلقه و حلقه توسیع بدیهی‌اش را مطالعه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: مدول‌های (قویاً) گرنشتاین تصویری و یکدست، بعد (گرنشتاین) تصویری، بعد (گرنشتاین) انژکتیو، بعد (گرنشتاین) یکدست، بعد کلی (گرنشتاین)، بعد کلی ضعیف(گرنشتاین)، حلقه‌ی توسیع بدیهی، (n, d)ـحلقه، حلقه شبه‌ـفروبنیوس، حلقه تام، حلقه nـون نیومن منظم.

رده‌بندی موضوعی ریاضی ۲۰۱۰: 13B02، 13D05

1) Driss Bennis 2) Najib Mahdou

مقدمه

جبر جابه‌جایی یکی از شاخه‌های مهم ریاضیات است که نقش اساسی در دیگر شاخه‌های ریاضیات نظیر هندسه‌ی جبری و هندسه‌ی تحلیلی مختلط ایفا می‌کند.

همانند سایر مباحث ریاضی، در جبر جابه‌جایی هم سؤالاتی مطرح می‌شوند که پاسخ دادن به آن‌ها تنها با ابزارهای جبر جابه‌جایی غیرممکن و یا دست کم بسیار دشوار است. از آن جمله می‌توان به حدس کرول[1] [30,Theorem 9.59] اشاره کرد: «اگر حلقه موضعی و نوتری (R, m, k) منظم باشد، آنگاه برای هر $p \in \operatorname{spec}R$، R_p منظم است.» که پس از تلاش فراوان توسط آوسلندر[2] و بوکسبام[3] با استفاده از روش‌های همولوژیکی اثبات شد.

در سال ۱۹۶۰ باس[4] ضمن معرفی حلقه‌های گرنشتاین[5] ثابت کرد که هر حلقه‌ی منظم یک حلقه‌ی گرنشتاین است. در ادامه‌ی کار، آوسلندر و بریدگر[6] در [2,3] ضمن معرفی کلاس جدیدی از مدول‌ها، بعد جدیدی را مطرح ساختند و این کلاس از مدول‌ها را مدول‌های از بعد گرنشتاین صفر نامیدند؛ و ضمن تعریف تحلیل‌های گرنشتاین، بعد گرنشتاین را برای مدول‌های متناهی مولد روی حلقه‌های نوتری جابه‌جایی معرفی نموده و قضیهٔ زیر را ثابت کردند.

قضیه. اگر (R, m, k) یک حلقه‌ی موضعی و نوتری باشد، آن گاه:

۱) R حلقه‌ی گرنشتاین است؛

۲) $G-\dim_R(k) < \infty$؛

۳) برای هر Rـمدول متناهی مولد M، $G-\dim(M) < \infty$.

آن‌ها ضمن بررسی خواص اساسی این کلاس از مدول‌ها، ثابت کردند، [12, ۱۰۱۰۱۱] که کلاس مدول‌های از بعد گرنشتاین صفر توسیع سره‌ای از کلاس مدول‌های تصویری متناهی مولد روی حلقه‌های نوتری است. بنابراین سعی نمودند تا نتایجی که برای بعد تصویری بیان شده است را برای بعد گرنشتاین ثابت کنند.

امّا کار هنوز به پایان نرسیده بود، بعد گرنشتاین فقط روی مدول‌های متناهی مولد مطرح شده بود. بالاخره در سال ۱۹۹۳ ایناکس[7] و جندا[8] کلاس جدید دیگری به نام کلاس گرنشتاین معرفی نمودند که مدول‌های موجود در این کلاس خواصی مشابه با خواص مدول‌های از بعد گرنشتاین صفر داشتند؛ با این تفاوت که دیگر لزومی نداشت

1) Krull 2) Auslander 3) Buchsbaum 4) Bass 5) Gorenstein 6) Bridger 7) Enochs 8) Jenda

مدول‌ها، متناهی مولد باشند. همچنین به صورت مشابه تحلیل گرنشتاین تصویری و بعد گرنشتاین تصویری را معرفی نمودند و ثابت کردند که کلاس مدول‌های گرنشتاین تصویری توسیعی از کلاس مدول‌های از بعد گرنشتاین صفر است. در سال ۲۰۰۰، آوراموف[1] و دیگران ثابت کردند که برای مدول‌های متناهی مولد روی حلقه‌های نوتری، بعد گرنشتاین و بعد گرنشتاین تصویری باهم یکی هستند.

در واقع ایناکس، جندا و تورسیلا[2] در مراجع [15,17,18]، نظریه‌ی آوسلندر و بریدگر را توسعه دادند و سه بعد همولوژی، به نام‌های بعد گرنشتاین تصویری، انژکتیو و یکدست را مطرح کردند، که همه‌ی این‌ها توسط بنیانگذاران این مفهوم‌ها و مؤلفینی نظیر آوراموف، کریستنسن[3]، فاکسبی[4]، هلم[5] فرانکلید[6] و ژو[7] به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفتند. (به [4,12,13,20,22,31]رجوع شود). آن‌ها نشان دادند که این مدول‌های همولوژیک گرنشتاین بسیاری از خواص مدول‌های همولوژیک کلاسیک را دارا هستند.

در سال ۲۰۰۷ بنیس و محدو در مقاله‌ی مرجع [8] مفهوم مدول‌های قویاً گرنشتاین تصویری، انژکتیو و یکدست را معرفی نمودند. آن‌ها ثابت کردند که یک مدول گرنشتاین تصویری (انژکیتو) است اگر و تنها اگر جمعوند مستقیم یک مدول قویاً گرنشتاین تصویری باشد.

همچنین نشان دادند هر مدول گرنشتاین یکدست، جمعوند مستقیم یک مدول قویاً گرنشتاین یکدست است. البته عکس نیز برقرار است. یعنی، هر جمعوند مستقیم یک Rـمدول قویاً گرنشتاین یکدست، گرنشتاین یکدست است. یانگ[8] و لی‌یو[9] نیز در مقاله‌ی مرجع [35] ثابت کردند که مدول M، قویاً گرنشتاین تصویری (انژکتیو و یا یکدست) است اگر و تنها اگر برای هر Rـمدول تصویری (انژکتیو، و یا یکدست) H ، $M \oplus H$ قویاً گرنشتاین تصویری باشد.

کار اصلی ما در این پایان‌نامه بررسی دو مقاله از Mahdouو Ouarghi است، که در آن‌ها به بررسی خواص مدول‌های قویاً گرنشتاین تصویری و بعد گرنشتاین روی یک حلقه خاص پرداخته می‌شود.

در فصل اول این پایان‌نامه ضمن بیان خلاصه‌ای از جبر کلاسیک، گرنشتاین و قویاً گرنشتاین به معرفی چند حلقه‌ی خاص و بیان قضایای مرتبط با آن‌ها می‌پردازیم.

هرچند که در پاره‌ای از موارد ممکن است قضایای موجود نقش چندانی در فصل‌های آتی نداشته باشند امّا با این وجود متناسب با هدف ما در نشان دادن چگونگی تعمیم مطالب از حالت کلاسیک به حالت گرنشتاین انتخاب شده‌اند.

1) Avramov 2) Torecillas 3) Cheristensen 4) Foxby 5) Holm 6) Franklid 7) Xu
8) Yang 9) Liu

در فصل دوم و سوم حلقه‌هایی را بررسی می‌کنیم که خاصیت « همه مدول‌های قویاً گرنشتاین تصویری (با تولید متناهی)، تصویری هستند.» در آنها برقرار است.

فصل‌های چهارم و پنجم این پایان‌نامه به انتقال خواص گرنشتاین و بعد کلی گرنشتاین روی حلقه توسیع بدیهی اختصاص دارد.

مطالب بر اساس مقالات زیر تنظیم گردیده است:

1) Mahdou, N., Ouarghi, K. Rings over which all (finitely generated) strongly Gorenstein Projective modules are Projective. Available from ArXiv: 0902. 2237V1.

2) Mahdou, N., Ouarghi, K. Gorenstein dimensions in trivial ring extensions. J, Commutative Algebra and it's applications, Berlin New York, (Walter de Gruyter)(2009), 61-67.

در مطالعه‌ی این پایان‌نامه لازم است به این نکته توجه شود که سبک ارجاع به مطالب مندرج در متن پایان‌نامه، به شیوه‌ی نگارش فارسی است. به عنوان نمونه برای ملاحظه‌ی قضیه‌ی ۳.۲ باید به فصل ۲، قضیه‌ی ۳ مراجعه شود. امّا شیوه‌ی ارجاع به مراجع لاتین، به همان سبک لاتین است. مثلاً برای ملاحظه‌ی[17, The 2.1] باید به بخش دوم از مرجع شماره [17] مراجعه شود.

فهرست مطالب

فصل اول

تعاریف، مفاهیم و قضایای مورد نیاز

در این فصل، R نشان‌دهنده‌ی حلقه‌ای یکدار و جابه‌جایی است. همچنین تمام Rـمدول‌ها یکانی هستند. این فصل به ارائه‌ی پیشنیازها، تعاریف و مطالبی که در ادامه نیاز است، اختصاص دارد. البته در ارائه‌ی تعاریف و مفاهیم اولیه همواره فرض ما بر این است که خواننده با جبر پیشرفته و تا حدودی جبر همولوژی آشناست. بنابراین بخش عمده‌ای از این فصل به ارائه‌ی مفاهیم مربوط به جبر گرنشتاین اختصاص دارد. همچنین در این فصل به تعریف چند حلقه خاص و قضایای مرتبط با آنها که در فصل‌های آتی مورد نیاز است، می‌پردازیم.

۱-۱ جبر کلاسیک

در این بخش مفاهیمی مختصر از جبر همولوژی کلاسیک و پیشرفته را یادآوری می‌کنیم که خواننده‌ی آشنا با جبر همولوژی و پیشرفته نیازی به مطالعه‌ی آن ندارد.

تعریف ۱.۱. Rـمدول چپ F را آزاد گوییم در صورتی که F با مجموع مستقیم نسخه‌هایی از Rـ مدول چپ R، یکریخت Rـمدول‌ها باشد.

قضیه ۲.۱. [30, Theorem 3.9 and corollary 3.10]اگر F یک مدول آزاد باشد. آنگاه فانکتور $\mathrm{Hom}(F,-)$ دقیق است. (یعنی اگر $\circ \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow \circ$ یک دنبالهی دقیق از Rـ مدولها باشد، آن گاه $\circ \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F,L) \longrightarrow \circ$ یک دنبالهی دقیق از گروههای آبلی است).

تعریف ۳.۱. Rـمدول P را تصویری[1] گوییم، در صورتی که برای هر نمودار

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ N & \xrightarrow{g} & M & \longrightarrow & \circ \end{array}$$

از Rـمدولها و Rـهمریختیها که سطر پایین آن کامل است، یک همریختی Rـمدولها مانند $h : P \longrightarrow N$ وجود داشته باشد به طوری که دیاگرام تکمیل شده جابهجایی باشد. (یعنی، $f = gh$) Rـمدولهای انژکتیو نیز به طور دوگان تعریف میشوند.

گزاره ۴.۱. [1,Proposition 2.19]برای Rـمدول N، گزارههای زیر معادلند:

۱) N یکدست است؛

۲) اگر دنبالهی $\circ \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow \circ$ یک دنبالهٔ دقیق از R ـمدولها باشد آنگاه دنبالهی $\circ \longrightarrow M' \otimes N \longrightarrow M \otimes N \longrightarrow M'' \otimes N \longrightarrow \circ$ دقیق است؛

۳) اگر $f : M' \longrightarrow M$ یک به یک باشد، آنگاه $f \otimes 1 : M' \otimes N \longrightarrow M \otimes N$ یک به یک است؛

۴) اگر $f : M' \longrightarrow M$ یک به یک باشد و M و M' با تولید متناهی باشند، آنگاه $f \otimes 1 : M' \otimes N \longrightarrow M \otimes N$ یک به یک است.

تعریف ۵.۱. یک همبافت[2] مانند A، دنبالهای از مدولها به شکل

$$A = \cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

1) Projetive module 2) Complex

است که در آن برای هر $n \in \mathbb{Z}$، $d_n d_{n+1} = 0$.

همچنین برای همبافت‌های A و A'، خانواده‌ی $(f_n : A_n \longrightarrow A'_n)$ از Rـهمریختی‌ها را نگاشتی زنجیری گوییم، اگر دیاگرام زیر جابه‌جایی باشد:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & A_{n+1} & \longrightarrow & A_n & \longrightarrow & A_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & A'_{n+1} & \longrightarrow & A'_n & \longrightarrow & A'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

اگر F فانکتوری جمعی باشد، آن‌گاه

$$FA = \cdots \longrightarrow FA_{n+1} \xrightarrow{Fd_{n+1}} FA_n \xrightarrow{Fd_n} FA_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

نیز یک همبافت است. به ویژه اگر A، دنباله‌ای دقیق باشد ($\mathrm{Im} d_{n+1} = \ker d_n$)، آنگاه FA یک همبافت است.

خارج قسمتی $\ker(d_n)/\mathrm{Im}(d_{n+1})$ را nـامین همولوژی مدول همبافت A نامیم و با $H_n(A)$ نشان می‌دهیم. حال اگر $f : A \longrightarrow A'$ یک نگاشت زنجیری[1] باشد، داریم:

$$H_n(f) : H_n(A) \longrightarrow H_n(A')$$

$$z_n + \mathrm{Im} d_{n+1} \longrightarrow f_n z_n + \mathrm{Im} d'_{n+1}$$

$H_n(f)$ نگاشت القا شده[2] به وسیله f نامیده می‌شود و معمولاً با f_* نشان داده می‌شود.

قضیه ۶.۱. [30, Theorem 6.3]. (دنباله‌ی دقیق طولانی) فرض کنیم $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \longrightarrow 0$ یک دنباله‌ی دقیق از همبافت‌ها باشد. در این صورت دنباله‌ی دقیق زیر از مدول‌ها وجود دارد:

$$\cdots \longrightarrow H_n(A') \xrightarrow{i_*} H_n(A) \xrightarrow{p_*} H_n(A'') \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A') \longrightarrow \cdots$$

تعریف ۷.۱. ۱) فرض کنیم R یک حلقه و M یک Rـمدول باشد. دنباله‌ی دقیق $\cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ که در آن P_iها، Rـمدول‌های تصویری هستند را یک تحلیل تصویری[3]

1) Chain map 2) Induced map 3) projective resolution

برای M نامیم. اگر P_iها آزاد باشند، آنگاه این دنباله‌ی دقیق، یک تحلیل آزاد برای M نامیده می‌شود. براساس [30, Theorem 3.8]، هر Rـمدول M دارای یک تحلیل آزاد است.

۲) فرض کنیم R یک حلقه و M یک Rـمدول باشد. دنباله‌ی دقیق $\cdots \longrightarrow E^1 \longrightarrow E^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ که در آن E^iها، Rـمدول‌های انژکتیو هستند را یک تحلیل انژکتیو برای M می‌نامیم. همچنین بنابر[30, The 3.28] هر R ـمدول دارای یک تحلیل انژکتیو است.

تبصره ۸.۱. بنابر[30, Theorems 2.9 and 2.10]، فانکتورپادورد $\mathrm{Hom}(-, M)$ و فانکتور $\mathrm{Hom}(M, -)$، دقیق چپ هستند. همچنین فانکتورهای $- \otimes M$ و $M \otimes -$ دقیق راست هستند. حال مطابق با نمادگذاری‌های مرجع [30] مفاهیم مربوط به nـامین فانکتور مشتق شده‌ی راست و چپ را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۹.۱. ۱) اگر $T = \mathrm{Hom}_R(A, -)$، آنگاه $\mathrm{Ext}_R^n(A, -) = R^nT$ را مطابق زیر تعریف می‌کنیم:

فرض کنیم $E = 0 \longrightarrow B \xrightarrow{\eta} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \longrightarrow \cdots$ یک تحلیل انژکتیو[1] برای Rـمدول B باشد.

حال تحلیل انژکتیو $E^B = 0 \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \longrightarrow \cdots$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\mathrm{Ext}_R^n(A, B) = H^n(\mathrm{Hom}_R(A, E^B)) = \mathrm{Ker}d_*^n/\mathrm{Im}d_*^{n-1}$$

که در آن

$$d_*^n : \mathrm{Hom}_R(A, E^n) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, E^{n+1})$$
$$f \longrightarrow d^n f$$

۲) اگر $T = \mathrm{Hom}_R(-, B)$، آنگاه $\mathrm{ext}_R^n(-, B) = R^nT$ را مطابق زیر تعریف می‌کنیم.

فرض کنیم $P = \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$ یک تحلیل تصویری برای Rـمدول A باشد. حال تحلیل تصویری $P_A = \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow 0$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\mathrm{ext}_R^n(A, B) = H^n(\mathrm{Hom}_R(P_A, B)) = \mathrm{Ker}d^{n*}/\mathrm{Im}d^{n-1*}$$

که در آن $d^{n*} : \mathrm{Hom}_R(P_{n-1}, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_n, B)$ با ضابطه $d^{n*} : f \longrightarrow fd^n$ تعریف می‌شود.

1) Injective resolution

تعریف ۱.۱۰. ۱) اگر B یک Rـمدول چپ باشد و $T = - \otimes_R B$، آنگاه $\mathrm{Tor}_n^R(-, B) = L_nT$ را مطابق زیر تعریف می‌کنیم.

اگر $P = \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$ یک تحلیل تصویری دلخواه برای Rـمدول راست A باشد، آنگاه

$$\mathrm{Tor}_n^R(A, B) = H_n(P_A \otimes_R B) = \mathrm{Ker}(d_n \otimes 1_B)/\mathrm{Im}(d_{n+1} \otimes 1_B)$$

که در آن $P_A = \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow 0$.

۲) اگر A یک Rـمدول راست باشد و $T = A \otimes_R -$، آنگاه $\mathrm{tor}_n^R(A, -) = L_nT$ را مطابق زیر تعریف می‌کنیم.

اگر $Q = \cdots \longrightarrow Q_2 \xrightarrow{d_2} Q_1 \xrightarrow{d_1} Q_0 \xrightarrow{\eta} B \longrightarrow 0$ یک تحلیل تصویری دلخواه برای Rـمدول چپ B باشد، آنگاه $\mathrm{tor}_n^R(A, B) = H_n(A \otimes_R Q_B) = \mathrm{Ker}(1_A \otimes d_n)/\mathrm{Im}(1_A \otimes d_{n+1})$ ، که در آن $Q_B = \cdots \longrightarrow Q_2 \xrightarrow{d_2} Q_1 \xrightarrow{d_1} Q_0 \longrightarrow 0$. همچنین بر اساس [30, Theorem 7.8 and 7.9]، یکریختی‌های $\mathrm{Ext}(A, B) \cong \mathrm{ext}(A, B)$ و $\mathrm{Tor}(A, B) \cong \mathrm{tor}(A, B)$ برقرار است. از این رو دیگر تمایزی بین $\mathrm{Ext}(A, B)$ و $\mathrm{ext}(A, B)$ و همچنین بین $\mathrm{Tor}(A, B)$ و $\mathrm{tor}(A, B)$ قائل نمی‌شویم.

قضیه ۱.۱۱. [30, Corollaries 6.13, 6.16 Theorems 6.21, 6.26, 6.27]

۱) فرض کنیم M یک Rـمدول و $\cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$ یک تحلیل تصویری برای M باشد. اگر $K_0 := \mathrm{Ker}\varepsilon$ و $K_i = \mathrm{Ker}d_i$، برای هر $i \geq 1$، آن گاه برای هر Rـمدول راست N داریم:

$$\mathrm{Tor}_{n+1}^R(N, M) \cong \mathrm{Tor}_n^R(N, K_0) \cong \cdots \cong \mathrm{Tor}_1^R(N, K_{n-1})$$

۲) فرض کنیم M یک Rـمدول و $0 \longrightarrow M \xrightarrow{E} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \longrightarrow \cdots$ یک تحلیل انژکتیو برای M باشد. اگر $L^0 := \mathrm{Im}\varepsilon$ و $L^i := \mathrm{Im}d_{i-1}$، برای هر $i \geq 0$، آن گاه برای هر Rـمدول راست N داریم:

$$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(N, M) \cong \mathrm{Ext}_R^n(N, L^0) \cong \cdots \cong \mathrm{Ext}_R^1(N, L^{n-1})$$

۳) فرض کنیم $\circ \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow \circ$ یک دنباله‌ی دقیق از مدول‌ها باشد. در این صورت برای هر Rـمدول N، دنباله‌های زیر دقیق هستند.

$$(a) \cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(N, M'') \longrightarrow N \otimes M' \longrightarrow N \otimes M \longrightarrow N \otimes M'' \longrightarrow \circ$$

$$(b) \circ \longrightarrow \mathrm{Hom}(N, M') \longrightarrow \mathrm{Hom}(N, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(N, M'') \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(N, M') \longrightarrow \cdots$$

$$(c) \circ \longrightarrow \mathrm{Hom}(M'', N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M', N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(M'', N) \longrightarrow \cdots$$

قضیه ۱.۱۲. **[16, Theorem 2.12 and Proposition 8.4.3]** شرایط زیر برای Rـمدول P معادلند:

۱) P تصویری است؛

۲) هر دنباله‌ی کوتاه $\circ \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow \circ$، شکافته شده[1] است. (یعنی، $M \cong N \oplus P$)

۳) P جمعوند مستقیم یک مدول آزاد است؛ (یعنی، مدول آزاد F و Rـمدول K وجود دارند به طوری که $F \cong K \oplus P$)؛

۴) فانکتور $\mathrm{Hom}(P, -)$ دقیق است؛

۵) برای هر Rـمدول M، $\mathrm{Ext}_R^1(P, M) = \circ$؛

۶) برای هر Rـمدول M و هر $n > \circ$، $\mathrm{Ext}_R^n(P, M) = \circ$.

بنابر [30,Exercise 3.8]، اگر $\{P_j : j \in J\}$ خانواده‌ای از مدول‌های تصویری باشد، آنگاه $\sqcup P_j$ تصویری است. همچنین کاپلانسکی[2] نشان داد که هر مدول تصویری روی یک حلقه‌ی موضعی، آزاد است.

قضیه ۱.۱۳. **[16,Theorem 3.12 and Proposition 8.4.4]** شرایط زیر برای Rـمدول E معادلند:

۱) E انژکتیو است؛

۲) هر دنباله‌ی کوتاه $\circ \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow \circ$، شکافته شده است؛

1) Split 2) Kaplansky

۳) E جمعوند مستقیم هر مدول M است که E زیرمدولی از آن باشد؛

۴) فانکتور $\mathrm{Hom}(-, E)$ دقیق است؛

۵) برای هر Rـمدول N، $\mathrm{Ext}_R^1(N, E) = 0$؛

۶) برای هر Rـمدول N و هر $n > 0$، $\mathrm{Ext}_R^n(N, E) = 0$؛

۷) برای هر ایده‌آل I از R، همریختی $E \longrightarrow I$ از Rـمدول‌ها به یک همریختی $E \longrightarrow R$ از Rـمدول‌ها توسیع می‌یابد (محک بئر[1]).

تعریف ۱۴.۱. مدول M را روی دامنه‌ی صحیح R بی‌تاب (فارغ از تاب[2]) گوییم، اگر از صفر بودن rm، صفر بودن r یا m نتیجه شود ($m \in M, r \in R$).

قضیه ۱۵.۱. [30, Theorems 3.52-54, 9.13 and 9.18] شرایط زیر برای Rـمدول F معادلند:

۱) F یکدست[3] است؛

۲) برای هر ایده‌ال راست I، $\mathrm{Tor}_1^R(R/I, F) = 0$؛

۳) برای هر ایده‌ال راست متناهی مولد I از R، $I \otimes F \cong IF$؛

۴) برای هر Rـمدول چپ M، $\mathrm{Tor}_1(M, F) = 0$؛

۵) برای هر Rـمدول چپ متناهی مولد M، $\mathrm{Tor}_1(M, F) = 0$؛

۶) Rـمدول راست $F^* = \mathrm{Hom}(F, Q/\mathbb{Z})$، مدول مشخص F، انژکتیو است.

تعریف ۱۶.۱. یک توسیع[4] از A به وسیله C یک دنباله دقیق مانند $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ است.

قضیه ۱۷.۱. [30, Theorem 7.11] اگر $\mathrm{Ext}_R^1(C, A) = 0$، آنگاه هر توسیع از A به وسیله C شکافته می‌شود.

1) Baer 2) Torsion free 3) Flat 4) Extension

تعریف ۱.۱۸. برای عدد صحیح مثبت n، Rـمدول M، nـنمایش[1] است، هرگاه دنباله‌ی دقیق $F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ از Rـمدول‌ها موجود باشد که در آن هر F_i با تولید متناهی و آزاد است. در این صورت R ـمدول‌های ۰ـنمایش و ۱ـنمایش به ترتیب مدول‌های با تولید متناهی[2] و با نمایش متناهی هستند.

بنابر قضیه‌ی [21,2.1.4]، هر مدول متناهی مولد تصویری، با نمایش متناهی است. هر R ـمدول با نمایش متناهی یکدست، تصویری است. همچنین اگر R حلقه‌ی نوتری چپ باشد، آنگاه هر مدول متناهی مولد با نمایش متناهی است.

تعریف ۱.۱۹. فرض کنیم M یک Rـمدول و دارای تحلیل تصویری به شکل

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

باشد، آنگاه گوییم بعد تصویری[3] M حداکثر n است و می‌نویسیم $pd_R(M) \leq n$. اگر چنین تحلیلی وجود نداشته باشد، گوییم M دارای بعد تصویری نامتناهی است. همچنین $pd_R(M) = n$، هرگاه n طول کوتاهترین تحلیل تصویری از M باشد. از سوی دیگر $pd_R(M) = 0$ اگر وتنها اگر M تصویری باشد. در ضمن برای هر $n \geq 0$، هسته‌ی همریختی $P_n \longrightarrow P_{n-1}$ را nـامین هسته‌ی تحلیل $0 \longrightarrow M \longrightarrow P_0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow \cdots$ گویند.

قضیه ۱.۲۰. [30, Theorem 9.5] برای هر Rـمدول M، گزاره‌های زیر با هم معادلند:

۱) $pd_R(M) \leq n$؛

۲) برای هر Rـمدول N و هر $k \geq n+1$، $\mathrm{Ext}^k_R(M,N) = 0$؛

۳) برای هر Rـمدول N، $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(M,N) = 0$؛

۴) هر تحلیل تصویری برای M، دارای $(n-1)$ـامین هسته‌ی تصویری است.

تعریف ۱.۲۱. فرض کنیم M یک Rـمدول و دارای تحلیل انژکتیو به شکل

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^n \longrightarrow 0$$

1) n-presented 2) Finitely generated 3) Projective dimension