وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

بررسی همنوازی در یک یاخته‌ی سه‌گوشِ پیوندهای جوزفسون و آرایه‌ی متشکل از یاخته‌های سه‌گوش

پایان‌نامه‌ی دکتری

علیرضا ولی‌زاده

استاد راهنما: دکترمحمدرضا کلاه‌چی

بهمن ۱۳۸٦

چکیده

پیوندهای جوزفسون در تقریب نیمه کلاسیک با مدلهایی توصیف میشوند که شدیدا غیر خطی هستند و از اینرو زمینه مناسبی را برای مطالعه‌ی دینامیک سیستمهای غیر خطی فراهم میکنند. برهمکنش پیوندها با هم و پاسخ آنها به میدانهای بیرونی میتواند منجر به بروز رفتارهای منظمی در قالب همنوازی دو سویه بین پیوندها و همنوازی پیوندها با میدانهای دوره‌ای خارجی شود. هدف ما در این پایان‌نامه مطالعه‌ی رفتار آرایه‌های متشکل از پیوندهای جوزفسون و پاسخ آنها به نیروهای دوره‌ای بیرونی است. عمده‌ی بررسی ما معطوف به پدیده‌ی همنوازی و بروز آن در آرایه‌های جوزفسون به شکل همنوازی بین پیوندها و همنوازی پیوندها با نیروهای خارجی است که منجر به تشکیل پله‌های شاپیرو در مشخصه‌ی جریان—ولتاژ پیوندها میشود. بررسی را از دو پیوندِ جفت شده آغاز میکنیم که در پیچیده‌ترین نوعِ برهمکنش، توسط پیوندِ سومی درون یک یاخته‌ی مثلثی به هم جفت میشوند و نشان میدهیم نظم درونی موجود در این سیستم، در حضور نیروی دوره‌ای خارجی منجر به همنوازیهای از مرتبه‌ی غیر صحیح شده پله‌های کسری شاپیرو را در مشخصه پدید می‌آورد. روشی برای بدست آوردنِ عرض پله‌های شاپیرو و آزمودنِ شرایط بوجود آمدنِ پله‌های کسری ارایه میدهیم. سپس آرایه‌هایی را با شمار بیشتر پیوندهای جوزفسون در نظر میگیریم که در زنجیره‌ای به صورت همسایه‌های نزدیک با هم برهمکنش دارند. دینامیک این آرایه‌ها را با وجود ناخالصی بررسی میکنیم و نشان میدهیم وجود ناخالصی به ازای شرایطی که بستگی به نوع برهمکنش‌ها و پارامترهای ناخالصی دارد، میتواند باعث بروز نظم در آرایه‌هایی با شمار بسیار زیاد پیوندها شود.

فهرست

۲ پیوندهای جوزفسون و آرایه‌های جوزفسون

۳ آرایه‌های متشکل از دو پیوند جفت شده

۴ همنوازی پیوندهای جوزفسون در زنجیره‌ای از یاخته‌های سه‌گوش

پیش گفتار

از نگاه ارسطو کاملترین حرکتها حرکت روی دایره است. موجودات ناکامل در جستجوی کمال، پویشی رو به پیش دارند اما موجودی که در غایتِ تکامل شایسته‌ی خود است، روا نیست که از بودِ خود دور شود و ازینرو با حرکتی مرکز گرا هستی اکنون خود را دوباره میسازد و خود را تحسین میکند. موجودات دنیای برتر، در فلک ستارگان همگی با حرکت دایروی، خود را تکرار میکنند که در آینده چیزی فراتر از اینک نمی یابند. تنها موجودات پست ترین پایه‌ی هستی، موجودات زمینی، ناخرسند از مرتبه‌ی خود، در آینده چیزی میجویند فراتر از اینک.

اقبالِ آموزگار نخست در میان اندیشمندان اسلامی و درون شدن اندیشه‌های او در مسیحیت پیش از سده‌های میانه، نزدیک به دو هزاره در هستی شناسی دینی و علمی به پرهون[1] نقشی سپندار بخشید و البته سده‌ها دانش را از مسیر درست شناخت جهان دور کرد. در دانش جدید، دایره هیچ جایگاه مقدسی ندارد اما نمایشی ایده‌آل از دسته حرکتهایی است که دوری بوده و پس از گامهای زمانی مشخصی تکرار میشوند. این حرکتهای دوری همواره برای سنجش زمان به کار گرفته شده‌اند و قابل دسترس‌ترین آنها یعنی حرکت زمین به دور خود، بی‌تردید نخستین شهود انسان از یک بازه‌ی زمانی عینی بوده است.

نخستین معیارهای سنجش زمان نیز حرکتهای دوری اجرام آسمانی بوده‌اند ولی بشر در تلاش برای یافتن روشهای دقیقتر و اندازه‌گیری زمانهای به مراتب کوتاهتر از بازه‌های زمانی از مرتبه‌ی نجومی، دست به ساخت زمان‌سنج هایی زد که همواره در دسترس بوده و بر پایه‌ی حرکتهای دوری سریعتر، زمان را با دقت بیشتری سنجیده و نمایش دهند. فرآیند ساخت ساعت که به طور جدی تقریبا با شروع دوره‌ی دانش تجربی در غرب آغاز شد، همواره با این مشکل همراه بود که تفاوتهای ناگزیر در اجزای ساعتها موجب میشد که سرعت کارکرد آنها یکسان نباشد واین تفاوتِ هرچند اندک در زمانهای طولانی موجب خطاهای قابل توجهی میشد. در تلاش برای همزمان کردن این ساعتها بود که

[1] دایره

هویگنس[۲] پدیده‌ای را مشاهده کرد که بعدها نام همنوازی[۳] به آن داده شد. مشاهده‌ی او (۱۶۶۵) نشان میداد که دو آونگ که بر پایه‌ی مشترکی آویخته شده باشند، با وجود تفاوت در درازا، بسامد یکسان (و فاز مخالف) خواهند داشت. او آزمایش را بارها با شرایط اولیه‌ی متفاوت بازسازی کرد و پیامدهای یکسانی بدست آورد[۱][۴].

تقریبا یک دهه پس از انتشار نتایج مشاهدات هویگنس، کیمپفر[۵]، پزشک هلندی در بازگشت از سیام[۶] خبر از مشاهده‌ی حشراتی میدهد که به طور همزمان آنچنان نور میپراکنند که درخت چون یک ابر آتشین روشن، و خاموش میشود. او در یادداشت های خود مینویسد که گویی این حشرات همدیگر را میبینند و رفتار هم را پیش‌بینی میکنند[۲]. آزمایشاتی که البته سالها بعد انجام شد نشان داد که این حشرات به تنهایی نیز خاموش و روشن میشوند اما زمانی که به اندازه‌ی بسنده به هم نزدیک شوند پرتوافکنیشان با هم هماهنگ میشود. این دو گزارش شاید تنها مشاهدات علمی پیش از سده‌ی بیستم از پدیده‌ی همنوازی باشند. همانندی این پدیده‌ها در اینست که در هر دو، اجزای سیستم در حالت جدا از هم با آهنگ ویژه‌ی خود رفتاری نوسانی دارند که در صورت برهمکنش، رفتارهای آنها علیرغم تفاوتهای ذاتی، همنواز میشوند.

مشاهدات هویگنس و کیمپفر به ترتیب نمونه‌هایی از همنوازی دوسویه[۷] و همنوازی سراسری[۸] میباشند که میل به ایجاد سامان خودبخودی در میان مجموعه‌ای از نوسانگرها را نشان میدهند که در برهمکنش با یکدیگر، علیرغم تفاوتهای ذاتی به نوعی توافق در رفتار میرسند. نزدیک به سه سده طول کشید تا دانشمندان با درک پدیده‌ی همنوازی، ارتباط بین مشاهداتی اینچنین به ظاهر متفاوت را بیان کرده و آنها را تحت یک نگره‌ی جهان‌شمول[۹] جمع کنند. اگرچه مشاهده‌ی هویگنس در آن زمان برای همزمان کردن ساعتهایی که دور از هم بودند کاربردی نداشت اما بر پایه‌ی درک همان یافته صدها سال بعد که کنش از راه دور به کمک امواج الکترومغناطیسی ممکن شد، ساخت ساعتهایی که

[۲] Huygens

[۳] synchronization

[۴] اشاره از مرجع [۴] آورده شده است.

[۵] Engelbert Kaempfer

[۶] Siam

[۷] mutual syncronization

[۸] global syncronization

[۹] universal theory

همزمان کار میکردند[۱۰] امکان پذیر گردید.

جالب است که به ظاهر، طبیعت زنده در بکارگیری همنوازی کسوتی بیش از فن‌آوری دارد. بدن موجودات زنده برای پدیده‌های حیاتی که ماهیت دوری دارند، همواره ساعتی درونی را طراحی کرده است. اهمیت این ساعتها از آن روست که گاهی مرجع بیرونی در آن مرتبه‌ی زمانی — مانند فواصل زمانی تپش قلب — موجود نیست یا اینکه در صورت موجود بودن تضمینی برای بود همیشگی آن نیست، مانند پی‌آیند شب و روز که برای موجودی که دور از نور قرار داده شود محسوس نیست. در این صورت ساعت درونی اینّ توان را دارد که هم بی‌نیاز به فرآیند بیرونی، در صورت نبودن آن، آهنگ لازم را بیافریند و هم در صورت حضور آهنگ بیرونی، از آن پیروی کرده و خود را با آن هماهنگ کند. آهنگ خواب و بیداری انسان و بیشتر پستانداران و بسیاری کارهای حیاتی دیگر که با آهنگ روزآمد[۱۱] انجام میشوند، نمونه‌ای از این دست هستند که در صورت وجود عامل بیرونی (مانند نور خورشید) با آن هماهنگ میشوند ولی در صورت نبود آن نیز آهنگی نزدیک به ۲۴ ساعت را نگه میدارند[۳]. امروزه تا اندازه‌ی زیادی چگونگی آفرینش چنین آهنگهایی در بدن موجودات زنده روشن شده است. نکته‌ی جالب اینست که ساعت درونی بدن موجودات زنده مجموعه‌ای از ساعتهای کوچکتر— سلولهای نوسان کننده — است که رفتار جمعی بسامان آنها آهنگ موردنظر را می‌آفرینند[۴]. گویی در پدیده‌ی فرگشت[۱۲] طبیعت به این نتیجه رهنمون شده است که سامانه‌هایی که بیرون‌دهی آنها پیامد همنوازی شمار بسیاری از اجزای کوچکتر است، از آنجاییکه کمتر به تغییر ناخواسته در پارامترهای اجزای خود حساس هستند، قابل اعتمادترند.

مطالعه‌ی سیستم‌های زیستی همواره از دو نظر با محدودیت هایی همراه بوده است. نخست اینکه مدل‌سازی برای عناصر زیستی تنها به صورت پدیده‌شناختی قابل انجام است و پارامترهای بسیار زیاد تعیین کننده‌ی رفتار سلولها که همه‌ی آنها نیز شناخته‌شده نیستند، بنا کردن مدلهای دقیق را برای آنها تقریبا غیر ممکن میسازد. از سوی دیگر انجام آزمایش روی این عناصر در بدن موجود زنده مشکلات زیادی به همراه دارند و اگر هم جدا از موجود زنده مورد آزمایش قرار گیرند ممکن است رفتارهای متفاوتی از خود بروز دهند.

اما به هر حال ایده‌ی سیستمهای متشکل از شمار زیادی نوسانگر که همنواز با هم بسامد خاصی را تولید میکنند،

۱۰ radio controlled watches

۱۱ circadian rhythms

۱۲ تکامل

اولین بار توسط وینر[13] طرح شد[5] اما گام نخست را در ارایه‌ی مدلی که به طور کیفی توانایی توصیف چنین سیستمهایی را داشته باشد وینفری[14] برداشت [6] و در نهایت کوراموتو[15] مدلی را ارایه کرد که قادر بود معیارهای کمی برای پیشگویی امکان بروز همنوازی ارایه دهد[7]. در مدل کوراموتو هر نوسانگر که با بسامد درونیِ خود مشخص میشود در برهمکنش با تمامِ نوسانگرهای دیگر سیستم قرار دارد و اثر بقیه‌ی نوسانگرها روی آن در حدِ ترمودینامیک به صورت میدان میانگین در نظر گرفته میشود. حالتِ همنواز در این سیستم با گذارِ فازی که با تغییر پارامترهای سیستم اتفاق می‌افتد ممکن میشود.

مدل کوراموتو ۲۰ سال پس از ارایه از حالت انتزاعی بیرون آمد. ویزنفلد[16] و همکارانش نشان دادند آرایه‌ای سری متشکل از پیوندهای جوزفسون [8] که موازی با یک بار متشکل از عناصر خطی قرار میگیرد میتواند پس از متوسط‌گیریِ زمانی توسط مدل کوراموتو توصیف شود[9]. این کشف هم زمینه‌ای برای آزمایش پیش‌بینی‌های کوراموتو فراهم کرد، و هم آرایه‌های جوزفسون را برای مطالعه‌ی پدیده ی همنوازی بیش از پیش در معرض توجه قرار داد[۱۰].

بر خلافِ سیستمهای زیستی، در مورد رفتار پیوندهای جوزفسون شناخت نسبتا جامعی در رژیمهای مختلف وجود دارد و انتخاب مدل مناسب برای آنها به سادگی امکان‌پذیر است. انجام آزمایش روی پیوندهای جوزفسون نیز با تکنولوژی امروز آنچنان دشوار نیست[۱۱] و ازاین‌رو سیستمهای متشکل از این پیوندها به طور گسترده‌ای برای مطالعه‌ی پدیده‌ی همنوازی به کار گرفته شده‌اند[۱۲]. از آنجاییکه عمده‌ی مطالعه‌ی انجام شده بر روی آرایه‌هایی با تعداد زیادِ پیوندهای جوزفسون صورت گرفته است، ما بررسی خود را به یک آرایه‌ی متشکل از سه پیوند جوزفسون معطوف کرده و نشان داده‌ایم که نظم درونی سیستم در عدم حضور میدان متناوب بیرونی میتواند رفتار سیستم را پس از اعمال میدان بیرونی تعیین کند. سپس به آرایه‌هایی با شمار بیشتر پیوندها پرداخته‌ایم و نقش امواج سالیتونی را در ایجاد نظم در آرایه‌های بزرگ توسط یک منبع دوره‌ای جایگزیده‌ی منفرد[۱۳] نشان داده‌ایم.

Wiener ۱۳

Winfree ۱۴

Kuramoto ۱۵

Wiesenfeld ۱۶

فصل اول

همنوازی نوسانگرهای غیرخطی

تنها پتانسیلی که منجر به نوسانات خطی میشود، پتانسیل x^2 است. از آنجاییکه این پتانسیل رفتار تمام سیستمهای فیزیکی را در همسایگی نقطه‌ی تعادل توصیف میکند، به عنوان یک حالت حدی در حل تمام مسایل حالت تعادل بکار می‌آید. ظاهرا طبیعت آنچنان دغدغه‌ای برای پیروی از معادلات حل‌پذیر نداشته است چرا که بسیاری از پدیده‌ها با معادلاتی توصیف میشوند که غیر خطی هستند. در اینجا «کل چیزی فراتر از جمع اجزای خود است»[1] و همین نکته به آن می‌انجامد که عمده‌ی روشهای رایج در حل سیستمهای خطی که بر پایه‌ی «افراز هنایشها»[2] برپا شده‌اند بکار نیایند. ساده‌ترین معادلات غیرخطی میتوانند منجر به رفتارهای بسیار پیچیده‌ای شوند و شاید به همین دلیل رایج ترین روش برای نزدیک شدن به سیستمهای غیرخطی استفاده از ترسیم به جای حل معادلات است. این نکته که معادلات خطی تنها توصیف کننده‌ی حالت حدی از رفتارهای فراگیرتر سیستمهای غیر خطی میباشند، رفتارهای غنی‌تری را در سیستمهای غیر خطی امکان پذیر مینماید که در سیستمهای خطی امکان بروز ندارند و با معادلات خطی قابل توصیف نیستند. یکی از مهمترین این رفتارها تولید خودبخودی الگوهای هنجارمند مکانی[3] و زمانی[4] در مجموعه‌ی

[1] Walleczek

[2] superposition

[3] pattern formation

[4] synchronization

نوسانگرهای غیر خطی برهمکنشدار است. این فصل مروری است بر پدیده‌ی تولید نظم زمانی — همنوازی — که آن را با نگاهی به نوسانگرهای غیر خطی و روشهای تحلیل رفتار آنها آغاز میکنیم.

۱.۱ نوسانگرهای واداشته و نوسانگرهای خودنگهدار

یک معادله‌ی مرتبه‌ی دوم به صورت

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) \qquad (۱.۱)$$

با شرطهای آغازین $x(t_0)$ و $\dot{x}(t_0)$ مثالی از یک سیستم دینامیکی است. بدین معنی که حالت آینده‌ی سیستم یعنی $x(t)$ و $\dot{x}(t)$ به طور کامل از معادله و شرطهای آغازین قابل پیش‌بینی است. این معادله میتواند نمایانگر قانون دوم نیوتون برای یک ذره باشد که نیروی f روی آن اثر میکند. اگر زمان به شکل صریح در معادله پدیدار نشود آنرا خودگردان[۵] و در غیر اینصورت آنرا غیر خودگردان[۶] یا واداشته مینامیم. برای نمایش در فضای فاز، سرعت ذره $\dot{x}$ را به عنوان متغیر نوین تعریف کرده معادله‌ی ۱.۱ را به نگاره‌ی دو معادله‌ی مرتبه‌ی اول بازنویسی میکنیم:

$$\dot{x} = y \qquad (۲.۱)$$

$$\dot{y} = f(x, \dot{x}, t) \qquad (۳.۱)$$

در فضای فاز، حالت سیستم در هر زمان با یک جفت $(x(t), y(t))$ نمایان میشود که با گذر زمان پویش این نقطه در فضای فاز مسیر ذره را میسازد. نقاط ترازمندی[۷] در نمایش فاز سیستم نقاطی هستند که متغیرهای فاز سیستم هر دو ثابت باشند و به عبارت دیگر $\dot{x}$ و $\dot{y}$ با هم صفر شوند. این نقاط از آنجاییکه شیب مسیر فاز برای آنها ناشناخته است، نقاط تکینه یا نقاط تبهگن نیز نامیده میشوند. شناخت نقاط تکینه‌ی هر سیستم و طبقه‌بندی آنها از دید پایداری، نخستین گام در بررسی سیستمهای دینامیکی است. برای یک معادله‌ی مرتبه‌ی دوم با تعریف سرعت به عنوان متغیر

[۵] autonomous

[۶] non-autonomous

[۷] fixed points

دوم فاز، این نقاط همواره روی محور x قرار میگیرند اما برای یک سیستم دینامیکی دو بعدی در حالت کلی که با دو معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول نمایان میشود مکان این نقاط به یک محور محدود نمیشود.

برای آغاز یک بررسی باریکتر دسته‌یی ویژه از معادلات مرتبه‌ی دوم را در نظر میگیریم:

$$\ddot{x} + h(x, \dot{x}) + g(x) = 0 \qquad (۴.۱)$$

هنگامی که $h(x, \dot{x}) = 0$ معادله پس از ضرب در $\dot{x}$ قابل انتگرالگیری است. ثابت انتگرالگیری میتواند به عنوان انرژی کل $E = T + V$ در نظر گرفته شود که T انرژی جنبشی است و پتانسیل نیز بصورت $V = \int g(x)dx$ تعریف میشود. این مثالی از یک سیستم پایستار یا یک سیستم هامیلتونی است. در این سیستمها شرایط آغازین سیستم فراموش نمیشوند و حالت سیستم در هر زمان و در هر نقطه از فضای فاز وابسته به شرایط آغازین است. به عنوان نمونه نوسانگر خطی غیرهدرده[۸] به عنوان عضوی آشنا از سیستمهای هامیلتونی این ویژگی را داراست. بررسی نوسانگرهای خطی هدرده[۹] نیز میتواند در تبیین گفتارهای آینده مفید باشد. برای یک نوسانگر خطی هدرده $g(x) = x$ و $h(x, \dot{x}) = 2\gamma\dot{x}$. برای این نوسانگر مبدا مختصات در فضای فاز یک نقطه‌ی ترازمندی است که به ازای $\gamma > 0$ پایدار بوده و برای $\gamma < 0$ یعنی زمانی که هدردهی منفی است و انرژی به سیستم تزریق میشود ناپایدار است. برای نوسانگر هدرده پایدار بسته به اندازه‌ی هدررفت، نقطه‌ی ترازمندی میتواند یک گره پایدار[۱۰] یا یک کانون پایدار[۱۱] باشد که متناظر با آنها نوسانگر فراهدرده[۱۲] یا زیرهدرده[۱۳] است. برای این نوسانگرها $(\gamma \neq 0)$ حرکت دوره‌ای امکانپذیر نیست و هیچگاه در فضای فاز مسیر بسته تشکیل نمیشود.

حال یک نوسانگر خطی را در نظر میگیریم که با نیروی بیرونی نوسانی، واداشته شده است:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \epsilon\cos\omega t \qquad (۵.۱)$$

برای نوسانگر غیرهدرده، در پاسخ کلی، هم بسامد نیروی بیرونی و هم بسامد درونی نوسانگر حاضر خواهند بود: پاسخ

---

[۸] non-dissipative

[۹] dissipative

[۱۰] stable node

[۱۱] stable focus

[۱۲] overdamped

[۱۳] underdamped

کلی به صورت مجموع پاسخهای عمومی و خصوصی بوده که به ازای $\omega \neq \omega_0$ هر دو دوره‌ای خواهند بود. در صورتی که ایندو بسامد متناسب نباشند پاسخ کلی سیستم دوره‌ای‌گون [۱۴] بوده و در فضای فاز سیستم مسیر بسته تشکیل نمیشود. برای سیستم هدرده $\gamma > 0$ پاسخ عمومی این معادله با گذشت زمان کوچک میشود و جواب حالت ماندگار سیستم همان جواب خصوصی خواهد بود. برای این نوسانگر در جواب حالت پایا بسامد درونی نوسانگر غایب است و سیستم تنها با بسامد نیروی خارجی نوسان میکند؛ در طیف بسامدی سیگنال بیرونی هیچ تغییری پدید نمی آید و بدون نیروی خارجی سیستم توانا به نگهداشت نوسان خود نیست. این سیستم ناکنشگر[۱۵]، تنها به صورت یک فیلتر برای سیگنال بیرونی عمل میکند و هیچگونه برهمکنش فعال با نیروی خارجی ندارد.

با وجود هدردهی، برای اینکه نوسانگر توانا به نگهداشت حرکت خود در غیاب نیروی بیرونی بوده و ویژگیهای آن در حضور نیروی بیرونی در پاسخ سیستم تاثیر گذار باشد، نیاز به یک منبع انرژی درونی برای جبران هدردهی است. نوسانگرهای خودنگهدار[۱۶] دسته‌ای از نوسانگرها هستند که با وجود هدررفت بدون نیروی بیرونی توانایی نگهداری آهنگ درونی نوسان خود را دارند.

۱.۱.۱ نوسانگرهای خود نگهدار و مفهوم کران چرخه

معادله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\ddot{x} + 2(x^2 + \dot{x}^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (۶.۱)$$

در مقایسه با معادله‌ی ۵.۱ در اینجا $\gamma(x, \dot{x}) = x^2 + \dot{x}^2 - 1$ خود تابع حالت نوسانگر است و بسته به مکان نقطه‌ی نمایشگر ذره در فضای فاز میتواند منجر به هدررفت مثبت یا منفی شود: درون پرهون یکه، هدررفت منفی نشان آن است که نوسانگر انرژی دریافت میکند و دامنه‌ی نوسانات افزایش می‌یابد و مسیر آن مرکز گریز است و بیرون پرهون یکه، هدررفت مثبت بدین معنی است که نوسانگر انرژی از دست داده و دامنه‌ی نوسان کاهش می‌یابد. بدین گونه

[۱۴] quasi-periodic

[۱۵] passive

[۱۶] self-sustained oscillators

برای این نوسانگر به ازای همه‌ی شرایط آغازین، مسیر نقطه‌ی نمایشگر ذره در فضای فاز پس از زمان کافی به پرهون یکه میل میکند. چنین مسیری را کران چرخه[17] مینامند[۱۴]. در سامانه‌ای که دارای کران چرخه است به ازای همه‌ی شرایط آغازین که در حوزه‌ی کشش[18] آن هستند، حالت نهایی یک حرکت دوره‌ای روی کران چرخه است (شکل ۱.۱)، بدین معنی که شرایط آغازین «فراموش میشوند». ازینرو سیستمهای هامیلتونی اگرچه میتوانند مسیرهای بسته‌ای در فضای فاز داشته باشند اما از آنجاییکه این مسیرها مجزا نیستند، نمیتوانند کران چرخه باشند: وجود جمله‌ی هدردهی غیرخطی شرط بایسته برای وجود کران چرخه میباشد. نکته‌ی دیگری که شایان یادآوری است اینست که نوعی از کران چرخه‌ها وجود دارند که تمام مسیرهای همسایه‌ی آنها در فضای فاز، از آنها میگریزند. این دسته از کران چرخه‌ها از آنجاییکه نشاندهنده‌ی یک پویش دوره‌ای ناپایدار هستند در بررسی سیستمهای دینامیکی آنچنان مورد علاقه نیستند.

وجود یک کران چرخه‌ی پایدار در فضای فاز نوسانگر نشاندهنده‌ی آن است که این سیستم بدون نیاز به نیروی بیرونی بر خلاف نوسانگر خطی هدرده، توانایی نگهداشت حرکت خود را دارد. اینگونه نوسانگرها را « خودنگهدار»[19] مینامیم. نوسانگر خودنگهدار یک سامانه‌ی کنشگر[20] است، بدین معنی که دارای یک منبع انرژی درونی است که هدررفت سیستم را جبران میکند. اینگونه نوسانگرها در حضور نیروی بیرونی رفتار غنی‌تری نسبت به نوسانگرهای خطی از خود بروز میدهند و به طور کامل تسلیم نیروی بیرونی نیستند.

همچنین وجود کران چرخه‌ها در فضای فاز سیستم به معنی وجود پاسخهای دوره‌ای برای آن است، بنابراین برای چنین سیستمی میتوان «فاز» تعریف کرد. برای یک نوسانگر یک بعدی خطی خودگردان، فاز به طور طبیعی یکی از مختصات فضای فاز در دستگاه قطبی است که به طور خطی با زمان رشد میکند. از این دید میتوان فاز را به عنوان نمایانگری از سیستم فرض کرد که جایگزین زمان شده است که در نمایش فضای فاز به شکل آشکار وجود ندارد. این فروزه‌ی فاز را میتوان کلیدی برای فراگیر کردن تعریف فاز دانست. برای این کار نخست نمایانگری از سیستم را تعریف میکنیم که یکی از ابزار وارسی پایداری سیستمهای دینامیکی است.

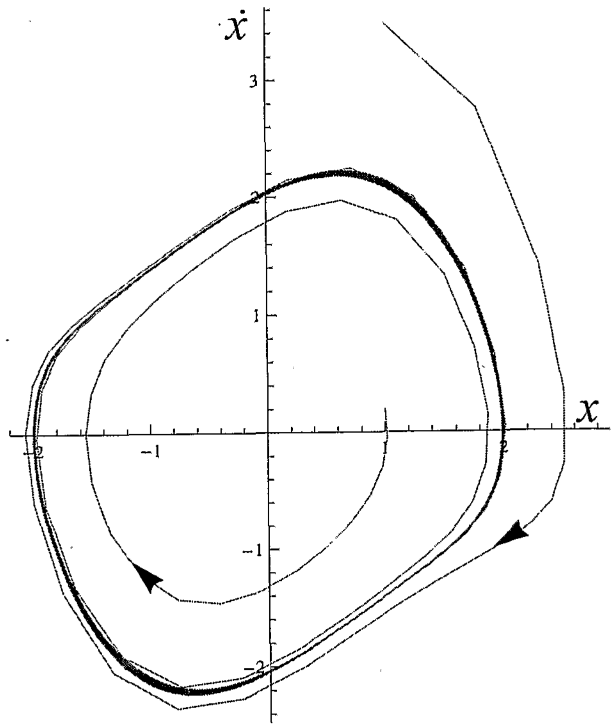
---

[17] limit cycle

[18] basin of attraction

[19] self-sustained

[20] active



شکل ۱.۱ نمایش فاز برای معادله‌ی وان درپول $\ddot{x} + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$ با $\epsilon = 0.5$. وجود کران چرخه که مسیرهای فاز به سوی آن میل میکنند در این نمایش آشکار است.

« نمای لیاپونف»[۲۱] به صورت آهنگ نمو دوری دو نقطه از فضای فاز سیستم به ازای دگرگونی یکی از درجات آزادی سیستم است [۱۵]. بدین معنی، نمای لیاپونف مثبت نشان وجود ناپایداری در سیستم است. در سیستمهای خودگردان که زمان به طور صریح در معادلات حرکت پدیدار نمیشود، به خاطر وجود تقارن پیوسته در سامانه، دستِ‌کم یکی از نماهای لیاپونف سیستم صفر است. مختصه‌ای از فضای فاز که نمای لیاپونف متناظر آن صفر است میتواند به عنوان فاز سیستم در نظر گرفته شود.

سیستمهای نوسانگر غیر خطی را میتوان بسته به شکل دگرگونی فاز آنها به دو دسته بخش کرد: دسته‌ی نخست «نوسانگرهای خطی‌گون»[۲۲] هستند که دگرگونی سیستم در آنها به صورت پیوسته انجام میگیرد. دسته دوم

[۲۱] Lyapunov exponent

[۲۲] quasi-linear oscillators

نوسانگرهای «افراز—آتش»[۲۳] میباشند که در آنها پس از یک دوره زمانی تا اندازه‌ای خاموش، سیستم دچار یک دگرگونی ناگهانی میشود. در اینگونه سیستمها دو مقیاس زمانی ناهمانند وجود دارد: یک زمان بلند که پارامتر مورد مطالعه‌ی سیستم بدون تغییر میماند و یک زمان کوتاه که پارامتر مورد نظر دچار دگرگونی ناگهانی میشود. اگر در این گونه سیستمها متغیرهایی باشند که به شکل پیوسته با زمان تغییر کنند میتوان فاز را به کمک آنها تعریف کرد اما این متغیرها همواره در دسترس نیستند. در این صورت رایج است که فاصله‌ی بین دو دگرگونی را یک دور کامل در نظر گرفته و فاز را به صورت یک کمیت پیوسته که به شکل همگن رشد میکند در نظر میگیرند:

$$\phi(t) = 2\pi k + 2\pi \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} \qquad (۷.۱)$$

که در اینجا $k = 1, 2, 3, ...$ و t_k و t_{k+1} زمانهای وقوع دو «آتش» پی‌درپی هستند. نمونه‌های جالبی از این دست نوسانگرها در حوزه‌های گوناگون وجود دارد: با بکارگیری یک خازن و یک مقاومت غیر خطی (مانند لامپ خلا)، میتوان یک موج دندان اره‌ای ساخت [۱۶] که در اسیلوسکوپ و تلویزیون از آن استفاده میشود. ورودی این مدار یک جریان مستقیم بوده و خروجی آن یک ولتاژ دندان اره‌ای روی خازن و یک قطار پالس جریان برای لامپ خلا است. در اصل این مدار یک مبدل دامنه‌ی جریان به بسامد است که البته خروجی آن سینوسی نیست. همانند بسیار پیچیده‌تر این مدار در سلولهای مغزی وجود دارد. در آنجا غشای سلولی نقش مقاومت غیر خطی را ایفا میکند و زمانی که ولتاژ بین بخش درونی و بیرونی غشای سلولی به کران مشخصی برسد، مقاومت کاهش قابل ملاحظه‌ای یافته و یک پالس جریان ایجاد میشود. بسامد ایجاد پالس را شدت انگیختار[۲۴] بیرونی مشخص میکند و داده‌ها به بسامد تبدیل میشوند [۱۷]. حرکت قطعات پوسته‌ی زمین نیز یک نمونه‌ی جالب از سامانه‌های افراز—آتش در مقیاس‌های زمانی بسیار بزرگتر است. در اینجا زمان افراز از اندازه‌ی چندین سال و زمان آتش (یعنی همان زمین‌لرزه)، از مرتبه‌ی چند ثانیه است[۱۸] .

برای نوسانگرهای خطی‌گون خودگردان نیز رایج است که فاز را به نوعی بازتعریف کنند که دگرگونی آن نسبت به زمان خطی باشد:

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 \qquad (۸.۱)$$

[۲۳] integrate-fire oscillators

[۲۴] stimulus

اینکار میتواند با میانگین‌گیری از فاز خام روی کران‌چرخه انجام شود. دینامیک فاز بازتعریف شده یادآور حرکت یک ذره بدون وجود نیرو است؛ این ویژگی فاز در توضیح امکان همنوازی در نوسانگرهای خودنگهدار ارزشمند است. بسامد نیز در نوسانگرهای غیر خطی خودنگهدار میتواند به طرز خام به شکل آهنگ تغییر فاز تعریف شود. اما این تعریف نیز طوری فراگیر میشود که بتواند برای نوسانگرهای آشوبناک نیز بکاربرده شود.

۲.۱.۱ نوسانگرهای آشوبناک

در یک سامانه‌ی خطی، بستگی به شرایط آغازین نیز خطی است. بدین معنی که دگرگونی اندکی در شرایط آغازین تغییری اندک در حالت سیستم در زمانهای بعد ایجاد میکند: اگر تغییر آغازین را دو برابر کنیم تغییرات در همه‌ی زمانها دو برابر میشوند. سیستمهای دینامیکی غیر خطی اما ممکن است بستگی بیشتری به شرایط آغازین داشته باشند و با تغییر اندکی در شرایط آغازین رفتار سیستم به طور قابل توجهی دگرگون شود. این نوع رفتارِ آشوبناک که نشان نوعی ناپایداری در سیستم است با وجود دستِ‌کم یک نمای لیاپونف مثبت در سیستم محرز میشود. نمای لیاپونف مثبت نشان آن است که دو نقطه از فضای فاز که در یک زمان بسیار به هم نزدیک هستند میتوانند در زمانهای آینده به اندازه‌ی زیادی از هم دور شوند[۱۵، ۱۴]. آشوب از این منظر میتواند به صورت حساسیت بسیار شدید به شرایط آغازین تعریف شود. شایان توجه است که سیستم آشوبناک یک سیستم دینامیکی است که توسط معادلات دیفرانسیل و شرایط آغازین به طور کامل توصیف میشود و از اینرو پیش‌بینی پذیر[۲۵] است. اما این پیش‌بینی برای نقاط مجاور در فضای فاز نتایج به مراتب متفاوتی بدست میدهد و از آنجاییکه شرایط آغازین نه در آزمایش و نه در حل عددی هیچگاه به طور دقیق محقق نمیشوند، پیش‌بینی‌ها اعتبار لازم را دارا نیستند و سیستم از این نگاه «غیر قابل پیش‌بینی» میباشد.

حال سامانه‌ای آشوبناک را در نظر میگیریم که نوعی رفتار نوسانی دارد یعنی میتواند مسیرهای تقریبا بسته‌ای در فضای فاز داشته باشد. این سیستم مایل به تکرار شرایط آغازین است اما یک تخطی ناچیز در یک دور با توجه به ویژگی سیستم میتواند منجر به تغییرات به مراتب بزرگتر در دورهای پسین گردد. پس فضای فاز سیستم شامل تعداد

[۲۵] deterministic

زیادی مسیرهای تقریبا بستهی ناپایدار خواهد بود که «کشاهای شگفت»[۲۶] نام گرفته‌اند[۱۹].

از آنجاییکه پریود نوسان برای هر یک از این مدارهای ناپایدار مقدار متفاوتی است، بسامد با تعریف رایج منجر به کمیتی متغیر و غیر قابل پیش‌بینی میشود. ازینرو برای این دسته نوسانگرها میتوان بسامد میانگین را به صورت شمار میانگین دورها در زمان طولانی تعریف کرد:

$$f = \lim_{\tau\to\infty} \frac{N_\tau}{\tau} \qquad (۹.۱)$$

که در اینجا N_τ شمار دورها در زمان بسیار بلند τ میباشد. از بسامد میانگین برای ارایه‌ی یک تعریف کلی برای همنوازی استفاده خواهیم کرد.

۲.۱ همنوازی، وارسی کیفی

یک نوسانگر خودنگهدار را در نظر میگیریم که یک نیروی دوره‌ای بیرونی روی آن اثر میکند. نخستین پیش‌بینی آن است که این نوسانگر بر خلاف نوسانگر خطی هدرده به نیروی بیرونی گردن نمی‌نهد و تلاش میکند آهنگ نوسان خود را نگه دارد، یعنی رفتاری همانند نوسانگر خطی بدون هدردهی از خود بروز میدهد. اثر نیروی بیرونی نیز به صورت یک بسامد دیگر در دینامیک سیستم آشکارمیگردد، بنابراین طیف سیستم شامل بسامد درونی و بیرونی خواهد بود که در حالت کلی اگر نسبت آنها کسری نباشد، منجر به یک حرکت دوره‌ای‌گون[۲۷] میشود. اما خواهیم دید ایستادگی سیستم برای نگهداشت بسامد درونی به رغم نیروی بیرونی میتواند بازای برخی اندازه‌های پارامترهای درونی سیستم و نیروی بیرونی شکسته شود و سیستم به نوعی توافق در رفتار با نیروی بیرونی برسد. در این صورت سیستم واداشته میتواند با نیروی بیرونی همنواز شده، رفتار دوره‌ای از خود بروز دهد.

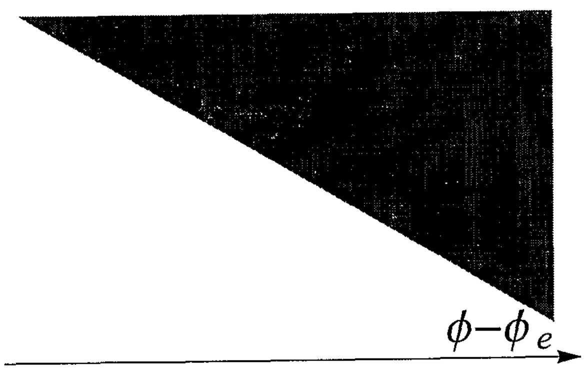
---

[۲۶] strange attractors

[۲۷] quasi-periodic

۱.۲.۱ همنوازی توسط نیروی بیرونی

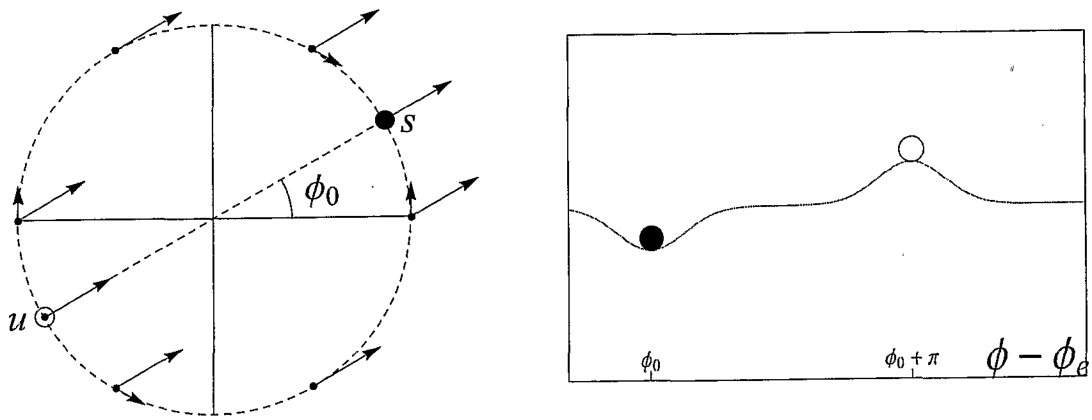
نخست یک نوسانگر خودنگهدار را بدون وجود نیروی بیرونی در نظر میگیریم. فاز بازتعریف شده‌ی این نوسانگر روی کران‌چرخه به شکل همگن با بسامد ω_0 تغییر میکند. برای نمایش فاز به دستگاه مختصاتی میرویم که با بسامد نیروی بیرونی ω میچرخد. در این دستگاه چرخان فاز با تندی $\omega - \omega_0$ تغییر میکند. از آنجاییکه تغییر فاز با زمان برای سیستم خودگردان خطی است، دینامیک فاز را، با تاکید روی ماهیت هدرده سیستم، میتوان به صورت ذره‌ای که روی یک سطح شیبدار داخل یک مایع وشکسان با سرعت حد به سمت پایین میلغزد نمایش داد: شیب سطح شیبدار (شکل ۲.۱)، در اینجا متناسب با ناکوکی $\omega - \omega_0$ است.



شکل ۲.۱دینامیک فاز نوسانگر با در نظر گرفتن هدردهی میتواند با حرکت یکنواخت یک ذره روی سطح شیبدار درون یک محیط وشکسان نمایش داده شود. شیب سطح شیبدار متناسب با ناکوکی $\omega - \omega_0$ خواهد بود.

اینک تلاش میکنیم ایده‌ای از چگونگی رفتار سیستم پس از اعمال نیروی بیرونی ارایه دهیم[۴]. از آنجاییکه دامنه روی کران‌چرخه کمیتی است که در حالت ترازمند پایدار قرار دارد، اگر نیرو کوچک باشد تاثیر قابل ملاحظه‌ای روی دامنه نخواهد داشت و با تقریب خوبی میتوان دامنه را مقید فرض کرد و از تاثیر نیروی خارجی روی آن صرفنظر کرد. فاز اما مختصه‌ی تقریبا آزاد بوده و بعبارتی دارای ترازمندی بی‌تفاوت است؛ بنابراین حتی نیروی کوچک میتواند دینامیک آنرا تحت تاثیر قرار دهد. در آغاز فرض میکنیم بسامد نیروی بیرونی با بسامد درونی نوسانگر یکی است؛

بعبارتی ناکوکی صفر است و ذره در دستگاه مختصات چرخان در فاز دلخواه ϕ ثابت است. در این دستگاه مختصات چرخان نیروی بیرونی مانند یک بردار ثابت رفتار میکند. همانگونه که در شکل ۳.۱ ملاحظه میشود افکنده‌ی این نیروی ثابت در جهت فاز در دو نقطه صفر خواهد بود که آشکارا نقاط تراز پایدار و ناپایدار فاز میباشند. بدین ترتیب نیروی بیرونی در پتانسیل تخت سیستم خودگردان که نشان ترازمندی بی‌تفاوت است، دو نقطه‌ی تراز پایدار و ناپایدار ایجاد میکند که ذره در نهایت با توجه به هدردهی، در نقطه‌ی تراز پایدار آرام میگیرد و با نیروی خارجی «همفاز» میشود.



شکل ۳.۱در دستگاه چرخان به ازای ناکوکی صفر بدون نیروی خارجی فاز ذره دارای ترازمندی بی‌تفاوت است. نیروی خارجی آنگونه که در شکل سمت راست نمایش داده شده است، یک نقطه‌ی تراز پایدار و یک نقطه‌ی تراز ناپایدار برای نوسانگر پدید می‌آورد. در شکل سمت چپ اثر نیرو در پدید آوردن نقاط تراز پایدار S و ناپایدار U آشکار است. قرار گرفتن ذره در حالت ترازمندی پایدار به معنی همفاز شدن آن با نیروی خارجی است.

با وجود ناکوکی غیر صفر، پتانسیل حالت خودگردان شیب غیر صفر خواهد داشت و ذره نیروی ثابتی را تجربه میکند که البته در حالت پایا با نیروی وشکسانی برابر است. حضور نیروی بیرونی به صورت یک بردار ثابت در دستگاه چرخان، باز امکان وجود نقاطی را روی دایره بوجود می‌آورد که افکنده‌ی نیروی بیرونی در سوی تغییر فاز، نیروی پیشران را خنثی کند و نقاط تراز ایجاد کند. در نمایش پتانسیل نقاط تراز پایدار با وجود کمینه‌های موضعی پدیدار میشوند که ذره بواسطه‌ی وشکسانی سیستم در آنها به دام میافتد که به معنی «همنواز» شدن با نیروی خارجی است. اما همانگونه که در شکل (۴.۱) دیده میشود نقاط تراز نسبت به حالت ناکوکی صفر جابجا میشوند، بدین معنی