بسم الله الرحمن الرحيم

۱۳۷۵ /۴/ ۲۰

دانشگاه فردوسی مشهد

پایان نامه تحصیلی جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

موضوع:

بررسی ایده آلهای لی درگروه حلقه های پوچتوان

استاد راهنما:

آقای دکتر محمدرضا رجب‌زاده مقدم

استاد مشاور:

آقای دکتر محمود یاسی

پژوهشگر:

محمد عباس‌پور

سال تحصیلی ۷۴-۷۳

حروفچینی لیزری: شرکت تعاونی دانش ـ کار

بسمه تعالی

No: شماره:

Date: تاریخ:

پیوست:

دانشگاه فردوسی مشهد
دانشکده علوم - گروه ریاضی

Department of Mathematics
Ferdowsi University of Mashhad
P.O.Box 1159-91775,Mashhad
Islamic Republic of Iran

جلسهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ آقای محمد عباس پور دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی در ساعتِ ۱۰ روزِ ۷۴/۶/۱۹ دراتاقِ شمارهٔ ۲۵ ساختمانِ خوارزمی دانشکدهٔ علوم ۲ باحضور امضاءکنندگان ذیل تشکیل‌گردید. پس‌از بررسی و نظر هیأت داوران، پایان‌نامه نامبرده بانمرهٔ نوزده (۱۹/-)موردتأیید قرارگرفت.ت

عنوان رساله: " بررسی ایده آلهای لی درگروه حلقه های پوچتوان "

تعداد واحد: ۶ واحد

داور رساله: آقای دکترمحمد خاتون آبادی
استادیارگروه ریاضی - دانشگاه اصفهان

داور رساله: آقای دکتر محمودیاسی
استادیار گروه ریاضی - دانشگاه فردوسی مشهد

استاد راهنما: آقای دکتر محمدرضا رجب زاده مقدم
استاد - گروه ریاضی - دانشگاه فردوسی مشهد
محمدرضا رجب زاده مقدم

مدیرگروه ریاضی: آقای دکتراسداله نیکنام
استاد - گروه ریاضی - دانشگاه فردوسی مشهد

تقدیم به :

پدر و مادر عزیزم

همانها که

برایم الگوی روشنی از ایمان به خدا، عشق به اسلام، تحصیل علم، تلاش، ایثار، عطوفت و مهرند.

همانها که

پس از نظر لطف خداوند و عنایت اولیائش، هرچه دارم از آنهاست و چشم امیدم به سوی آنهاست.

تقدیر و تشکّر

حمد و سپاس بی‌پایان خداوندی راکه زبان از عنایت شکرش قاصر است، و خرد در ژرفای معرفتش عاجز، او که مهربان است، و حقیر را به اتمام دوره‌ای از تحصیلاتم توفیق کرامت فرمود.

به مصداق حدیث: من علمنی حرفاً فقد صیرنی عبدا. از استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر محمدرضا رجب‌زاده مقدم که همواره در طول دوران تحصیل از راهنمائیهای ارزنده علمی و اخلاقی ایشان بهره‌مند بوده‌ام صمیمانه تشکر می‌نمایم.

به علاوه از جناب آقای دکتر خاتون آبادی استاد داور و جناب آقای دکتر یاسی استاد مشاور رساله و یکایک استادانی که در طول دوران تحصیلات دانشگاهی افتخار حضور در محضر آنان را داشته و از دانش ایشان بهره‌مند شده‌ام، قدردانی می‌کنم.

همچنین مراتب تقدیر و تشکر خود را از تمامی دوستان همپایه‌ای بویژه آقای رنگی، اسماعیلی مود، موسوی، سعیدی، چهاردهی، مهری و کارکنان کتابخانهٔ دانشکده علوم ۲ بویژه آقای اتحاد و واحد خدمات و تکثیر ابراز می‌دارم.

همچنین از خانم خاکشور که زحمت تایپ رساله را عهده‌دار بودند تشکر می‌کنم.

فصل اوّل: پیشنیازها

بخش اوّل: گروه حلقه و جبر گروهی

بخش دوّم: گروههای حل‌پذیر

بخش سوّم: گروههای پوچ توان

بخش چهارم: ارتباط بین گروهها و نظریه حلقه‌ها

فصل دوّم: ایده‌آل‌های لی در گروه حلقه‌ها:

بخش اوّل: ایده آل‌های لی از یک حلقه

بخش دوّم: خواص ایده‌آل‌های لی (نتایج اصلی)

بخش سوّم: کاربرد ایده‌آل‌های لی در گروه حلقه‌ها

فصل سوّم : حلقه‌های حل‌پذیر لی:

بخش اوّل: اتحادهای لی و ایده آل‌های لی

بخش دوّم: نتایج اصلی در حلقه‌های حل پذیر لی

بخش سوّم: کاربرد در گروه حلقه ها

فصل چهارم: نکاتی در رابطه با ایده‌آلهای پوچ توان

بخش اوّل: زنجیرهای پائین مرکزی لی و قوّیاً لی

بخش دوّم: (نتایج اصلی)

بخش سوّم: کاربرد در گروه حلقه‌ها

بسم الله الرحمن الرحیم

مقدمه:

در این مقاله سعی می‌کنیم به نوعی ارتباطی بین نظریه گروهها و نظریه حلقه‌ها برقرار کنیم. روش دستیابی به چنین ارتباطی بایستی طوری انجام پذیرد که اطلاعات موجود در یک مفهوم، قابل دستیابی در مفهوم دیگر باشد.

به هر حال این ارتباط از این طریق گروههای پوچتوان امکان‌پذیر است که به حلقه‌های لی دسترسی پیدا می‌کنیم. همچنین همانطور که مشاهده خواهیم کرد یکی از بهترین ابزاری که می‌توان در جهت برقراری این ارتباط از آن استفاده کرد، گروه حلقه‌ها می‌باشند.

اینکه چگونه می‌توان از مفهومی در نظریه گروهها به نظریه حلقه‌ها است یافت توسط آقای دکتر محمدرضا رجب‌زاده مقدم در [1] به چاپ رسیده است. مسیر برگشت یعنی اینکه چگونه می‌توان از نظر به حلقه‌ها به مفهومی در نظریه گروهها دست یافت. کاریست که توسط شارما[1] و سریواستاوا[2] و ویکا س‌بست[3] بکمک نظریه گروه حلقه‌ها صورت پذیرفته است. در فصل ۲ نشان خواهیم داد که اگر $R = K[G]$ جبر گروهی از گروه G بر میدان K از مشخصه $P \geq 0$ باشد. بطوریکه $\gamma_n(L(K[G]))$ آنگاه برای $P=0$ و برای $P \geq 0$، G گروهی آبلی است. و برای $P<n$، G گروهی پوچتوان از کلاس حداکثر C است. که C کوچکترین عدد صحیح مثبتی است که اگر $P>3$ $\sqrt{2(n-1)/(p-1)}$ کوچکتر نیست. و اگر $P=3$ از $1+\sqrt{(n-4)}$ کوچکتر نیست. و در فصل ۳ به کمک چند قضیه دیگر که درهمین فصل اثبات شده‌اند درانتهابه اثبات دیگری از قضیه پسی[4]، و پسمن[5]، سهکال[6] می‌پردازیم. و بالاخره در فصل چهارم این مقاله که بکمک قضیه ۴-۳ اهمه گروههایی را که در رابطه $\gamma_n(L(K[G]))=0$ اگر و تنها اگر $\gamma_n(KG)=0$ صدق می‌کنند رامشخص می‌کنیم.

---

1. R . K SHARMA
2. J. B. SRIVASTAVA
3. VIKAS BIST
4. B.S. Passi
5. D. SPassman
6. S . K Sehgal

فصل يكم

فصل اوّل

۱-۱ گروه حلقه [1] و جبر گروهی [2]

گروه حلقه $R[G]$ عبارتست از حلقه شرکت‌پذیر که خواصی از گروه G و حلقه ضرایب یعنی R را نشان میدهد. همانطور که از نام آن بر می‌آید، گروه حلقه، فصل مشترکی در نظریه گروهها و حلقه‌ها باز می‌کند و برخی از نقطه‌نظرات متفاوت را به همدیگر نزدیک می‌سازد، که البته منظور از نزدیکی در اینجا صرفاً نزدیکی نظریه گروهها و حلقه‌ها می‌باشد. این مطالعات جبری از گروه حلقه توسط آروین کاپلانسکی در سال ۱۹۴۹ شروع شد. اما به نظر می‌رسد که کار اساسی روی این موضوع از دو سال بعد توسط س.آ میتشر پی‌گیری شده است. در این فصل مطالب مقدماتی و پیش‌نیازی که در فصول بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند را خلاصه می‌کنیم.

تعریف ۱-۱-۱:

فرض کنید G و R بترتیب نمایش یک گروه و حلقه‌ای یکدار باشند. گروه حلقه $R[G]$ (یا RG) مجموعهٔ همه حاصل جمع‌هایی بصورت $\sum r_{(x)}x$ است که در آن $r_{(x)}\in R$ عنصری از R منسوب به x بوده و تقریباً همه جا بجز تعداد متناهی از xها برابر صفر است اعمال جمع و ضرب تعریف شده در $R[G]$ بصورت زیر می‌باشد.

$$(1)\quad \Big(\sum_{g\in G} r_{(g)}g\Big) + \Big(\sum_{g\in G} r'_{(g)}g\Big) = \sum_{g\in G}\big(r_{(g)} + r'_{(g)}\big)g$$

$$(2)\quad \Big(\sum_{g\in G} \lambda_{(g)}g\Big)\Big(\sum_{g\in G} \mu_{(g)}g\Big) = \sum_{g\in G} \nu_{(g)}g$$

که در آن

$$\nu_g = \sum_{h\in G} \lambda_{(h)}\mu(h^{-1}g) = \sum_{xy=g} \lambda(x)\mu(y)$$

1 . Group ring

2 . Group algebra

بعلاوه داریم: به ازای هر $(3)\ \sum_{g\in G}\lambda(g)g = \sum_{g\in G}\mu(g)g \Leftrightarrow \lambda(g) = \mu(g)\ g\in G$

همراه با این دو عمل $R[G]$ حلقه‌ایست که آنرا گروه حلقه‌ای از گروه G بر حلقه R می‌نامند.

واضحست که $R[G]$ جابجائیست اگر و تنها اگر R و G جابجایی باشند. همچنین اگر 1_R , e بترتیب نمایش عنصرهای همانی حلقه R و گروه G باشند. $1_R e$ بعنوان عنصر همانی $R[G]$ عمل می‌کند.

در حالت خاص اگر بجای حلقه R میدان $\mathbf{k}$ را جایگزین کنیم آنگاه گروه حلقه $K[G]$ را جبر گروهی از گروه G بر میدان K می‌نامیم. در این حالت با توجه به ضرب اسکالری که بصورت زیر تعریف می‌شود براحتی می‌توان نشان داد که $K[G]$ یک فضای برداری روی میدان K است همچنین در این حالت $K[G]$ یک Kـ مدول چپ است. زیرا با توجه به ضرب تعریف شده بصورت:به ازای هر $f\in k$; $f(\sum_{x\in G} f_{(x)}x) = \sum_{x\in G}(ff_{(x)})x$

داریم.

$$(1)\ f(\sum_{x\in G}f_{(x)}x + \sum_{x\in G}f'_{(x)}x) = f\sum_{x\in G}(f_{(x)} + f'_{(x)})x = \sum_{x\in G}(f(f_{(x)} + f'_{(x)}))x = \sum_{x\in G}(ff_{(x)} + ff'_{(x)})x$$

$$= \sum_{x\in G}(ff(x))x + \sum_{x\in G}(ff'(x))x = f\sum_{x\in G}f(x)x + f\sum_{x\in G}f'(x)x$$

$$(2)\ (f_1f_2)(\sum_{x\in G}f_{(x)}x) = \sum_{x\in G}((f_1f_2)f(x))x = \sum_{x\in G}(f_1(f_2f(x))x = f_1(\sum_{x\in G}(f_2f_{(x)})x) = f_1(f_2(\sum_{x\in G}f(x)x))$$

$$(3)\ 1_k(\sum_{x\in G}f_{(x)}x) = \sum_{x\in G}(1_kf_{(x)})x = \sum_{x\in G}f_{(x)}x$$

$$(4)\ (f_1 + f_2)(\sum_{x\in G}f_{(x)}x) = \sum_{x\in G}((f_1 + f_2)f_{(x)})\,x = \sum_{x\in G}(f_1f_{(x)} + f_2f_{(x)})x = \sum_{x\in G}(f_1f_{(x)})x + \sum_{x\in G}(f_2f_{(x)})x$$

$$= f_1(\sum_{x\in G}f_{(x)}x) + f_2(\sum_{x\in G}f_{(x)}x)$$

به ازای هر f , f_1 , f_2 از $\mathbf{k}$.

تعریف ۱-۱-۲: یک حلقه شرکت پذیر A را در صورتی یک جبر روی میدان F می‌خوانند که A یک فضای برداری روی F باشد بطوری که، به ازای هر $a, b\in A$ و هر $\alpha\in F$, $\alpha(ab)= (\alpha a)b = a(\alpha b)$.

همریختیها، یکریختی‌ها، ایده‌آلها، مانند اینها، برای جبرها مثل حلقه‌ها تعریف می‌شوند، با این شرط اضافی که اینها باید تحت نهاد فضای برداری محفوظ، یا نامتغیر، باقی بمانند. بعنوان مثال حلقهٔ ماتریس‌های $n{\times}n$ روی میدان K نمونه‌ای از یک جبر می‌باشد، همچنین اگر V یک فضای برداری روی میدان K باشد. آنگاه

$End(V)$ که عبارتست از مجموعه همه عملگرهای خطی روی فضای برداری V یک K- جبر است زیرا به ازای هر دو عنصر دلخواه T_1 و T_2 از $End(V)$ به ازای هر v از V و c از K داریم:

$$(v)(T_2 \circ T_1) = ((v)T_2)T_1$$

$$(v)(T_1 + T_2) = (v)T_1 + (v)T_2$$

$$(v)(cT_1) = c((v)T_1)$$

تبصره: $K[G]$ یک K- جبر است زیرا با توجه به قسمت قبل $K[G]$ علاوه بر اینکه یک حلقه است همراه با ضرب اسکالری که تعریف کردیم یک فضای برداریست بعلاوه به ازای هر $f \in k$ داریم:

$$f((\sum_g f_{(g)}g)\ (\sum_g f'_{(g)})g) = f\sum_g\ (\sum_{yz=g} f_{(y)}f'(z))g = \sum_g\ (f\sum_{yz=g} f(y)f'(z))g$$
$$= \sum_g\ (\sum_{yz=g} f(f(y)f'(z)))g = \sum_g\ (\sum_{yz=g} f(y)(ff'(z))g = (\sum_g f(y)g)\ \sum_g (ff'(g))g = (\sum_g f(g)g)(f(\sum_g f'(g)y))$$

این K-جبر را جبر گروهی G بر میدان K می‌نامند. اگر G متناهی باشد آنگاه $K[G]$ را یک جبر گروهی متناهی البعد می‌نامیم.از این به بعد به بررسی بعضی از خواص جبر گروهی متناهی البعد $K[G]$ خواهیم پرداخت.

در جبر گروهی $K[G]$ مجموعه همه عناصر به شکل $g^* = 1.g$ $(g \in G)$ که تمامی ضرایب بجزیکی برابر صفر است مستقل خطی بوده و تشکیل یک پایه برای $K[G]$ بر میدان K میدهند بکمک نگاشت $\theta: G \to K[G]$ که بصورت $(g)\theta = g^*$ تعریف می‌شود می‌توان به یک همریختی یک به یک از G بتوی $K[G]$ دست یافت و بنابراین $(G \cong \theta(G)$ با نقش یکریخت آن در $K[G]$ یکی است) پس می‌توان با این دید G را آنچنان در $K[G]$ نشاندکه عناصر G تشکیل یک پایه برای $K[G]$ بدهند.

تعریف ۱-۱-۳: اگر A یک K - جبر و V یک فضای برداری متناهی البعد باشد، به طوری که به ازای هر $v \in V$ و $x \in A$ شیء xv از V به طور منحصر بفرد تعریف شود و اگر $x, y \in A$ و $v, w \in V$ و $c \in K$ دلخواه باشند، آنگاه V را یک Aمدول می‌نامند در صورتی که در شرایط زیر صدق کند.

۱) $x(v + w) = xv + xw$

۲) $(x + y)v = xv + yv$

۳) $x(yv) = (xy)v$

۴) $x(cv) = c(xv) = (cx)v$

۵) $v.1 = v$

در صورتی که A یک جبر دلخواه باشد A خود یک A- مدول می‌باشدکه آنرا Aمدول عادی [1]

---

1 . Regular A - modual

می‌نامند. اگر V و W بعنوان دو A مدول در نظر گرفته شوند تبدیل خطی $\varphi : V \to W$ یک A همریختی است هرگاه به ازای هر $v \in V$ و $x \in A$ داشته باشیم $\varphi(xv) = x\varphi(v)$.

همچنین اگر V یک A مدول روی K باشد آنگاه $U \subset V$ را یک زیر مدول V[1] می‌نامیم هرگاه اولاً U یک زیر فضای برداری V (روی K) باشد و ثانیاً U خود یک A- مدول باشد.

$U = \circ$ و $U = V$ را زیر مدول‌های بدیهی و $U \subset V$ زیر مدول محض (سره) V نامیده می‌شود.

اگر تنها زیر مدول‌های A- مدول غیر صفر V صفر و V باشند آنگاه V را تحویل ناپذیر[2] می‌نامیم.

و اگر برای هر زیر مدول $W \subseteq V$ زیر مدول دیگری چون $U \subseteq V$ بقسمی موجود باشد که $V = U \oplus W$ آنگاه V را تماماً تحویل پذیر می‌نامیم. یک جبر A رانیم ساده می‌گوئیم هرگاه مدول عادی آن A° تماماً تحویل پذیر باشد.

لم ۱-۱-۴: یک Aمدول V تماماً تحویل پذیر است اگر و تنها اگر بصورت مجموع زیر مدول‌های تحویل ناپذیر باشد.

اثبات: فرض کنید V بصورت مجموع زیر مدول‌های تحویل ناپذیر باشد یعنی $V = \sum V_\alpha$ که V_α ها تحویل ناپذیرند و $W \subset V$ زیر مدول دلخواهی از V باشد. از متناهی البعد بودن V نتیجه می‌شود که می‌توان $U \subseteq V$ را چنان پیدا کرد که نسبت به این خاصیت که $U \cap W = 0$ بیشین باشد. حال ادعا می‌کنیم که $U + W = V$ زیرا در غیر اینصورت V_α ای چنان موجود است که $V_\alpha \not\subset W + U$ و چون V_α تحویل ناپذیر است سپس بنا به تعریف تنها زیر مدول‌های V_α عبارتند از صفر و V_α و بنابراین $(W + U) \cap V_\alpha = 0$ و این متناقض با بیشین بودن U است بنابراین $V = W \oplus U$ و در نتیجه V تماماً تحویل پذیر است. بالعکس فرض کنید V تماماً تحویل پذیر باشد، S را بعنوان مجموع همه زیر مدول‌های تحویل ناپذیر V در نظر می‌گیریم اگر $S \subset V$ می‌توان زیر مدول $T \neq 0$ را چنان پیدا کرد که $V = S \oplus T$ و $S \cap T = 0$ اما چون T متناهی البعد است پس T شامل یک زیر مدول تحویل ناپذیر است که با فرض $S \cap T = 0$ تناقض دارد.

قضیه ۱-۱-۵: اگر A- مدول V بصورت $V = \sum V_\alpha$ نوشته شود که V_α ها زیر مدول‌های تحویل ناپذیرند آنگاه می‌توان V را بصورت مجموع مستقیم تعدادی V_α نوشت.

اثبات: زیر مدول $W \subseteq V$ را چنان انتخاب می‌کنیم که بصورت مجموع مستقیم تعدادی V_α بوده و نسبت به این خاصیت بیشین باشد. اگر $W \subset V$ آنگاه به ازای α ای $V_\alpha \not\subset W$ چون V_α تحویل ناپذیر است $W \cap V_\alpha = 0$ حال $W_1 = W \oplus V_\alpha$ قرار می‌دهیم. در اینصورت $W \subset W_1$ و این با بیشین بودن W متناقض است بنابراین $W = V$.

نتیجه: مدول‌های تماماً تحویل پذیر دقیقاً حاصل جمع مستقیمی از مدول‌های تحویل ناپذیرند.

تعریف ۱-۱-۶: فرض کنید K یک میدان و A , B دو K جبرباشند، در اینصورت :

الف) یک زیر جبر از A زیر حلقه‌ای از A است که K- زیر مدول A نیز باشد.

ب) یک ایده‌آل جبر A ایده‌آلی از حلقه A است که یک K- زیر مدول A نیز باشد.

---

1. 2. Submodual   2 .Irreducible

همچنین اگر E یک R-مدول باشد، آنگاه مجموعهٔ $\{\lambda \in R \mid \lambda x = 0 ,\ \forall x \in E\}$ یک ایده‌ال R است که پوچساز E نامیده می‌شود. حال فرض کنید G یک گروه و $Z[G]$ گروه حلقه‌ای از گروه G بر حلقه اعداد صحیح باشد و $i : G \to Z[G]$ نگاشت نشانی طبیعی باشد. در این صورت داریم:

لم ۷.۱.۱: فرض کنید R حلقه‌ای یکدار باشد، در اینصورت برای هر تابع $f: G \to R$ با این خاصیت که $f(xy) = f(x) f(y)$ و $f(1) = 1_R$ یک همریختی منحصر بفرد از حلقه‌ها مانند $f' : Z[G] \to R$ وجود دارد بطوریکه داریم: $f' \circ i = f$.

اثبات: ما تعریف می‌کنیم $f'(\sum_{x\in G} m(x).x) = \sum_{x \in G} m(x) f(x)$.(که هر عنصر G را به 1 می‌برد) واضح است که f' همریختی حلقه‌ها بوده و $f' \circ i = f$ می‌باشد.اگر در لم فوق بجای حلقه R در حالت خاص Z را قرار دهیم، در اینصورت یک برو ریختی از گروههای آبلی که بصورت $f':Z[G] \to Z$ با ضابطهٔ $f'(\sum_{x\in G} m(x)x) = \sum_{x \in G} m(x)$ تعریف می‌شود وجود دارد که‌این برو ریختی را نگاشت افزایشی از $Z[G]$ می‌نامیم. همچنین هسته f' را که بصورت $I[G]$ نشان می‌دهیم، را اصطلاحاً ایده‌آل افزایشی از $Z[G]$ نامیده می‌شود.

اثبات همریختی بودن f'

$$[(\sum_g n(g)g)\ (\sum_g m(g)g)] f' = [\sum_g (\sum_{yz=g} n(y)\ m(z)) g] f' = \sum_g (\sum_{yz=g} n(y)\ m(z)) =$$

$$(\sum_g n(g))\ (\sum_g m(g)) = (\sum_g n(g)g) f' (\sum_g m(g)g) f'$$

بنابراین $I[G]$ یعنی هستهٔ f' یک ایده‌آل از حلقه $Z[G]$ بوده و براحتی میتوان نشان داد که $I[G] = \langle g-1 \mid 1 \neq g \in G \rangle$ می‌باشد زیرا فرض کنید $r = \sum_g n(g)g$ عضوی دلخواه از $I[G]$ باشد.
بنابراین طبق تعریف $f'(\sum n(g)g) = 0$ یعنی $\sum_g n(g) = 0$ است. حال ادعا کنیم که $r = \sum n(g)g$ عضو $I[G]$ است اگر و تنها اگر $r = \sum_{g\neq 1} n(g)(g-1)$ باشد.

اثبات ادعا: ابتدا فرض کنید $r = \sum_g n(g)g \in I[G]$ در اینصورت $\sum_g n(g) = 0$ و بنابراین داریم:

$$r = \sum_{g\in G} n(g)(g-1+1) = \sum_{g\in G} n(g)(g-1) + n(g).1 = \sum_g n(g)(g-1) + \sum_g n(g) = \sum_{g\neq 1} n(g)(g-1)$$

یعنی

$$r = \sum_{1\neq g\in G} n(g)(g-1)$$

بالعکس فرض کنید $L = \sum_{1\neq g\in G} n(g)(g-1)$ نشان میدهیم که L عضو $I[G]$ می‌باشد. و از آنجاکه براحتی میتوان نشان داد که $f'(L) = 0$ می‌باشد. بنابراین چیزی بر ای اثبات باقی نمی‌ماند.

در قسمت قبل اگر $G = F$ گروهی آزاد روی $\{x_i\}_{i\in I}$ باشد $Z[F]$ راگروه حلقه صحیح F می‌نامیم.

تعریف: به ازای هر عضو دلخواه مانند $\alpha = \sum k(x)x$ از $K[G]$ محمل α که به صورت $supp\alpha$ نمایش میدهیم عبارتست از مجموعهٔ $supp\alpha = \{x\in G \mid K(x) \neq ۰\}$ که زیر مجموعه‌ای متناهی از گروه G است بعبارت دیگر $supp\alpha$ مجموعه همه عناصری از گروه G است که واقعاً در نمایش α ظاهر می‌شوند. و برابر تهی است اگر تنها اگر $\alpha = 0$ باشد. همچنین زیرگروه محملی از α یعنی $< supp\alpha >$ یک زیرگروه متناهیاً تولید شده از G می‌باشد که توسط عناصری از $supp\alpha$ تولید می‌شود، در واقع کوچکترین زیرگروهی از G مانند H است که $\alpha\in K[H]$ می‌باشد.

اگر $\alpha \neq ۰$ و g بترتیب عضوهای دلخواهی از جبر گروهی G باشند. آنگاه بوضوح $suppg\alpha = g(supp\alpha)$ و $supp\alpha g = (supp\alpha)g$ البته می‌دانیم که در اینجا منظور از $g\alpha$ در حقیقت $\alpha.(1_k . g)$ می‌باشد.

بویژه اگر $x\in supp\alpha$ آنگاه $| \in suppx^{-1}\alpha$ و همچنین $| \in supp\ \alpha x^{-1}$ می‌باشد زیرا با توجه به مطلب فوق داریم:

$$.1= x^{-1}x \in x^{-1}\ supp\alpha= suppx^{-1}\alpha$$

حال برای یک لحظه فرض کنید α در مرکز $K[G]$ و x عضوی دلخواه از $supp\alpha$ باشد در اینصورت به ازای هر $y\in G$ داریم:

$$x^y = y^{-1}\ xy \in y^{-1}\ .supp\alpha.y = supp\ y^{-1}\alpha y = supp\alpha$$ (چون α در مرکز $K[G]$ است) (x^y مزدوج x بوسیله y)

و از آنجاکه $supp\alpha$ یک مجموعه متناهی است نتیجه می‌شود که فقط تعداد متناهی از x^y های مجزا در

$supp\alpha$ وجود دارد. یعنی در اینحالت هر عضو دلخواه گروه G دارای تعدادی متناهی مزدوج در گروه G است.

فرض کنید H زیرگروهی از گروه G باشد در این صورت $H \subseteq G \subseteq K[G]$ و چون در این حالت H به عنوان زیر مجموعه‌ای از پایهٔ G مورد نظر است ترکیبات خطی H روی K $K[H]$ می‌باشد که بطور طبیعی در $K[G]$ نشانده می‌شود در حقیقت $K[H] = \{ \alpha \in K[G] \,|\, supp\alpha \subseteq H \}$ می‌باشد، بنابراین $K[H]$ یک زیر حلقه از $K[G]$ است و لذا می‌توان با این دیدگاه که $K[G]$ یک $K[H]$ مدول راست یا چپ (بوسیله ضرب معمولی) است به $K[G]$ نگاه کرد.

تعریف ۱-۱-۸: اگر G یک گروه و $H \leq G$ آنگاه $G = \cup x_i H$ را تجزیهٔ G به همرده‌های چپ می‌نامیم. مجموعه $\{x_i \,|\, i \in I\}$ را یک مجموعهٔ مورب چپ H در G می‌خوانیم.

مثال : گروه جمعی Z و زیرگروه $H = \{0 , \pm 3 \pm 6,..\}$ را در نظر می‌گیریم همرده‌های چپ H در G عبارتند از $H+0$ ، $H+1$ ، $H+2$ یعنی زیرگروه H تنها دارای سه همرده چپ در Z می‌باشد. مجموعهٔ $\{0 , 1 , 2\}$ یک مجموعهٔ مورب H در Z است.

لم ۱-۱-۹: فرض کنید E یک جبر روی میدان K باشد و $\psi : G \to u(E)$ یک همریختی گروهها از G به گروه عناصریکه E باشد. در این صورت ψ به یک K- همریختی بین جبرها مانند $\Psi: K[G] \to E$ با ضابطهٔ $\Psi(\sum_{K} a(x).x) = \sum_{K} a(x)\psi(x)$ توسیع می‌یابد.

اثبات: مسلماً توسیع Ψ نگاشتی خوش تعریف از $K[G]$ بتوی E است. همچنین واضح است که k- خطی است. بعلاوه از آنجا که به ازای هر x, y از G داریم $\psi(xy) = \psi(x)\,\psi(y)$ بنابراین Ψ روی $K[G]$ ضربی نیز هست.□