تقدیم به همسر مهربانم که با حمایتهای بی‌دریغ خود مرا یاری نمود.

تشکر و قدردانی

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.
در مکتب حیات بخش اسلام علم را ساحتی است، بس والا که از آن به نور یاد می‌شود و از عالمان به عنوان وارثان انبیاء که قلمشان را فضیلتی است، برتر از خون شهداء.
از همه اساتید و کسانی که بر ما حق تعلیم دارند خصوصاً از زحمات خالصانه استاد بزرگوار خود، جناب آقای دکتر فرشید میرزائی صمیمانه تشکر و قدردانی می‌کنم که با راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام رسید، امیدوارم در سایه الطاف الهی و خداوند سبحان همواره موفق و موید باشند.

نام خانوادگی دانشجو: رسولی	نام: لیلا
عنوان پایان نامه: قواعد انتگرال گیری چبیشف — نیوتن — کاتس	
استاد راهنما: دکتر فرشید میرزائی	
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی دانشگاه ملایر— گروه ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: آذر ۱۳۸۹ تعداد صفحات: ۱۱۵	
کلید واژه: انتگرال گیری نیوتن—کاتس وزن دار، انتگرال گیری عددی، درجه دقت، روش ضرایب نامعین، روش حل دستگاههای غیرخطی.	

چکیده:

در این پایان نامه از یکی از قواعد انتگرال گیری عددی به نام قاعده انتگرال گیری چبیشف—نیوتن—کاتس استفاده می‌کنیم که در این قاعده با مجهول در نظر گرفتن کرانهای انتگرال درجه دقت را به ازای هر n ای به $(n+2)$ می‌رسانیم و سپس با بکارگیری از آن قاعده و استفاده از یک الگوریتم پیشرفته چند مثال عددی را حل می‌کنیم و نشان می‌دهیم که جواب‌های عددی دارای دقت مطلوب و مناسب می‌باشند.

این پایان نامه شامل پنج فصل می‌باشد در فصل اول به تعاریف و قضایای لازم از جبرخطی و آنالیز عددی، در فصل دوم به بررسی قاعده انتگرال گیری نیوتن — کاتس و قاعده انتگرال گیری گاوس می‌پردازیم. همچنین در فصل سوم، فصل چهارم و فصل پنجم به بررسی قواعد انتگرال گیری چبیشف — نیوتن — کاتس در حالتهای بسته، نیمه‌باز و باز می‌پردازیم.

فهرست مطالب

۱ تعاریف و قضایای لازم از جبرخطی و آنالیز عددی ۱

۱.۱ تعاریف و قضایای لازم ۲

۲.۱ چند جمله‌ای‌های متعامد و ویژگی آنها ۱۱

۱.۲.۱ چند جمله‌ای‌های ژاکوبی ۱۴

۲.۲.۱ چند جمله‌ای‌های لژاندر ۱۴

۳.۲.۱ چند جمله‌ای‌های چبیشف ۱۵

۲ انتگرال گیری عددی ۲۲

۱.۲ مقدمه ۲۳

۲.۲ قواعد انتگرال گیری از نوع درونیابی ۲۵

۳.۲ قاعده انتگرال گیری گاوس ۲۸

۱.۳.۲ مثالهایی از قواعد انتگرال گیری گاوس ۳۴

۲.۳.۲ همگرایی قواعد انتگرال گیری گاوس ۳۷

۳.۳.۲ الگوریتم قاعده انتگرال گیری گاوس ۳۹

۴.۲ قاعده انتگرال گیری نیوتن—کاتس ۴۲

۱.۴.۲ قواغد انتگرال گیری نیوتن – کاتس بسته و باز ۴۳

۲.۴.۲ همگرایی قواعد انتگرال گیری نیوتن – کاتس ۴۷

۵.۲ قواعد انتگرال گیری مرکب ۵۰

۱.۵.۲ همگرایی قواعد انتگرال گیری مرکب ۵۱

۳ قواعد انتگرال گیری چبیشف – نیوتن – کاتس نیمه‌باز ۵۴

۱.۳ مقدمه ۵۵

۲.۳ قاعده انتگرال گیری نوع اول چبیشف—نیوتن—کاتس نیمه‌باز ۵۸

۳.۳ قاعده انتگرال‌گیری نوع دوم چبیشف—نیوتن—کاتس نیمه‌باز ۶۰

۴.۳ تحلیل خطای قاعده انتگرال گیری چبیشف—نیوتن—کاتس نیمه‌باز . ۶۳

۵.۳ تعیین شرایطی برای استفاده بهینه از داده‌ها ۶۴

۱.۵.۳ مثال های عددی ۶۵

۴ قاعده انتگرال گیری نوع دوم چبیشف—نیوتن—کاتس باز ۷۰

۱.۴ مقدمه ۷۱

۲.۴ قاعده انتگرال‌گیری نوع دوم چبیشف—نیوتن—کاتس باز ۷۳

۳.۴ تحلیل خطای قاعده انتگرال گیری چبیشف—نیوتن—کاتس باز ۷۶

۴.۴ تعیین شرایطی برای استفاده بهینه از داده‌ها ۷۷

۱.۴.۴ مثال عددی ۷۸

۵ قاعده انتگرال گیری نوع اول چبیشف–نیوتن– کاتس بسته ۸۰

۱.۵ مقدمه ۸۱

۲.۵ قاعده انتگرال گیری نوع اول چبیشف—نیوتن—کاتس بسته ۸۲

۳.۵ تحلیل خطای قاعده انتگرال گیری چبیشف—نیوتن—کاتس بسته . . . ۸۶

۴.۵ تعیین شرایطی برای استفاده بهینه از داده‌ها ۸۷
۱.۴.۵ مثال عددی ۸۸

نتیجه گیری ۹۰

A **برنامه کامپیوتری** **۹۱**

۱.A برنامه‌های فصل سوم ۹۱

۲.A برنامه‌های فصل چهارم ۹۵

۳.A برنامه‌های فصل پنجم ۹۸

واژه نامه انگلیسی به فارسی ۱۰۱

منابع و ماخذ ۱۰۵

فهرست جدول‌ها

۱.۱ چند جمله‌ای‌های متعامد ۲۱

۱.۳ مقدارهای عددی $a, h, w_۰, w_۱, ..., w_n$ درقاعده انتگرال‌گیری نوع‌اول چبیشف–نیوتن–کاتس نیمه‌باز ۶۷

۲.۳ مقدارهای عددی $a, h, w_۰, w_۱, ..., w_n$ درقاعده انتگرال‌گیری نوع دوم چبیشف–نیوتن–کاتس نیمه‌باز ۶۸

۳.۳ نتایج عددی برای قاعده انتگرال‌گیری نوع اول چبیشف–نیوتن–کاتس نیمه‌باز ۶۹

۴.۳ نتایج عددی برای قاعده انتگرال‌گیری نوع دوم چبیشف–نیوتن–کاتس نیمه‌باز ۶۹

۱.۴ مقادیر خطا در قاعده انتگرال‌گیری چبیشف–نیوتن–کاتس باز ۷۸

۲.۴ نتایج عددی برای قاعده انتگرال‌گیری نوع‌دوم چبیشف–نیوتن–کاتس باز ۷۹

۱.۵ مقادیر خطا در قاعده انتگرال‌گیری چبیشف–نیوتن–کاتس بسته . . . ۸۸

۲.۵ نتایج عددی برای قاعده انتگرال‌گیری نوع‌اول چبیشف—نیوتن—کاتس بسته ۸۹

فصل ۱

تعاریف و قضایای لازم از جبرخطی و آنالیز عددی

۱.۱ تعاریف و قضایای لازم

در این فصل تعاریف، مفاهیم و قضایای مقدماتی مورد نیاز در این پایان نامه را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱ اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ بر بازه $[a,b]$ تعریف شده باشند و تابع وزن نامنفی $w(x)$ بر بازه (a,b) تعریف شده باشد در این صورت حاصل ضرب داخلی توابع $f(x)$ و $g(x)$ نسبت به تابع وزن $w(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Big(f(x),g(x)\Big)=\int_a^b f(x)g(x)w(x)dx \ .$$

تذکر ۱.۱.۱ تابع وزن $w(x)$ می‌تواند در یک یا هر دو نقطه انتهایی بازه (a,b) نامتناهی شود و حاصل ضرب داخلی را می‌توان به حالتی که بازه انتگرال گیری نامتناهی است گسترش داد. در این حالات فرض بر این است که انتگرال توابع $f(x)$، $g(x)$ و $w(x)$ همگرا می‌باشد. چون تابع وزن $w(x)$ نامنفی است پس اگر،

$$\int_a^b w^{\frac{1}{2}}(x)g(x)dx < \infty \qquad , \qquad \int_a^b w^{\frac{1}{2}}(x)f(x)dx < \infty \ ,$$

در این صورت بنا به نامساوی هولدر [1] داریم:

$$\int_a^b w(x)f(x)g(x)dx \le \Big(\int_a^b w^{\frac{1}{2}}(x)f(x)dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_a^b w^{\frac{1}{2}}(x)g(x)dx\Big)^{\frac{1}{2}} < \infty \ .$$

قضیه ۱.۱.۱ (وایرشتراس) [2] اگر تابع $f(x)$ بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشد در این صورت به ازای هر $\varepsilon > 0$ وجود دارد یک $n=n(\varepsilon)$ و یک چند جمله‌ای $P_n(x)$ بطوریکه به ازای هر $x\in[a,b]$،

$$\Big|f(x)-P_n(x)\Big| < \varepsilon \ .$$

برای اثبات به مرجع [۹] مراجعه شود.

[1] Holder

[2] Weierstrass

تعریف ۲.۱.۱ دنباله توابع $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ را نسبت به تابع وزن $w(x)$ بر بازه (a,b) متعامد گوییم، هرگاه:

$$\forall \;\; n\neq m \quad ; \quad \Big(\varphi_n(x),\varphi_m(x)\Big)=0 \;\; .$$

لم ۱.۱.۱ دنباله $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ از چند جمله‌ایها، یک دنباله متعامد نسبت به تابع وزن $w(x)$ بر بازه (a,b) است اگر و فقط اگر به ازای هر عدد صحیح و مثبت n و هر عدد صحیح نامنفی m کوچکتراز n داشته باشیم: $\Big(\varphi_n(x),x^m\Big)=0$.

برای اثبات به مرجع [۶] مراجعه شود.

قضیه ۲.۱.۱ (گرام –اشمیت [۱]) دنباله‌ای متعامد مانند $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ نسبت به تابع وزن $w(x)$ روی بازه (a,b) وجود دارد. در واقع دنباله‌ای منحصر به فرد با خواص اضافی زیر ساختنی است.

۱–ضریب x^n در $\varphi_n(x)$ مثبت است.

۲ـهمواره $\Big(\varphi_n(x),\varphi_n(x)\Big)=1$، یعنی $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ متعامد یکه است.

برای اثبات به مرجع [۳] مراجعه شود.

قضیه ۳.۱.۱ (استقلال خطی چند جمله‌ایهای متعامد): فرض کنید $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ دنباله‌ای از چند جمله‌ایهای متعامد نسبت به تابع وزن $w(x)$ باشد در این صورت چند جمله‌ای‌های $\varphi_n(x)$ مستقل خطی هستند.

برای اثبات به مرجع [۴] مراجعه شود.

قضیه ۴.۱.۱ فرض کنید $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ دنباله‌ای از چندجمله‌ایهای متعامد نسبت به تابع وزن $w(x)$ روی بازه $[a,b]$ باشد. اگر $f(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه m باشد آنگاه داریم :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{m}\frac{\Big(f(x),\varphi_n(x)\Big)}{\Big(\varphi_n(x),\varphi_n(x)\Big)}\varphi_n(x) \;\; .$$

[۱] Gram-Schmidt

برای اثبات به مرجع [۱۱] مراجعه شود.

تعریف ۳.۱.۱ (ماتریس واندرموند [۱])
یک ماتریس واندرموند $N \times N$ به طور کامل توسط N عدد دلخواه $x_1, x_2, ..., x_N$ تعیین می‌گردد بطوریکه N^2 مولفه‌های آن توانهای صحیحی به صورت x_i^{j-1} برای $i, j = 1, ..., N$ هستند. واضح است که با توجه به عبارت فوق به دو صورت می‌توانیم ماتریس واندرموند را معرفی کنیم که عبارتند از:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{N-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \cdots & x_N^{N-1} \end{pmatrix} \quad , \quad V_2 = V_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_N \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{N-1} & x_2^{N-1} & \cdots & x_N^{N-1} \end{pmatrix} .$$

بوسیله چند جمله‌ایهای لاگرانژ [۲] می‌توان نشان داد که این ماتریس وارون پذیر است.
برای اثبات به مرجع شماره [۹] مراجعه شود.

قضیه ۵.۱.۱ دنباله $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ وجود دارد بطوریکه $P_n(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه n می‌باشد و،

$$\forall \;\; n \neq m \quad ; \quad \Big(P_n(x), P_m(x)\Big) = \int_a^b w(x) P_n(x) P_m(x) dx = 0 \;\; ,$$

و مولفه چند جمله‌ای $P_n(x)$ صرفنظر از ضریب ثابت a_n از جمله x^n یکتاست.
اثبات: دو روش برای اثبات این قضیه می‌توان ارائه کرد [۴].
روش اول: فرض می‌کنیم که مولفه عمومی دنباله به صورت زیر،

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0 \;\; ,$$

باشد در این صورت هدف ما بدست آوردن ضرایب $a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ می‌باشد لذا برای یافتن این n مجهول به n معادله احتیاج داریم که طبق فرض قضیه می‌توان n معادله زیر را داشته باشیم:

$$\int_a^b w(x) \Big[a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1} x^{n-1} + x^n\Big] x^k dx = 0 \;\; ; \;\; k = 0, 1, ..., n-1 \;\; ,$$

و می‌توان نوشت:

---
[۱] Vandermonde
[۲] Lagrang

$$\begin{cases} k=0 \longrightarrow \int_a^b w(x)[a_0+a_1x+...+a_{n-1}x^{n-1}+x^n]dx=0 \\ k=1 \longrightarrow \int_a^b w(x)[a_0x+a_1x^2+...+a_{n-1}x^n+x^{n+1}]dx=0 \\ \vdots \\ k=n-1 \longrightarrow \int_a^b w(x)[a_0x^{n-1}+a_1x^n+...+a_{n-1}x^{2n-2}+x^{2n-1}]dx=0 \end{cases},$$

حال اگر $c_k=\int_a^b w(x)x^k dx$ برای $k=0,1,2,...$ باشد. پس دستگاه معادلات فوق به صورت زیر خواهد شد:

$$\begin{cases} a_0c_0+a_1c_1+...+a_{n-1}c_{n-1}=-c_n \\ a_0c_1+a_1c_2+...+a_{n-1}c_n=-c_{n+1} \\ \vdots \\ a_0c_{n-1}+a_1c_n+...+a_{n-1}c_{2n-2}=-c_{2n-1} \end{cases},$$

این دستگاه n معادله، n مجهولی وقتی دارای جواب یکتایی نمی‌باشد که:

$$det\ C = det \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{2n-2} \end{pmatrix} = 0 .$$

و این معادل آنست که ما فرض کنیم، می‌توانیم ثابتهای غیرصفر $b_0,b_1,...,b_{n-1}$ را طوری بیابیم که ترکیب خطی از سطرهای دترمینان بالا صفر باشد، یعنی:

$$\begin{cases} b_0c_0+b_1c_1+...+b_{n-1}c_{n-1}=0 \\ b_0c_1+b_1c_2+...+b_{n-1}c_n=0 \\ \vdots \\ b_0c_{n-1}+b_1c_n+...+b_{n-1}c_{2n-2}=0 \end{cases},$$

با توجه به تعریف c_k می‌توان دستگاه بالا را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} \int_a^b w(x)[b_0+b_1x+...+b_{n-1}x^{n-1}]dx=0 \\ \int_a^b w(x)[b_0+b_1x+...+b_{n-1}x^{n-1}]xdx=0 \\ \vdots \\ \int_a^b w(x)[b_0+b_1x+...+b_{n-1}x^{n-1}]x^{n-1}dx=0 \end{cases}, \qquad (1.1)$$

حال معادله اول از دستگاه (۱.۱) را در b_0 و معادله دوم را در b_1 و به همین ترتیب معادله n ام را در b_{n-1} ضرب کرده و نتیجه را با هم جمع می‌کنیم در این صورت داریم:

$$\int_a^b w(x)\Big[b_0 + b_1 x + ... + b_{n-1}x^{n-1}\Big]^2 dx = 0 \quad , \tag{۲.۱}$$

چون ثابتهای b_i برای $i = 0, 1, ..., n-1$ تماماً صفر نیستند لذا چند جمله‌ای $b_0 + b_1 x + ... + b_{n-1}x^{n-1}$ معادل صفر نمی‌باشند. و لذا،

$$\int_a^b w(x)\Big[b_0 + b_1 x + ... + b_{n-1}x^{n-1}\Big]^2 dx > 0 \quad ,$$

می‌باشد که خلاف رابطه (۲.۱) است پس $det\ C \neq 0$ می‌باشد و لذا دستگاه جواب یکتا دارد.

روش دوم: برای چند جمله‌ای $P_0(x)$ داریم که $P_0(x) = a_0$ و لذا چند جمله‌ای بعدی $P_1(x) = a_1 x + b_1$ توسط $\int_a^b w(x)P_0(x)P_1(x)dx = 0$ تعیین می‌گردد.

$$\int_a^b w(x)P_0(x)P_1(x)dx = a_0(a_1\mu_1 + b_1\mu_0) = 0 \Longrightarrow b_1 = -a_1\frac{\mu_1}{\mu_0} \quad ,$$

حال فرض کنید که چند جمله‌ای‌های $P_0(x), P_1(x), ..., P_n(x)$ را برای $n \geq 1$ بدست آورده باشیم و بخواهیم $P_{n+1}(x) = a_{n+1}x^{n+1} + a_n x^n + ... + a_0$ را بسازیم. ظاهراً ممکن است چندجمله‌ای $P_{n+1}(x)$ را به فرم زیر جستجو کنیم:

$$P_{n+1}(x) = \frac{a_{n+1}}{a_n}xP_n(x) + \sum_{k=1}^{n+1} c_k P_{n+1-k}(x) \quad , \tag{۳.۱}$$

که ضرایب $c_1, c_2, ..., c_{n+1}$ مجهول هستند لذا طرفین عبارت بالا را در $w(x)P_m(x)$ که $m = 0, 1, ..., n$ ضرب کرده و سپس روی بازه $[a, b]$ انتگرال گیری می‌کنیم این سبب می‌شود که داشته باشیم:

$$\int_a^b w(x)P_m(x)P_{n+1}(x)dx = \frac{a_{n+1}}{a_n}\int_a^b w(x)xP_m(x)P_n(x)dx$$

$$+\sum_{k=1}^{n+1} c_k \int_a^b w(x)P_m(x)P_{n+1-k}(x)dx \quad ; \quad m = 0, 1, ..., n \quad ,$$

بنابراین طبق فرض مساله روابط زیر برقرار می‌باشند:

$$\begin{aligned} 0 &= c_{n+1-m}\int_a^b w(x)P_m^2(x)dx \quad ; \qquad m = 0, 1, ..., n-2 \quad , \\ 0 &= \frac{a_{n+1}}{a_n}\int_a^b w(x)xP_{n-1}(x)P_n(x)dx + c_2\int_a^b w(x)P_{n-1}^2(x)dx \quad , \\ 0 &= \frac{a_{n+1}}{a_n}\int_a^b w(x)P_n^2(x)dx + c_1\int_a^b w(x)P_n^2(x)dx \quad , \end{aligned} \tag{۴.۱}$$

لذا طبق روابط بالا $m = ۰, ۱, ..., n - ۲$ و $c_{n+۱-m} = ۰$ می‌باشد پس عبارت (۳.۱) به صورت زیر قابل ارائه می‌باشد،

$$P_{n+۱}(x) = \frac{a_{n+۱}}{a_n} x P_n(x) + c_۱ P_n(x) + c_۲ P_{n-۱}(x) \ ,$$

که ثابتهای $c_۱$ و $c_۲$ توسط معادله دوم و سوم از رابطه (۴.۱) تعیین می‌گردد و لذا چند جمله‌ای $P_{n+۱}(x)$ توسط عبارت بالا کاملاً مشخص می‌گردد. بر عکس به راحتی می‌توان نشان داد که چند جمله‌ای $P_{n+۱}(x)$ در رابطه زیر،

$$\int_a^b w(x) P_{n+۱}(x) P_k(x) dx = ۰ \quad ; \quad k = ۰, ۱, ..., n \ ,$$

صدق می‌کند و لذا قضیه ثابت شده است. ■

قضیه ۶.۱.۱ در میان هر سه جمله‌ای متوالی از مجموعه متعامد قضیه قبل یک فرمول بازگشتی به صورت زیر وجود دارد:

$$x P_n(x) = A_n P_{n+۱}(x) + B_n P_n(x) + C_n P_{n-۱}(x) \quad ; \ n = ۰, ۱, ۲.... \ .$$

که در آن A_n، B_n و C_n اعدادی حقیقی و ثابت می‌باشند [۱].

اثبات: با توجه به قضیه قبل می‌توان نوشت:

$$P_{n+۱}(x) = \frac{a_{n+۱}}{a_n} x P_n(x) + c_۱ P_n(x) + c_۲ P_{n-۱}(x) \ ,$$

$$\Longrightarrow x P_n(x) = \frac{a_n}{a_{n+۱}} P_{n+۱}(x) - \frac{a_n}{a_{n+۱}} c_۱ P_n(x) - \frac{a_n}{a_{n+۱}} c_۲ P_{n-۱}(x) \ ,$$

و لذا می‌توان گفت:

$$A_n = \frac{a_n}{a_{n+۱}} \quad , \quad B_n = -\frac{a_n}{a_{n+۱}} c_۱ \quad , \quad C_n = -\frac{a_n}{a_{n+۱}} c_۲ \ ,$$

حال با توجه به عبارتهای دوم و سوم از رابطه (۴.۱) در قضیه قبل می‌توان نوشت:

$$A_n = \frac{a_n}{a_{n+۱}} \quad , \ B_n = \frac{\int_a^b w(x) x P_n^۲(x) dx}{\int_a^b w(x) P_n^۲(x) dx} \ ,$$

$$C_n = \frac{\int_a^b w(x) x P_{n-۱}(x) P_n(x) dx}{\int_a^b w(x) P_{n-۱}^۲(x) dx} = \frac{a_{n-۱}}{a_n} \frac{\int_a^b w(x) P_n^۲(x) dx}{\int_a^b w(x) P_{n-۱}^۲(x) dx} \ ,$$

توجه داشته باشید که عبارت دیگری برای B_n با قرار دادن چندجمله‌ای $P_n(x) = a_nx^n + b_nx^{n-۱} + ... + a_۰$ در عبارت زیر،

$$xP_n(x) = A_nP_{n+۱}(x) + B_nP_n(x) + C_nP_{n-۱}(x) \quad ; \quad n = ۰, ۱, ... \quad ,$$

و مساوی قرار دادن ضرایب $x^{n+۱}$ و x^n در هر دو طرف آن می‌توان بدست آورد که به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{cases} a_n = A_na_{n+۱} \quad , \\ b_n = A_nb_{n+۱} + B_na_n \quad , \\ A_n = \frac{a_n}{a_{n+۱}} \quad , \end{cases} \Longrightarrow B_n = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+۱}}{a_{n+۱}} \quad .$$

■

قضیه ۷.۱.۱ فرض کنید مجموعه متعامد $\{P_n(x) = a_nx^n + a_{n-۱}x^{n-۱} + ... + a_۰\}_{n=۰}^{\infty}$ موجود باشد آنگاه اتحاد زیر که به اتحاد کریستوفل — داربوکس[۱] معروف است برقرار می‌باشد [۱, ۲].

$$\sum_{k=۰}^{n} P_k(x)P_k(y) = \frac{a_n}{a_{n+۱}} \frac{P_{n+۱}(x)P_n(y) - P_{n+۱}(y)P_n(x)}{x-y} \quad ; \; n = ۰, ۱, ۲, ... \; .$$

اثبات: با توجه به قضیه قبل داریم:

$$xP_k(x) = A_kP_{k+۱}(x) + B_kP_k(x) + C_kP_{k-۱}(x) \quad ; \; k = ۰, ۱, ۲, ... \quad , \qquad (۵.۱)$$

$$A_k = \frac{a_k}{a_{k+۱}} \quad , \; B_k = \frac{\int_a^b w(x)xP_k^۲(x)dx}{\int_a^b w(x)P_k^۲(x)dx} \quad , C_k = \frac{a_{k-۱}}{a_k} \frac{\int_a^b w(x)P_k^۲(x)dx}{\int_a^b w(x)P_k^۲(x)dx} = \frac{a_{k-۱}}{a_k} \; ,$$

حال اگر دو طرف رابطه (۵.۱) را در چند جمله‌ای $P_k(y)$ ضرب کنیم داریم:

$$xP_k(x)P_k(y) = \frac{a_k}{a_{k+۱}}P_{k+۱}(x)P_k(y) + B_kP_k(x)P_k(y)$$

$$+\frac{a_{k-۱}}{a_k}P_{k-۱}(x)P_k(y) \quad ; \quad k = ۰, ۱, ۲, ... \quad ,$$

در رابطه بالا جای x و y را عوض کرده و عبارت حاصله را از عبارت فوق کم می‌کنیم که در این صورت عبارت زیر حاصل خواهد شد:

$$(x-y)P_k(x)P_k(y) = \frac{a_k}{a_{k+۱}}\Big[P_{k+۱}(x)P_k(y) - P_{k+۱}(y)P_k(x)\Big]$$

---
۱ Christoffel-darboux

$$-\frac{a_{k-۱}}{a_k}\Big[P_k(x)P_{k-۱}(y)-P_k(y)P_{k-۱}(x)\Big] \quad ; \; k=۰,۱,۲,... \;,$$

بادرنظرگرفتن $P_{-۱}(x)=۰$ و جمع کردن برای $k=۰,۱,۲,...,n$ خواهیم داشت:

$$(x-y)\sum_{k=۰}^{n}P_k(x)P_k(y)=\frac{a_n}{a_{n+۱}}\Big[P_{n+۱}(x)P_n(y)-P_{n+۱}(y)P_n(x)\Big] \;,$$

که این معادل حکم قضیه می‌باشد.■

قضیه ۸.۱.۱ فرض کنید چند جمله‌ای $P_n(x)$ به ازای $n=۰,۱,۲,...$ چند جمله‌ایهای متعامد روی بازه $[a,b]$ نسبت به تابع وزن $w(x)$ باشد، آنگاه ریشه‌های چند جمله‌ای $P_n(x)$ به ازای $n=۰,۱,۲,...$ که به صورت x_j برای $j=۱,۲,...,n$ می‌باشند، تماماً حقیقی، ساده و درون بازه $[a,b]$ هستند [۲].

اثبات: فرض کنید $x_۱,x_۲,...,x_r$ ریشه‌های چند جمله‌ای $P_n(x)$ در بازه (a,b) باشند که هر کدام از ریشه‌ها در تعداد مناسبی تکرار شده باشند. آنگاه چند جمله‌ای $Q_r(x)=(x-x_۱)(x-x_۲)...(x-x_r)$ تغییر علامت دارد هر کجا که چند جمله‌ای $P_n(x)$ در بازه (a,b) تغییر علامت می‌دهد و درجه چند جمله‌ای $Q_r(x)$ عبارت $n\geq r$ می‌باشد، بنابراین چند جمله‌ای $P_n(x)Q_r(x)$ در بازه (a,b) دارای یک علامت است و لذا با توجه به تعریف تابع وزن داریم:

$$\int_a^b P_n(x)Q_r(x)w(x)dx \neq ۰ \;,$$

ولیکن این مطلب تنها برای $r=n$ درست می‌باشد زیرا $P_n(x)$ چند جمله‌ای متعامد نسبت به تابع وزن $w(x)$ می‌باشد. پس تعداد n ریشه حقیقی دربازه (a,b) وجود دارد.
حال ثابت می‌کنیم که ریشه‌های موجود در بازه (a,b) همگی ساده هستند برای این منظور به برهان خلف عمل می‌کنیم فرض کنید $x_۱$ ریشه ساده نباشد و چند جمله‌ای $P_n(x)$ دارای ریشه مضاعف باشد در این صورت داریم:

$$P_n(x)=(x-x_۱)^۲P_{n-۲}(x) \;,$$

که $P_{n-۲}(x)$ از درجه $(n-۲)$ است. اما در این صورت داریم:

$$P_n(x)P_{n-۲}(x)=\left[\frac{P_n(x)}{(x-x_۱)}\right]^۲ \geq ۰ \;,$$

و بنابراین:

$$\int_a^b P_n(x)P_{n-۲}(x)w(x)dx > ۰ \;,$$

اما این متناقض با متعامد بودن چند جمله‌ای $P_n(x)$ می‌باشد. لذا x_1 باید یک ریشه ساده باشد. ■

قضیه ۹.۱.۱ فرض کنید بازه $[a,b]$ از نوع بازه $[-c,c]$ باشد و تابع وزن $w(x)$ یک تابع زوج باشد. آنگاه چند جمله‌ای متعامد $P_n(x)$ یک تابع زوج (فرد) است، اگر n عددی زوج (فرد) باشد.

اثبات: در نظر بگیرید:

$$I_n = \int_{-c}^{c} w(x)\pi_{n-1}(x)P_n(-x)dx \quad ; \quad n = 1, 2, \dots \quad ,$$

که در آن $\pi_{n-1}(x)$ هر چند جمله‌ای از درجه کمتر یا مساوی $(n-1)$ تعریف شده است. روی انتگرال بالا تغییر متغیر $x = -t$ را اعمال می‌کنیم و لذا داریم:

$$I_n = \int_{-c}^{c} w(t)\pi_{n-1}(-t)P_n(t)dt \quad , \qquad (6.1)$$

با توجه به خاصیت متعامد چند جمله‌ای $P_n(x)$ داریم که $I_n = 0$. بنابراین از تساوی $I_n = 0$ و رابطه (۶.۱) می‌توان نتیجه گرفت که اختلاف بین چند جمله‌ای‌های $P_n(-x)$ و $P_n(x)$ در یک عامل ثابت $(-1)^n$ می‌باشد. یعنی $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ که این اثبات را کامل می‌کند.■

قضیه ۱۰.۱.۱ هرگاه $x_0, x_1, \dots, x_n$ نقاط متمایزی در بازه $[a,b]$ بوده و تابع $f(x) \in C^{n+1}[a,b]$، آنگاه، به ازای هر x در بازه $[a,b]$ نقطه‌ای مانند $\xi(x)$ در بازه (a,b) وجود دارد با این خاصیت:

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \quad , \quad (7.1)$$

که در آن $P(x)$ چندجمله‌ای درونیاب است.

برای اثبات به مرجع [۱۱] مراجعه شود.

۲.۱ چند جمله‌ای‌های متعامد و ویژگی آنها

انواع مختلف چند جمله‌ای‌ها نقش مهمی در ریاضیات کاربردی و آنالیز عددی ایفا می‌کنند. همانطور که چند جمله‌ای‌های چبیشف[۱] در نظریه تقریب، کاربرد فراوان دارند و چند جمله‌ای‌های لژاندر[۲]، لاگر[۳] و هرمیت[۴] در نظریه انتگرال گیری عددی کاربرد دارند. همه این چند جمله‌ای‌ها خانواده‌های متعامد هستند و همچنین در معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم مشخصی صدق می‌کنند. بعلاوه اینکه با استفاده از هر سه جمله با درجات متوالی، می‌توان یک رابطه بازگشتی کلی بین آنها تعریف کرد [۸].

حالتهای خاص از چند جمله‌ای‌های متعامد مربوط به تابع وزن

سه حالت خاص از تابع وزن را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

الف) $w(x) = (b-x)^{\alpha}(x-a)^{\beta}$; $\alpha > -۱$; $\beta > -۱$; a, b متناهی ,

ب) $w(x) = (x-a)^{\alpha}e^{-k(x-a)}$; $k > ۰$; $\alpha > -۱$; b نامتناهی مثبت ; a متناهی ,

ج) $w(x) = e^{hx-kx^{۲}}$; $k > ۰$; b نامتناهی مثبت ; a نامتناهی منفی ,

که تابع وزن $w(x)$ توسط جواب واقعی از معادلات دیفرانسیل زیر به ترتیب جدا از فاکتور ثابت معین می‌گردد.

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = \frac{\alpha\, a + \beta b - (\alpha+\beta)x}{(b-x)(x-a)} \ ,$$

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = \frac{\alpha + k\, a - kx}{x-a} \ ,$$

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = h - ۲kx \ ,$$

[۱] Chebyshev
[۲] Legendre
[۳] Laguerre
[۴] Hermite

در هر سه حالت در نظر گرفته شده خواص زیر برقرار است.

خاصیت ۱) تابع $w(x)$ جوابی از معادله دیفرانسیل از نوع زیر است.

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = \frac{D+Ex}{A+Bx+Cx^{۲}} \quad , \quad (\text{که } A,B,C,D,E \text{ اعدادی حقیقی و ثابت هستند}) \; .$$

خاصیت ۲) حاصلضرب $(A+Bx+Cx^{۲})w(x)$ برای $x=a$ یا برای $x=b$ به سمت صفر میل می‌کند.

قضیه ۱.۲.۱ در سه حالت الف، ب و ج چند جمله‌ای $P_n(x)$ از مجموعه متعامد یک جواب از معادله دیفرانسیل خطی همگن از مرتبه دو زیر است.

$$\Big[A+Bx+Cx^{۲}\Big]y'' + \Big[B+D+(۲C+E)x\Big]y' - n\Big[(n+۱)C+E\Big]y = ۰ \quad .$$

اثبات: انتگرال زیر را در نظر بگیرید:

$$I_n = \int_a^b \pi_{n-۱}(x)\frac{d}{dx}\Big[(A+Bx+Cx^{۲})w(x)P_n'(x)\Big]dx \quad ,$$

که $\pi_{n-۱}(x)$ یک چند جمله‌ای دلخواه از درجه $(n-۱)$ می باشد ثابت می‌کنیم که $I_n=۰$. در عمل با انتگرال گیری جزء به جزء و حفظ خواص (۱) و (۲) داریم:

$$I_n = \Big[\pi_{n-۱}(x)(A+Bx+Cx^{۲})w(x)P_n'(x)\Big]_a^b - \int_a^b (A+Bx+Cx^{۲})w(x)P_n'(x)\pi_{n-۱}'(x)dx$$

$$= -\int_a^b (A+Bx+Cx^{۲})w(x)\pi_{n-۱}'(x)P_n'(x)dx$$

$$= -\Big[(A+Bx+Cx^{۲})w(x)\pi_{n-۱}'(x)P_n(x)\Big]_a^b +$$

$$\int_a^b P_n(x)\Big[(B+۲Cx)w(x)\pi_{n-۱}'(x) + (A+Bx+Cx^{۲})w'(x)\pi_{n-۱}'(x)$$

$$+(A+Bx+Cx^{۲})w(x)\pi_{n-۱}''(x)\Big]$$

$$= \int_a^b P_n(x)\Big[(B+۲Cx)w(x)\pi_{n-۱}'(x) + (D+Ex)w(x)\pi_{n-۱}'(x)$$