
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه علم و صنعت ایران

دانشكده مهندسي مكانيك

ارائه مدل ریاضی میدان اکوستیک حاصل از نوسان یک کره واقع در یک نیم فضای لزج

محمد رضا ستوده حقیقی

پایان نامه کارشناسی ارشد
در رشته مهندسی مکانیک

استاد راهنما
دکتر سید محمد هاشمی نژاد

شهریورماه ۱۳۸٤

چکیده

در این پایان نامه مساله ی امواج اکوستیکی حاصل از نوسان کره در نیم فضای لزج مورد بررسی قرار می گیرد. معادلات براساس تئوری انتشار امواج و *Addition _Theorem* در مختصات کروی برای جابجایی توابعِ امواج، برای بررسی رفتار منابع برشی و پتانسیل ساده در کنار دیوار صلب در سیال لزج بدست می آیند و حل می شوند. جواب مساله ترکیب خطی از میدان اکوستیکی حاصل از این منابع برشی و پتانسیل ساده در کنار دیوار صلب در سیال لزج می باشد. ضرایب این ترکیب خطی مجهولات مساله می باشند. که با ارضای شرط مرزی سطح کره بدست می آیند.

فهرست مطالب

فهرست اشکال

مقدمه

مقدمه

انتشار امواج اکوستیکی در سیال لزج همچنان یکی از بحث های به روز در دنیا می باشد. که از برهمکنش میدان اکوستیک و میدان لزج بوجود می آید. نوسان اجسام در سیال لزج باعث تولید و انتشار این امواج می شود. در این پایان نامه نوسان کره کنار دیوار صلب مورد بررسی قرار می گیرید. آنچه که در این پایان نامه بیشتر از هر چیزی مهمتر است روش حل این گونه مسایل می باشد. از آنجایی که رفتار امواج اکوستیکی در سیال لزج در کنار دیوار صلب تا کنون حل نشده باقی بود. در این پایان نامه با بدست آوردن رفتار منابع برشی و پتانسیل ساده کنار دیوار، راه را برای باقی مسایل گشوده است، در نتیجه در باقی مسایل که شیء ما کره نباشد با قرار دادن این گونه منابع در نقاط خاص و اعمال شرط مرزی سطح شیء، میدان سرعت و فشار بدست می آید. که این خود بزرگترین دستاورد این پایان نامه می باشد.

از کاربردهای نوسان کره کنار دیوار صلب در سیال لزج را می توان وجود ذرات شن در داخل آب کنار یک دیوار صلب مرتعش نام برد همچنین با کمی تغییر در شرط مرزی سطح کره می توان به بررسی ذرات ریز حباب در داخل آب کنار دیوار مرتعش پرداخت. و یا به بررسی رفتار ذرات ریز جامد، داخل سوخت مایع کنار دیوارهای مرتعش مانند بدنه موتورموشک پرداخت.

خلاصه آنچه که در این پایان نامه انجام شده است به صورت زیر می باشد.

هدف کلی فصل اول این پایان نامه، آشنایی با میدان اکوستیک می باشد. در این فصل ابتدا قوانین حاکم بر سیالات رابه طور کامل و مختصر شرح می دهیم سپس خواص پایه ای امواج اکوستیک را در سیال ایده ال یکنواخت و غیر یکنواخت بررسی می کنیم. همچنین طریقه بدست آوردن مدل ریاضی میدان اکوستیک نیز شرح داده می شود. سپس یکی از اصلی ترین امواج اکوستیکی که بقیه امواج ترکیبی از آنها می باشند را ذکر می کنیم و در مورد امواج تک فرکانسی مباحثی را بیان می کنیم. معادلات در حالت یک بعدی و در حالت کروی متقارن محوری بدست می آیند. حل معادلات در مختصات کروی به صورت ترکیبی از توابع بسل و لژاندر می باشد. به همین دلیل در ضمیمه ۱ به طور مجزا حل کامل معادلات بسل کروی بدست می آیند. سپس اثر متقابل جریان لزج و میدان اکوستیک بررسی می شود ابتدا معادلات حاکم بدست می آیند و انتشار امواج یک بعدی در سیال لزج به طور کامل بررسی و حل می شوند. در قسمت بعد، امواج اکوستیک را در محیط ترمو ویسکوز در حالت یک بعدی به طور کامل بررسی و حل میکنیم. در قسمت بعد، امواج اکوستیک را در میدان سیال لزج یکنواخت سه بعدی به طور کامل مدل سازی می شود و معادلات حاکم بر آنها به طور کامل بدست می آیند.

هدف کلی فصل دوم، بررسی راه های گوناگون برای حل مساله اصلی پایان نامه می باشد. ابتدا با روش معمول، که در[۱] آورده شده نوسان کره در سیال لزج در محیط بینهایت را بررسی می کنیم. سپس سعی می شود تا با همین روش نوسان کره در محیط های متقارن محوری حل شود. و جداسازی زمان از معادلات به طور کامل تر بررسی می شود. سپس شرط مرزی سطح کره به یک مدل ریاضی در ضرایب مجهول تبدیل می شود. و نیروی وارد بر کره بدست می آید. و

نیروی وارد بر کره بدست می آید. اما در حالت نوسان کره کنار دیوار صلب، تناقض هایی مشاهده می شود که عدم توانایی روش به کار برده شده در[۱] را نشان می دهد. سپس با استفاده از $Addition\_Theorem$ [۳] روش مناسبتری پیشنهاد داده می شود. به عنوان مثال نوسان دو کره مشابه در سیال لزج را حل می کنیم که در ضمیمه ۲ آورده شده است. در انتها، عملی نبودن این روش برای ارضای شرط مرزی دیوار نتیجه می شود. و بالاخره الگوریتم حل اینگونه مسایل بدست می آید که در فصل بعدی عنوان می شود. همچنین در ضمیمه ۳ یک اشتباه معمول در حل مسایل اکوستیک عنوان می شود و رفع می گردد. سپس محدوده اعتبار معادلات حاکم بررسی می گردد و نتیجه می شود که تنها در دامنه های کوچک ترم جابجایی از معادلات ناویر-استوکس قابل صرف نظرمی باشد.

هدف کلی فصل سوم، بدست آوردن میدان جریان ناشی از یک منبع اکوستیکی کنار دیوار صلب می باشد. با بدست آوردن میدان جریان برای منابع نقطه ایِ متعارف، می توان برای هر شیء نوسان کننده کنار دیوار صلب، ترکیب خطی از این منابع را بدست آورد که شرط مرزی سطح شیء را ارضا کند. در این صورت میدان حاصل از نوسان شیء مورد نظر کنار دیوار صلب بدست می آید. دراین فصل ابتدا برخورد امواج فشاری و برشی یک بعدی در سیال لزج بررسی و حل می شود. سپس این نتایج به حالت سه بعدی تعمیم داده می شود و راهکاری کلی برای بدست آوردن میدان ناشی از وجود یک منبع نقطه ایِ فشاری و یا برشی عنوان می گردد. سپس رفتار منبع پتانسیل کنار دیوار صلب به طور دقیقتر بررسی می گردد و در نهایت یک راه حل تئوری برای حالت خاص و متداول بدست می آید. در اینجا به یک معجزه بر می خوریم که از ابزارهای ریاضیات می باشد و تفاوت اساسی میان منبع گسترده و نقطه ای که در معادلات حاکم صدق می کنند نشان داده می شود. در قسمت بعد رفتار منبع برشی کنار دیوار صلب به طور دقیقتر بررسی می گردد و در نهایت یک راه حل عددی برای حالت خاص و متداول بدست می آید. و یک برنامه برای انجام این عمل در ضمیمه ۵و٦ آورده شده است.

در فصل چهارم دو راه حل برای بدست آوردن نوسان کره کنار دیوار صلب ارائه می گردد که اولی کاملاً کلی می باشد و راه حل دوم منجر به یک $code$ می شود که راه حلی عملی می باشد. جواب در واقع، بدست آوردن ترکیب خطی از منابع برشی و پتانسیلی می باشد که قبلاً رفتار تک تک آنها کنار دیوار بررسی شده است. این ترکیب خطی باید شرط مرزی سطح کره را ارضا کند.

فصل اول

مقدمات اکوستیک در سیال ایده ال و لزج

۱-۱ : مقدمه

هدف کلی این فصل، آشنایی با میدان اکوستیک می باشد. در این فصل ابتدا با یاد آوری قوانین حاکم بر سیالات، بر اساس آنالیز ابعادی معادلات حاکم بر میدان اکوستیک در سیال ایده ال، در دو بخش سیال یکنواخت و غیر یکنواخت، بدست می آید. سپس برای جداسازی زمان از معادلات، امواج ساده تک فرکانس را معرفی می کنیم. امواج ساده تک فرکانس امواجی هستند که وابستگیِ فشار و سرعت و ... به زمان، درآنها تنها تابع یک فرکانس زاویه ای ساده ω می باشد. اهمیت این امواج از آن جهت است که بقیه امواج را در حالت کلی می توان ترکیبی از این امواج در نظر گرفت و هر کدام را جداگانه بررسی کرد. سپس اثر متقابل میدان لزجت و اکوستیک بر اساس آنالیز ابعادیِ معادلات حاکم برسیالات، بررسی می شود. و در نهایت معدلات حاکم بر انتشار امواج اکوستیک در میدان سیال یکنواخت سه بعدی لزج را بدست می آوریم.

۱-۲ : مروری بر قوانین حاکم بر سیالات

مشتق مادی به صورت زیر تعریف می شود

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}$$

معادله پیوستگی به صورت زیر می باشد

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\rho = -\rho\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \qquad (۱-۱)$$

با در نظر گرفتن ضریب انبساط لزجت μ_v که همانند μ همواره مثبت است معادله ناویر-استوکس به صورت زیر بدست می آید

$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho\vec{F} - \vec{\nabla}p + \mu\left[\nabla^{۲}\vec{u} + \left(\frac{۱}{۳} + \frac{\mu_v}{\mu}\right)\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\right)\right] \qquad (۱-۲)$$

(اگر P فشار مکانیکی و p فشار ترمودینامیکی باشد $p = P + \mu_v\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$)

با فرض اینکه $\Delta = \vec{\nabla}\cdot\vec{u}$ معادله انرژی برابر است با :

$$\frac{DE}{Dt} = -\frac{P}{\rho}\Delta + \frac{۲\mu}{\rho}\left(e_{ij}e_{ij} - \frac{۱}{۳}\Delta^{۲}\right) + \frac{۱}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)$$

داریم $\Delta = \rho\frac{D\left(\frac{۱}{\rho}\right)}{Dt}$ و $p = P + \mu_v\vec{\nabla}\cdot\vec{u}$ پس معادله انرژی به صورت زیر می شود

$$\frac{DE}{Dt} + p\frac{D\left(\frac{۱}{\rho}\right)}{Dt} = \frac{\mu_v}{\rho}\Delta^{۲} + \Phi + \frac{۱}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)$$

که در آن $\Phi = \frac{۲\mu}{\rho}\left(e_{ij}e_{ij} - \frac{۱}{۳}\Delta^{۲}\right)$.

با فرض $TdS = dE + pdv^*$ خواهیم داشت :

$$T\frac{DS}{Dt} = \frac{\mu_v}{\rho}\Delta^{۲} + \Phi + \frac{۱}{\rho}\vec{\nabla}\cdot\left(k\vec{\nabla}T\right)$$

اما از طرف دیگر داریم $dS = \frac{c_p}{T}dT - \left(\frac{\partial v^*}{\partial T}\right)_p dp$ و با تعریف ضریب انبساط حرارتی به صورت $\beta = \frac{۱}{v^*}\left(\frac{\partial v^*}{\partial T}\right)_p = \frac{-۱}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$ خواهیم داشت

$$TdS = c_p dT - Tv^*\beta dp = c_p dT - \frac{T}{\rho}\beta dp$$

در نهایت معادله انرژی به صورت زیر بدست می آید :

$$T\frac{DS}{Dt} = c_p\frac{DT}{Dt} - \frac{\beta T}{\rho}\cdot\frac{Dp}{Dt} = \frac{\mu_v}{\rho}\Delta^{۲} + \Phi + \frac{۱}{\rho}\vec{\nabla}\cdot\left(k\vec{\nabla}T\right) \qquad (۱-۳)$$

همچنین معادله حالت را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$p = p(\rho, S) \qquad (۱-٤)$$

۳-۱ : خواص پایه ای امواج اکوستیک در سیال ایده ال

- سیال ایده ال

در سیال ایده ال کلیه ضرایب μ, μ_v, k همگی صفرند، در نتیجه معادلات حاکم به صورت زیر در می آیند :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = ۰$$
$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p$$
$$\frac{DS}{Dt} = ۰$$
$$p = p(\rho, S)$$

در این حالت فرض شده که جاذبه تنها نیروی بدنی وارد به سیال است، با مشتقگیری از معادله حالت داریم :

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho dS$$

و برای سیال در حرکت به صورت زیر

$$\frac{Dp}{Dt} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \frac{D\rho}{Dt} + \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho \frac{DS}{Dt}$$

اما با توجه به معادله انرژی و با تعریف $c^۲ = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{S.}$ داریم :

$$\frac{Dp}{Dt} = c^۲ \frac{D\rho}{Dt}$$

در نتیجه معادله پیوستگی به صورت زیر می شود:

$$\frac{Dp}{Dt} + \rho c^۲ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = ۰$$

- خطی سازی معادلات

سیالی ساکن را که در میدان جاذبه به تعادل رسیده است، فرض کنید. در نتیجه :

$$\vec{\nabla} p_. = \rho_. \vec{g}$$

که در اثر امواج صوتی دچار اغتشاش می شود. با فرض :

$$\rho = \rho_{\circ}(\vec{x}) + \rho'(\vec{x},t)$$
$$p = p_{\circ}(\vec{x}) + p'(\vec{x},t)$$

که $|\rho'| << \rho_{\circ}$ و $|p'| << p_{\circ}$ و $\vec{u}$ خود اغتشاشی می باشد. همچنین c^{2} را نیز می توان به صورت زیر بسط داد:

$$c^{2} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{S_{\circ}} = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{S_{\circ}}\right]_{\rho=\rho_{\circ}} + \left[\left(\frac{\partial^{2} p}{\partial \rho^{2}}\right)_{S_{\circ}}\right]_{\rho=\rho_{\circ}} \cdot (\rho - \rho_{\circ}) + \cdots$$

و یا :

$$c^{2} = c_{\circ}^{2}(\vec{x}) + d_{\circ}(\vec{x})\rho' + \cdots$$

$$c_{\circ}^{2} = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{S_{\circ}}\right]_{\rho=\rho_{\circ}} \qquad d_{\circ} = \left[\left(\frac{\partial^{2} p}{\partial \rho^{2}}\right)_{S_{\circ}}\right]_{\rho=\rho_{\circ}}$$

با جاگذاری روابط فوق در معادله پیوستگی داریم :

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}p_{\circ} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}p' + (\rho_{\circ} + \rho')\cdot(c_{\circ}^{2} + d_{\circ}\rho' + \cdots)\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$$

که با حذف جملات از مرتبه بالاتر به صورت زیر می شود:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_{\circ}(\vec{x})\cdot c_{\circ}^{2}(\vec{x})\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = -\vec{u}\cdot\vec{\nabla}p_{\circ}$$

با انجام همین عمل برای معادله مومنتوم داریم :

$$\rho_{\circ}\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla}p' = \frac{1}{\rho_{\circ}}\rho'\vec{\nabla}p_{\circ} = \rho'\vec{g} \qquad (1-5)$$

از آنجایی که $\vec{\nabla}p_{\circ} = \rho_{\circ}\vec{g}$ پس $|\vec{u}\cdot\vec{\nabla}p_{\circ}| \approx Ug\rho_{\circ}$ همچنین $|\vec{\nabla}\cdot\vec{u}| \approx U/L$ که U سرعت یک نقطه اختیاری از سیال و L طول مشخصه تغییرات سرعت می باشد.

$$\frac{|\vec{u}\cdot\vec{\nabla}p_{\circ}|}{\rho_{\circ}c_{\circ}^{2}|\vec{\nabla}\cdot\vec{u}|} \approx \frac{L}{c_{\circ}^{2}/g}$$

اما در فشار و دمای استاندارد $c_{\circ}^{2}/g \cong 12km$ در نتیجه :

$$\frac{\partial p'}{\partial t}+\rho_{\cdot}(\vec{x})\cdot c_{\cdot}^{2}(\vec{x})\vec{\nabla}\cdot\vec{u}=0 \qquad (1-6)$$

و با مشتقگیری نسبت به زمان داریم :

$$\frac{\partial^{2} p'}{\partial t^{2}}+\rho_{\cdot}(\vec{x})\cdot c_{\cdot}^{2}(\vec{x})\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}=0$$

با دیورژانس گیری از معادله مومنتوم بدست آمده در بالا داریم :

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\frac{1}{\rho_{\cdot}}\nabla^{2}p'=\frac{1}{\rho_{\cdot}^{2}}\vec{\nabla}p'\cdot\vec{\nabla}\rho_{\cdot}$$

$$\left|\frac{1}{\rho_{\cdot}}\nabla^{2}p'\right|\approx\frac{p'}{\rho_{\cdot}L^{2}} \qquad \text{و} \qquad \left|\frac{1}{\rho_{\cdot}^{2}}\vec{\nabla}p'\cdot\vec{\nabla}\rho_{\cdot}\right|\approx\frac{p'}{\rho_{\cdot}LH}$$

که H طول مشخصه تغییرات $\rho_{\cdot}$ می باشد، بدیهی است که $H>>L$ در نتیجه معادله مومنتوم به صورت زیر در می آید :

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\frac{1}{\rho_{\cdot}}\nabla^{2}p'=0$$

با حذف $\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}$ از معادلات مومنتوم و پیوستگی اصلاح شده خواهیم داشت :

$$\frac{\partial^{2} p'}{\partial t^{2}}=c_{\cdot}^{2}(\vec{x})\nabla^{2}p' \qquad (1-7)$$

- سیال یکنواخت

همانند قبل و با فرض ثابت بودن $p_{\cdot}$ و $\rho_{\cdot}$ و انتروپی و بقیه خواص سیال نسبت به مکان، معادلات حاکم به صورت زیر می شوند

$$\frac{\partial p'}{\partial t}+\rho_{\cdot}\cdot c_{\cdot}^{2}\vec{\nabla}\cdot\vec{u}=-\vec{u}\cdot\vec{\nabla}p_{\cdot}=0$$

$$\rho_{\cdot}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\vec{\nabla}p'=\frac{1}{\rho_{\cdot}}\rho'\vec{\nabla}p_{\cdot}=0$$

با $curl$ گرفتن از معادله دوم داریم

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)=0$$

$$\Rightarrow\vec{\omega}=\vec{\nabla}\times\vec{u}=\vec{f}(\vec{x})$$

معادله فوق در هر زمان صادق است در نتیجه چون در لحظه اولیه $\vec{\omega}=0$ و سپس اغتشاشات شروع می شوند همواره خواهیم داشت $\vec{\nabla}\times\vec{u}=0$ در نتیجه طبق قضیه هلمهولتز $\vec{u}=\vec{\nabla}\phi$.

با جاگذاری در معادله حاکم اول خواهیم داشت :

$$\vec{\nabla}\left(\rho_{\circ}\frac{\partial\phi}{\partial t}+p'\right)=\circ$$

در نتیجه

$$\rho_{\circ}\frac{\partial\phi}{\partial t}+p'=g(t)$$

بدون کاسته شدن از کلیت مساله می توان فرض کرد $g(t)=\circ$. تابع ϕ' را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\phi'=\phi-\frac{1}{\rho_{\circ}}\int_{\circ}^{t}g(\tau)d\tau$$

در نتیجه $\vec{u}=\vec{\nabla}\phi=\vec{\nabla}\phi'$ و همچنین $\rho_{\circ}\frac{\partial\phi'}{\partial t}+p'=\circ$. پس فرض می کنیم $g(t)=\circ$

در نتیجه $p'=-\rho_{\circ}\frac{\partial\phi}{\partial t}$ و با جاگذاری در معادله حاکم اول خواهیم داشت :

$$\frac{\partial^{2}\phi}{\partial t^{2}}=c_{\circ}^{2}\nabla^{2}\phi \qquad (1-8)$$

$$p'=-\rho_{\circ}\frac{\partial\phi}{\partial t} \qquad (1-9)$$

همچنین از آنجایی که $\vec{\nabla}\times\vec{u}=\circ$ پس $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})=\nabla^{2}\vec{u}+\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{u}=\nabla^{2}\vec{u}$ و با دیورژانس گیری از معادله حاکم اول و مشتقگیری نسبت به زمان از معادله حاکم دوم و سپس حذف $\vec{\nabla}\frac{\partial p'}{\partial t}$ خواهیم داشت :

$$\frac{\partial^{2}\vec{u}}{\partial t^{2}}=c_{\circ}^{2}\nabla^{2}\vec{u} \qquad (1-10)$$

این یک معادله برداری موج است که حل آن سخت تر از معادلات اسکالر p',ρ',ϕ می باشد.
همانند تغییرات چگالی و فشار برای دما نیز با استفاده از معادله انرژی می توان نوشت :

$$\frac{DT}{Dt}=\frac{\beta T}{\rho c_{p}}\frac{Dp}{Dt}$$

و برای خطی سازی می توان نوشت $T'=T-T_{\circ}$ در نتیجه

$$T'=\frac{\beta_{\circ}T_{\circ}}{\rho_{\circ}c_{p_{\circ}}}p'=-\frac{\beta_{\circ}T_{\circ}}{c_{p_{\circ}}}\frac{\partial\phi}{\partial t} \qquad (1-11)$$

برای گاز های ایده ال $\beta_{\circ} = {}^{1}\!/_{T_{\circ}}$ در نتیجه $T' = -\frac{1}{c_{p\circ}}\frac{\partial \phi}{\partial t}$

۱-٤ : امواج ساده تک فرکانس

امواج ساده تک فرکانس امواجی هستند که وابستگی فشار و سرعت و ... به زمان، درآنها تنها تابع یک فرکانس زاویه ای ساده ω می باشد. اهمیت این امواج از آن جهت است که بقیه امواج را در حالت کلی می توان ترکیبی از این امواج در نظر گرفت و هر کدام را جداگانه بررسی کرد. در این حالت پتانسیل سرعت را می توان تابعی از $\sin\omega t$ و $\cos\omega t$ در نظر گرفت. در حالت کلی راحت تر است که از $\exp(-i\omega t)$ استفاده شود به این صورت که :

$$\phi(\vec{x},t) = \mathrm{Re}\{\tilde{\Phi}(\vec{x})\cdot e^{-i\omega t}\} \qquad (۱-۱۲)$$

در نتیجه در سیال ایده ال یکنواخت معادله حاکم به صورت زیر ساده می شود:

$$\nabla^{۲}\tilde{\Phi} + \left({}^{\omega}\!/_{c_{\circ}}\right)^{۲}\tilde{\Phi} = ۰$$

$$\nabla^{۲}\tilde{\Phi} + k^{۲}\tilde{\Phi} = ۰ \qquad (۱-۱۳)$$

که $k = {}^{\omega}\!/_{c_{\circ}}$ عدد موج نام دارد. معادله فوق معادله هلمهولتز می باشد که معادله موج مستقل از زمان می باشد.

- امواج تک فرکانس یک بعدی

معادله حاکم به صورت زیر در می آید:

$$\frac{d^{۲}\tilde{\Phi}}{dx^{۲}} + k^{۲}\tilde{\Phi} = ۰$$

که حل عمومی آن به صورت زیر است

$$\tilde{\Phi} = \tilde{A}\cdot e^{ikx} + \tilde{B}\cdot e^{-ikx}$$

و در نتیجه :

$$\widetilde{\phi}(\vec{x},t)=\widetilde{A}\cdot e^{i(kx-\omega t)}+\widetilde{B}\cdot e^{-i(kx+\omega t)} \qquad (۱-۱۴)$$

حالتی را در نظر بگیرید که $\widetilde{B}=۰$ باشد، در نتیجه تنها امواج دور شونده بدست می آیند که در آن حالت داریم :

$$\phi=A\cdot\cos(kx-\omega t+a)$$

A دامنه نوسان موج و $kx-\omega t+a$ فاز موج نام دارد. سرعت حرکت موج برابر است با :

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\omega}{k}=c_f$$

که در حالت تک فرکانسی و غیر لزج برابر $c_۰$ می باشد.

- امواج کروی متقارن محوری

در مختصات کروی (r,θ,φ) که $۰\le\theta\le\pi$ و $۰\le\varphi\le۲\pi$ محور تقارن امواج را محور $\theta=۰,\pi$ در نظر می گیریم در نتیجه ϕ تابع زاویه φ نمی باشد و معادله حاکم در مختصات کروی به صورت زیر بدست می آید :

$$\frac{\partial^۲\phi}{\partial t^۲}=c_۰^۲\left[\frac{\partial^۲\phi}{\partial r^۲}+\frac{۲}{r}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{۱}{r^۲\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)\right]$$

که برای موج تک فرکانسی ω به صورت زیر می شود

$$\frac{\partial^۲\widetilde{\phi}}{\partial r^۲}+\frac{۲}{r}\cdot\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial r}+\frac{۱}{r^۲\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial\theta}\right)+k^۲\widetilde{\phi}=۰ \qquad (۱-۱۵)$$

که در آن $\widetilde{\phi}=g(r,\theta)\cdot e^{-i\omega t}$

اگر فرض کنیم که $g(r,\theta)$ را بتوان به صورت $g(r,\theta)=R(r)\cdot\Theta(\theta)$ نشان داد معادله فوق به صورت زیر ساده می شود

$$\frac{۱}{R}\left(r^۲\frac{d^۲R}{dr^۲}+۲r\frac{dR}{dr}+r^۲k^۲R\right)=-\frac{۱}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)=M$$

توجه شود که فرض جدا سازی تنها در برخی شرایط صادق می باشد. در بعضی مسائل از ابتدا شرایط مرزی به گونه ایست که این فرض خود به خود صادق می باشد. اما در اکثر موارد این اطمینان را قبل از حل کامل مساله نداریم (شرایط مرزی به گونهء مورد نظر نمی باشد) در نتیجه با این فرض مساله را شروع به حل می کنیم اگر تا انتها به تناقض نرسیدیم، حل ما درست می باشد.

$$\frac{d^۲R}{dr^۲}+\frac{۲}{r}\cdot\frac{dR}{dr}+\left(k^۲-\frac{M}{r^۲}\right)R=۰$$

$$\frac{۱}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+M\cdot\Theta=۰$$

اما معادله دوم، در واقع همان معادله لژاندر است که تنها در صورتی در $\theta=۰,\pi$ جواب متناهی دارد که $M=n(n+۱)$ باشد (که در آن $n=۰,۱,۲,...$). جواب آن به صورت زیر است.

$$\Theta=A_n\cdot P_n(\cos\theta)+B_n\cdot Q_n(\cos\theta)$$

اما از آنجایی که $Q_n(\cos\theta)$ در $\theta=۰,\pi$ نا متناهیست پس همواره $B_n=۰$ می باشد.
چند جمله ای های نوع اول لژاندر از روابط زیر بدست می آیند.

$$\begin{aligned} P_۰(z)&=۱ \\ P_۱(z)&=z \\ (n+۱)\cdot P_{n+۱}-(۲n+۱)z\cdot P_n+n\cdot P_{n-۱}&=۰ \end{aligned} \tag{۱−۱۶}$$

رابطه بازگشتی فوق به سادگی با استقرا از معادله لژاندر قابل استخراج است. همچنین در بازهء $-۱\le z\le ۱$ این چند جمله ای ها متعامد هستند یعنی :

$$\int_{-۱}^{۱}P_n(z)\cdot P_m(z)dz=\frac{۲}{۲n+۱}\delta_{mn}$$

و اما معادله $\frac{d^۲R}{dr^۲}+\frac{۲}{r}\cdot\frac{dR}{dr}+\left(k^۲-\frac{n(n+۱)}{r^۲}\right)R=۰$ همان معادله بسل کروی است که جواب آن به صورت $R=A_n\cdot h_n^{(۱)}(kr)+B_n\cdot h_n^{(۲)}(kr)$ می باشد.

توابع هانکل از روابط زیر بدست می آیند.

$$\begin{aligned} h_۰^{(۱)}(z)&=-\frac{i}{z}e^{iz} \\ h_۱^{(۱)}(z)&=-\frac{۱}{z}\left(۱+\frac{i}{z}\right)\cdot e^{iz} \\ h_n^{(۲)}(z)&=(-۱)^n\cdot h_n^{(۱)}(-z) \\ h_{n+۱}&=\frac{۲n+۱}{z}h_n-h_{n-۱} \end{aligned} \tag{۱−۱۷}$$

رابطه بازگشتی فوق به سادگی با استقرا از معادله بسل کروی قابل استخراج است.
توابع هانکل نیز توابعی متعامد هستند.