بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی

گروه محض

خودریختی های از مرتبه عدد اول با رتبه مرکز ساز پایین

دانشجو

محمود بزی جوان

استادراهنما

سید حیدر جعفری

استاد مشاور

ابراهیم هاشمی

پایان نامه جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد

چکیده

فرض کنید G یک گروه متناهی باشد و φ را یک خودریـختی از مرتبه عدد اول p از گروه متناهی G در نظر بگیرید و $C_G(\varphi)$ را زیرگروه‌نقطه‌ثابت از آن در نظر می‌گیریم. با استفاده از قضیه کلاسیک **تامپسون** داریم اگـــر φ یک خودریختی منظم باشد (یا بطور معادل $C_G(\varphi)=1$) آنگاه G پوچتوان است و همچنین نشان داد که اگرهر φ تقریبا منظم باشد آنگاه G نیز باید تقریبا پوچتوان باشد. به عبارتی اگر $|C_G(\varphi)|=n$ آنگاه G یک زیر گـــــــروه پوچتوان از شاخص کراندارشده نسبت به p و n دارد که به اختصار آن‌را (p,n)-کراندارشده گوییم. این نتیجه ترکیبی از کارهای **فونگ** در[1] و **هارتلی** و **میکسنر**در [6] و **پتت** در [8] است. در این تحقیق ما می‌بینیم که خودریختی φ " تقریبا منظم" است اگر یک تحدید روی رتبه $C_G(\varphi)$ وجود داشته باشد و متقابلا G دارای خاصیت " تقریبا پوچتوان" است هرگاه هر خودریختی G تقریبا منظم باشد.

ما از رده بندی گروه های متناهی در اثبات حالت تقریبا حل پذیر بودن و در حالت هم اول بودن استفاده می کنیم و اثبات می کنیم که رتبه $\frac{G}{S(G)}$ برحسب p و r کراندار شده است. برای گروه های حل پذیر نیز ترکیب نتیجه هال – هیگمن با زیرگروه های p - قدرتمند، تقریبا پوچتوانی را نشان می دهد که نشان می دهیم این شرایط در حالت غیر هم اول نیز برقرار است.

فهرست مطالب

فصل ششم: زیرگروه های مشخصه نرمال

فصل هفتم:نتایج اصلی

مقدمه

فرض کنید G یک گروه باشد و φ را یک خودریـختی از مرتبه عدد اول p از گروه متناهی G در نظر بگیرید و $C_G(\varphi)$ را زیرگروه‌نقطه‌ثابت از آن در نظـــر می‌گیریم و خودریخـــــتی φ " تقریبا منظم" است اگر یک تحدید روی رتبه $C_G(\varphi)$ وجود داشته باشد و متقابلا G دارای خاصیت " تقریبا پوچتوان" است هرگاه هر خودریختی G تقریبا منظم باشد. با استفاده از قضیه کلاسیک **تامپسون**[1] [17] اگـــر φ یک خودریختی منظم[2] باشد (یا بطور معادل $C_G(\varphi)=1$) آنگاه G پوچتوان است و به‌وضوح می‌بینیم که اگرهر φ تقریبا منظم[3] باشد آنگاه G نیز باید تقریبا پوچتوان باشد. به عبارتی اگر $|C_G(\varphi)|=n$ آنگاه G یک زیر گـــــــروه پوچتوان از شاخص کراندارشده نسبت به p و n دارد که به اختصار آن‌را (p,n)-کراندارشده گوییم. این نتیجه ترکیبی از کارهای **فونگ**[4] در[2] و **هارتلی**[5] و **میکسنر**[6] در [9] و **پتت**[7] در [11] است. در این تحقیق ما می‌بینیم که خودریختی φ " تقریبا منظم" است اگر یک تحدید روی رتبه $C_G(\varphi)$ وجود داشته باشد و متقابلا G دارای خاصیت " تقریبا پوچتوان" است هرگاه هر خودریختی G تقریبا منظم باشد.

با استفاده از قضیه **هیگمن** می دانیم کلاس پوچتوانی گروه های پوچتوان با خودریختی های از مرتبه عدد اول p ؛ P-کراندار است. با استفاده از قضیه **خوخرو**[8] در [12,13] ؛ داریم ، اگر گروه G پوچتوان باشد و $|C_G(\varphi)|=n$ باشد آنگاه G دارای یک زیرگروه از شاخص (p,n)-کراندار است که کلاس پوچتوانی اش P-کراندار است. بنابراین اگر G پوچتوان

[1] Thompson
[2] Regular Automorphism
[3] Almost Regular
[4] P. Fong
[5] Hartlly
[6] Mixner
[7] Pettet
[8] E. I. Khukhro

باشد آنگاه $C_G(\varphi)$ از رتبه $r-$کراندار است. آنگاه G باید یک زیرگروه از هم رتبه $(p,n)-$کراندار داشته باشد که کلاس پوچتوانی اش $p-$کراندار است و یک زیرگروه نرمال از کلاس پوچتوانی $p-$کراندار با خارج قسمت از رتبه $(p,n)-$کراندار دارد.

با استفاده از قضیه **هیگمن [5]** می دانیم کلاس پوچتوانی گروه های پوچتوان با خودریختی های از مرتبه عدد اول p، $p-$کراندار است. با استفاده از قضیه **خوخرو** در [12,13]، داریم، اگر گروه G پوچتوان باشد و $|C_G(\varphi)|=n$ باشد آنگاه G دارای یک زیرگروه از شاخص $(p,n)-$کراندار است که کلاس پوچتوانی اش $p-$کراندار است. بنابراین اگر G پوچتوان باشد آنگاه $C_G(\varphi)$ از رتبه $r-$کراندار است. آنگاه G باید یک زیرگروه از هم رتبه $(p,n)-$کراندار داشته باشد که کلاس پوچتوانی اش $p-$کراندار است و یک زیرگروه نرمال از کلاس پوچتوانی $p-$کراندار با خارج‌قسمت از رتبه $(p,n)-$کراندار دارد.

در فصل اول تعدادی لم و نتیجه مقدماتی می آوریم که در فصل های بعدی استفاده می‌شود. در فصل دوم ما کرانداری $\frac{G}{S(G)}$ را اثبات می کنیم. در فصل سوم قضیه **هال - هیگمن** را معرفی و بیان می کنیم. در فصل **4**، گزاره 4-1 را اثبات می کنیم که این نتیجه کمی بهتر از حالت هم اول بودن را به ما می‌دهد که می گوییدکه اگر G از رتبه فرد باشد آنگاه G یک زیرگروه مشخصه R از رتبه $(p,n)-$کراندار دارد به‌قسمی‌که $[G,\varphi]\ /R$ پوچتوان است.

قضیه (الف): فرض کنید G یک $p'-$گروه باشد که یک خودریختی φ از مرتبه عدد اول p دارد به قسمی که $C_G(\varphi)$ دارای رتبه r است. فرض کنید که $S(G)$ رادیکال حل پذیر G باشد در این صورت خارج قسمت $G/S(G)$؛ رتبه $(p,n)-$کراندار دارد . بنابراین G دارای

زیرگروه های مشخصه $R \le N \le G$ است به قسمی که N/R پوچتوان است و G/N و R دارای رتبه (p,n) - کراندارند.

قضیه (ب): فرض کنید گروه متناهی G ؛ خودریختی φ از مرتبه عدد اول p با زیرگروه $C_G(\varphi)$ از رتبه r دارد . بنابراین G دارای زیرگروه ه های مشخصه $R \le N \le G$ است به قسمی که N/R پوچتوان است و G/N و R دارای رتبه (p,n) - کراندارند .

نتیجه: فرض کنید G یک گروه متناهی موضعا حل چذیر است و g یک عنصر از مرتبه p که $C_G(g)$ از رتبه r باشد. آنگاه G دارای زیرگروه های نرمال $R \le N \le G$ است که N/R موضعا پوچتوان است و G/N و R ؛ دارای رتبه (p,n) - کراندارند .

در فصل **5** ما در مورد اینکه قضیه ب، در حالت ضعیف تر زیرگروه زیرنرمال نسبت به حالت زیرگروه مشخصه اثبات شده است بحث می کنیم. در فصل **6** ما زیرگروه‌های نرمال را جایگزین زیرگروه‌های مشخصه می کنیم و در فصل **7** ما می توانیم نتایج اصلی را بین کنیم و اثبات هایمان را تکمیل کنیم.

فصل اول

تعاریف پایه

مجموعه همه نگاشت های دوسویی از یک فضای برداری Vروی میدان K یک زیر گروه از S_V است که با $GL(V)$ نمایش داده می‌شود و $GL_n(K)$ مجموعه همه ماتریس های وارون پذیر $n \times n$ روی میدان K با عمل ضرب ماتریس ها یک گروه تشکیل می‌دهد که اگر V از بعد n باشد آنگاه برای هر تبدیل خطی از V یک یکریختی بین $GL(V)$ و $GL_n(K)$وجود دارد.

از این پس عنصر همانی از گروه G یا زیر گروه بدیهی از آن را با 1 نمایش می دهیم و اگر H زیر گروهی از G باشد می نویسیم $H \le G$ یا $G \ge H$ و اگر $H < G$ می‌گوییم H زیر گروه محض از G است.

یک خودریختی φ را از رتبه پایین می نامیم هرگاه $|C_G(\varphi)| < m$، که m یک عدد صحیح است.

شاخص زیرگروه H در G را با $|G:H|$ نمایش می دهیم و یادآوری می کنیم که $|G:H\cap K| \le |G:K||G:H|$و اشتراک n زیرگروه از شاخص حداکثر m شاخص (m,n)−کراندارشده دارد که کوچک تر یا مساوی با n است.

مزدوج x نسبت به g را با نماد x^g نمایش می دهیم و به صورت $x^g = g^{-1}xg$ تعریف می کنیم. برای هر زیرمجموعه M از گروه G داریم: $M^g = \{g^{-1}mg \,|\, m \in M\}$. می‌گوییم H زیر گروه نرمال از G است اگروتنهااگر برای هر $g \in G$ داشته باشیم $H^g = H \Leftrightarrow Hg = gH$ و می نویسیم $H \lhd G$.

اگر G یک p-گروه باشد آنگه زیر گروه $\Omega_i(G)$را به صورت زیر تعریف می کنیم: $\Omega_i(G) = \langle g \in G \,|\, g^{p^i} = 1 \rangle$.

1-1 تعاریف

1-1-1 رتبه گروه[1] : رتبه یک گروه برابر با کمترین تعداد مولد های یک گروه است به عبارتی $rank(G) = \min\{\,|X| \mid X \subseteq G, \langle X \rangle = G\}$

2-1-1مرتبه گروه[2]: تعداد عناصر یک گروه را مرتبه گروه می نامیم.

3-1-1زیرگروه جابجاگر[3]: فرض کنید H و K زیرگروه‌هایی از گروه G باشند جابجاگر H و K به صورت $[H,K] = \langle [h,k] \mid h \in H . k \in K \rangle$ تعریف می گردد که $[h,k] = h^{-1}k^{-1}hk$. اگر H و K زیرگروه‌های مشخصه گروه G باشند آنگاه $[H,K]$ نیز زیرگروه مشخصه از G است بنابراین چون G در خودش نیز مشخصه است پس $[G,G] = G'$ زیرگروه مشخصه G است.

4-1-1 گروه موضعاً متناهی[4]: گروه G را موضعاً متناهی گوییم هرگاه هر زیرگروه با تولید متناهی آن، متناهی باشد. به عنوان مثال:

1. تمام گروه های متناهی، موضعاً متناهی اند.

2. هر مجموع مستقیم نامتناهی از گروه های متناهی، موضعاً متناهی است.

---

[1] Rank
[2] Order
[3] Commutator Subgroup
[4] Locally Finite Group

3. گروه های هامیلتونی، موضعاً متناهی اند.(گروه غیرآبلی متناهی G را هامیلتونی گوییم هرگاه هر زیرگروه آن نرمال باشد. هرگــروه هامیلتونی به فرم $Q \times A$ است که A یک گروه آبلی از مرتبه 4 است.)

5-1-1 گروه های موضعاً پوچتوان[1]: در جبر نا جابجایی و نظریه گروه، یک جبر یا یک گروه موضعاً پوچتوان است اگــــروتنهااگـــــر هر زیرجبر با تولید متناهی از آن یا هر زیرگروه با تولید متناهی آن پوچتوان باشد.

6-1-1 p-زیرگروه‌های قدرتمند[2]: p- گروه G قدرتمند است، اگر $G' \subseteq \Omega_1(G)$.

اگر $N \lhd G$ آنگاه N به طور قدرتمند نشانده شده درG است اگر $[N,G] \subseteq \Omega_1(G)$.

بنابراین G قدرتمند است، اگروتنهااگر به طور قدرتمند نشانده شده در خودش باشد. [27]

7-1-1 گروه های ساده: گروه G را ساده گوییم هرگاه زیرگروه نرمال محض نابدیهی نداشته باشد.

8-1-1 p-گروه‌آبلی‌مقدماتی: گروه G را یک p-گروه آبلی مقدماتی گوییم هرگاه آبلی باشد و مرتبه هر عضو نابدیهی آن عدد اول p باشد لذا اگر گروه G یک p-گروه آبلی مقدماتی باشد آنگاه $G = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n$ که مرتبه هر H_i عدد اول p است.

---

[1] Locall nilpotent group
[2] Powerful p_group

9-1-1 سری زیرنرمال[1]:یک زنجیره از زیرگــــــــروه‌های گـــــــروه G مانند $1 \le G_1 \le \cdots \le G_n = G$ به‌قسمی‌که برای هر i، $i = 0,1,\ldots,n-1$، $G_i \lhd G_{i+1}$ باشد را سری زیرنـــــرمال گوییم. گروه خارج‌قسمتی $\frac{G_{i+1}}{G_i}$ را عوامل سری گویند. تعداد عوامل نابدیهی سری را طول سری گوییم و با l نمایش می دهیم.

10-1-1 سری نرمال: یک سری زیر نرمال را نرمال گوییم هرگاه برای هر i، $G_i \lhd G$.

به وضوح اگر گروه G یک گروه آبلی باشد آنگاه هر سری آن ، سری نرمال، است.

11-1-1 سری ترکیب: سری زیــــرنرمـــال $1 \le G_0 \le \cdots \le G_n = G$ را سری ترکیب گوییم هرگاه هر گروه خارج‌قسمتی $\frac{G_{i+1}}{G_i}$(عوامل سری) ساده باشد. عوامل این سری را عوامل ترکیب گویند. اگر G یکp-گروه متناهی باشد آنگاه عوامل ترکیب، گروه های بدیهی یا گروه های دوری از مرتبه p هستند.

12-1-1 سری اصلی:یک سری نرمال G_i که $1 \le i \le n$ از گروه متناهی G را یک سری اصلی نامیم هرگاه G_i یک زیرگروه محض در G_{i-1} و نرمال در G باشد و در G_{i-1} ماکسیمال باشد.

13-1-1 سری حل‌پذیر[2]: یک سری زیرنرمال از گروه G را حل‌پذیر نامند هرگاه هر عامل آن آبلی باشد.گروه G را حل‌پذیر گوییم هرگاه یک سری حل‌پذیر داشته باشد. به‌وضوح

---
[1] Subnormal series
[2] Solvable series

تمام گروه های آبلی حل‌پذیراند. گروه S_3 مثالی از یک گروه حل‌پذیر نا آبلی است زیرا $S_3 \geq A_3 \geq \{1\}$ یک سری زیرنرمال است که $\frac{S_3}{A_3} \cong Z_2$ و $A_3 \cong Z_3$. به‌وضوح هر p-گروه متناهی، حل‌پذیر است.

14-1-1 سری مرکزی: سری نرمال $1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n = G$ را مرکزی گوییم هرگاه برای $i = 0,1,2,\ldots,n-1$ داشته باشیم، $\frac{G_{i+1}}{G_i} \leq C\left(\frac{G}{G_i}\right)$. گروه G پوچتوان است اگر یک سری مرکزی داشته باشد. طول کوتاهترین سری مرکزی گروه G را رده پوچتوانی گروه G گویند. رده پوچتوانی گروه بدیهی را صفر در نظر می‌گیریم و به وضوح رده پوچتوانی گروه آبلی برابر با 1 است.

15-1-1 سری مشتق: با توجه به تعریف زیر گروه جابجاگر قرار می دهیم : $G^{(0)} = G$ و $G^{(1)} = [G,G]$ و...و $G^{(n)} = \left[G^{(n-1)}, G^{(n-1)}\right]$ و...در این صورت $G^{(2)}, G^{(3)}$ زیرگروه مشتق دوم و زیرگروه مشتق سوم گروه G نامیده می‌شوند و سری کاهشی نرمال $G = G^{(0)} \rhd G^{(1)} \rhd G^{(2)} \cdots \rhd G^{(n-1)} \rhd G^{(n)} \rhd \cdots$ سری مشتق گروه G نامیده می‌شود. به راحتی می توان اثبات کرد G حل‌پذیر است هرگاه عدد طبیعی n موجود باشد به‌قسمی‌که $G^{(n)} = 1$.

16-1-1 سری مرکزی پایینی: یک سری کاهشی از زیرگروهای $G = G_1 \rhd G_2 \rhd \ldots G_n \rhd \ldots$ است که $G_{i+1} = [G_i, G]$ که $G_2 = [G,G]$ و $G_3 = [[G,G],G] = [G_2,G]$. سری مرکزی پایینی معمولا با نماد $\gamma_n(G) = G_n$ نمایش داده

می‌شود. بنابراین مـی تـوانیم بنویـسیم $\gamma_1(G)=G$ و $\gamma_{k+1}(G)=[\gamma_k(G),G]$.به راحتی می توان اثبات کرد G پوچتوان است هرگاه عدد طبیعی n موجود باشد به‌قسمی‌که $\gamma_{n+1}(G)=1$.

17-1-1 سری مرکزی بالایی: سری $1=Z_0(G)\le Z_1(G)\le\ldots\le Z_n(G)\le\cdots$ را سری مرکزی بالایی گوییم هرگاه $\frac{Z_{n+1}(G)}{Z_n(G)}=Z\left(\frac{G}{Z_n(G)}\right)$باشد برای هر $0\le i\le n-1$. ما $Z_i(G)$را با $\zeta_i(G)$ نمایش می‌دهیم که یک زیرگروه مشخصه نیز هست.

17-1-1 نرمال ساز: نرمال ساز زیرگروه S روی گروه G مجموعه همه اعضای G است که با اعضای S جابجا می گردد. به‌عبارتی $N_G(S)=\{x\in G|xS=Sx\}$. اگر ابهامی بوجود نیاید به‌جای $N_G(S)$از نماد $N(S)$استفاده می کنیم. اگر S یک زیرگروه از G باشد آنگاه $N(S)$بزرگترین زیرگروه G است که S در آن نرمال است.

18-1-1 مرکز ساز: مرکز ساز عنصر a از گروه G مجموعه همه عناصری از گروه G است که با a جابجا می‌گردد به‌عبارت‌دیگر $C_G(a)=\{x\in G|xa=ax\}$. اگر H زیرگروهی از G باشد آنگاه $C_H(a)=C_G(a)\cap H$. از این به بعد اگـــر ابهامی نباشد به‌جای $C_G(a)$ از نمـــاد $C(a)$ استفاده می‌کنیم.

19-1-1 زیرگروه نقاط ثابت[1]: فرض کنید φ یک خودریختی از گـــــروه متناهی G باشد در این صورت زیرگـــروه $C_G(\varphi)=\{g\in G|g^\varphi=g\}$ را زیرگروه نقاط ثابت گروه φ می‌گوییم.

[1] Fixed point subgroup

1-1-20 زیرگروه‌های فیتینگ[1]: زیرگروه فیتینگ از گروه متناهی G زیرگروه تولید شده توسط همه زیرگروه‌های نرمال پوچتوان از گروه G است که با F(G) نمایش داده می‌شود به‌عبارت دیگر بزرگترین زیرگروه نرمال پوچتوان منحصر به فرد گروه G را زیر گروه فیتینگ گوییم. اگر G یک گروه نا بدیهی حل‌پذیر باشد آنگاه F(G) نیز نابدیهی است به عبارتی اگر $G \neq 1$ حل پذیر باشد آنگاه $F(G) \neq 1$. به‌طور مشابه اگر G حل پذیر باشد ولی G پوچتوان نباشد آنگاه زیرگروه فیتینگ از $\frac{G}{F(G)}$ نابدیهی است.[7]

1-1-21 ارتفاع فیتینگ[2]: اگر گروه G حل پذیر باشد کوچکترین عددصحیح n برای گروه G که برای سری $1 = F_0 \trianglelefteq F_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq F_n = G$ ،برای هر i، $\frac{F_{i+1}}{F_i}$ پوچتوان باشد را ارتفاع فیتینگ گروه G گوییم که با $f(G)$ نمایش داده مـــــی شود . اگر G یک گروه حل پذیر نابدیهی باشد آنگاه $f(G)-1 = f\left(\frac{G}{F(G)}\right)$. [7]

1-1-22 زیر گروه فراتینی[3]:اشتراک همه زیرگروه‌های ماکسیمال گروه Gرا زیرگروه فراتینی از گروه G گویند که با$\Phi(G)$ نمایش داده می‌شود و اگر G زیرگروه ماکسیمال نداشته باشد$\Phi(G)$را برابر با G تعریف می کنیم. همچنین به $\frac{G}{\Phi(G)}$ عامل فراتینی گروه G گوییم. زیرگروه‌های فراتینی دارای کاربرد فراوان در مطالعه گروه‌های متناهی هستند و دارای خصوصیاتی مفیدی هستند که به اختصار به چند مورد از آن‌ها که دارای کاربرد زیادتری در این تحقیق هستند اشاره می‌کنیم[7]:

[1] Fitting subgroup
[2] Fitting height
[3] Ferattini subgroup

1. $\Phi(G)$ پوچتوان است و به‌ویژه اینکه $\Phi(G)\leq F(G)$.

2. گروه G پوچتوان است اگروتنهااگر $\frac{G}{\Phi(G)}$ پوچتوان باشد.

3. اگر N زیرگروه نرمال گروه G باشد و $N\leq\Phi(G)$، آنگاه $F\left(\frac{G}{N}\right)=\frac{F(G)}{N}$.

4. $G'\cap Z(G)\leq\Phi(G)$.

5. اگـــــــر G_1 وG_2 و...و G_r گـــــــــروه‌های متناهی متـمایز باشـند آنـگـــــــاه $\Phi(G_1\times G_2\times\ldots\times G_r)=\Phi(G_1)\times\Phi(G_2)\times\cdots\times\Phi(G_r)$.

1-1-23 π **-خودریختی:** فرض کنید π یک مجموعه از اعداد اول باشد در این‌صورت خودریختی φ از گروه G را π- خودریختی نامیم هرگاه مرتبه‌اش فقط بر اعداد اول مجموعه π قابل قسمت باشد و φرا π'-خودریختی گوییم هرگاه مرتبه‌اش بر هیچ یک از اعداد اول مجموعه π قابل قسمت نباشد.

1-1-24 π_**گروه:** فرض کنید πیک مجموعه از اعداد اول باشد. اگر $|G|$ فقط بر اعداد اول مجموعه π قابل تقسیم باشد آنگاه G یک π-گروه نامیده می‌شود. عنصر x در G را یک π-عنصر نامیم هرگاه مرتبه اش فقط بر عناصر مجموعه π قابل‌قسمت باشد و همچنین $\pi(G)$ را مجموعه اعداد اول بخش کننده مرتبه گروه G می نامیم.

1-1-25 گروه π – تفکیک پذیر[۱]: اگر π یک مجموعه از اعداد اول باشد، گروه G را π–تفکیک‌پذیر گوییم هرگاه عامل‌هایش یا π–گروه باشند یا π'–گروه.

1-1-26 زیرگروه هال: زیرگروه H از گروه G را زیرگروه هال نامند هرگاه مرتبه‌اش نسبت به شاخص‌اش اول باشد. حال اگر π یک مجموعه از اعداد اول باشد، یک π–زیرگروه هال یک π–زیرگروه از گروه G است که شاخص‌اش توسط هیچ‌کدام از اعداد اول π قابل شمارش نباشد. به طور مثال هر سیلو زیرگروه، یک زیرگروه هال است.

1-1-27 رادیکال حل‌پذیر[۲]: حاصل ضرب همه زیرگروه‌های نرمال حل‌پذیر گروه G را رادیکال حل‌پذیر گروه G می نامیده و با $s(G)$ نمایش می دهیم. گروه خارج‌قسمتی $\frac{G}{S}$ نیم‌ساده[۳] است یعنی زیرگروه نرمال حل‌پذیر نابدیهی ندارد .

1-1-28 زیرگروه π–ساکل (π - socle)[۴]: فرض کنید π یک مجموعه از اعداد اول باشد آنگاه زیرگروه تولید شده توسط π–زیرگروه‌های نرمال مینیمال از گروه G را زیرگروه π–ساکل گروه G نامیم و با $soc_\pi(G)$ نمایش می دهیم. وقتی $\pi = \{p\}$ باشد برای سادگی بجای $soc_\pi(G)$ از $Soc(G)$ استفاده می کنیم. بنابراین اگر N یک π–زیرگروه نرمال مینیمال G باشد آنگاه $Soc(G) = \langle N \rangle$. بنابراین ساکل گروه G عبارت است از حاصلضرب مستقیم از زیرگروه‌های نرمال مینیمال گروه G. به [4-12] از [6] مراجعه کنید.

[1] Separable group
[2] Solvable radical
[3] Semisimple
[4] π_socle

1-1-29 زیرگروه مشخص: زیرگروه H از گروه G را زیرگروه مشخص گوییم هرگاه تحت هر خودریختی φ گروه G ثابت باشد و با ch نشان داده می شود.

1-1-30 پایدارساز[1]: اگر G یک گـــــروه باشد زیرمجموعه $G_m = \{g \in G | mg = m\}$ را پایدارساز m در گروه G می نامیم. از طرفی مجموعه $mG = \{mg | g \in G\}$ را G- مدار گروه G می نامیم.

1-1-31 هم رتبه: [2]برای زیرگروه نرمال N از G، هم رتبه N را مرتبه گروه خارج‌قسمت G/N می‌گوییم.

1-1-32 زیرگروه‌های بحرانی[3]: زیرگروه S از گروه G را زیرگروه بحرانی گوییم هرگاه $G = F(G)S$ که $F(G)$ زیرگروه فیتینگ گروه G است.

1-1-33 FG _مدول: فرض کنید V یک فضای برداری و G یک گروه است. آنگاه V یک FG _مدول است اگر ما بتوانیم ضرب vg را تعریف کنیم که $v \in V$ و $g \in G$ است و شرایط زیر برای هر $u, v \in V$ و $g, h \in G$ و $\lambda \in F$ برقرار باشد:

1. $vg \in V$
2. $v(gh) = (vg)h$
3. $v1 = v$

[1] Stabilizer
[2] Corank
[3] Critical Subgroup