دانشگاه صنعتی امیرکبیر(پلی تکنیک تهران)

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

رشته: ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات)

عنوان:

بکارگیری روش‌های نقطه داخلی برای حل مسائل برنامه‌ریزی نیمه معین مثبت

نگارنده:

مجید جابری پور

اساتید راهنما:

دکتر اسماعیل خرم- دکتر مصطفی شمسی

استاد مشاور:

دکتر عباس سیفی

بهمن ۱۳۸۶

بسمه تعالي

تـاريخ: ....

شماره مدرك ....

دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)

فـرم اطلاعات پايان‌نـامه
كارشنـاسي ارشد و دكتـرا
كتابخـانه مركـزي

مشخصات دانشجو	نام خانوادگی : جابری پور	نام : مجید	شماره دانشجویی: ۸۴۱۱۳۰۳۳
	دانشگاه : صنعتی امیر کبیر	دانشکده : ریاضی و علوم کامپیوتر	رشته تحصیلی : ریاضی کاربردی
عنوان	بکار گیری روش های نقطه داخلی برای حل مسائل برنامه یزی نیمه معین مثبت		

Title :	**Using interior point algorithms for solving semidefinite programming**

استاد راهنما	نام خانوادگی : خرم-شمسی	نام: اسماعیل-مصطفی
استاد مشاور	نام خانوادگی : سیفی	نام : عباس
دانشنامه	کارشناسی ○ ارشد ■ دکترا ○	سال تحصیلی: ۸۶-۸۴
نوع پروژه	کاربردی ○ بنیادی■ توسعه ای ○ نظری ○	

مشخصات ظاهری	تعداد صفحات:۹۲	تصویر: ■	جدول: ■	نمودار: ○	نقشه: ○	واژه‌نامه: ■	تعداد مراجع: ۴۱	تعداد ضمائم: ○ 0

زبان متن	فارسی ■ انگلیسی ○	چکیده	فارسی ■ انگلیسی ■
یاداشت	لوح فشرده ■ دیسکت فلاپی ○		
توصیفگر			
کلید واژه فارسی	**برنامه‌ریزی نیمه معین مثبت؛ نقطه داخلی؛ تابع مانعی؛ مسیر مرکزی؛ اولیه-دوگان؛ درج خود دوگان همگن**		
کلید واژه لاتین	Semidefinite programming; Interior point; Central path; Barrier function; Homogenous self-dual embedding; Primal-dual		

زندگی صحنه یکتای هنرمندی ماست

هر کسی نغمه خود خواند و از صحنه رود

صحنه پیوسته بجاست

خرم آن نغمه که مردم بسپارند به یاد

تقدیم به

مادر؛

که حرف به حرف محبت را برایم هجی کرد...

پدر؛

که همچون کوهی استوار تکیه‌گاه زندگی است.

و

دو خواهر عزیزم؛

که صمیمانه در همه مراحل زندگی همراهم بودند.

تقدیر و تشکر:

پس از حمد و ستایش خداوند منان بر خود لازم می‌دانم از زحمات بی‌دریغ بزرگوارانی که اینجانب را یاری نموده‌اند سپاسگزاری نمایم. از اساتید محترم راهنما، جناب دکتر اسماعیل خرم، جناب دکتر مصطفی شمسی و همچنین استاد مشاور، جناب دکتر سیفی که با تلاش‌های بی‌وقفه و راهنمایی های ارزشمند، مشوق و راهگشای بنده، در نگارش این پایان نامه بودند کمال تشکر و سپاسگزاری را دارم. همچنین از جناب استاد نظام الدین مهدوی امیری و جناب دکتر داریوش کیانی که داوری این پایان نامه را تقبل فرمودند تشکر و قدردانی می‌نمایم. از آقای حسین منصوری (دانشجوی دکتری دانشگاه Dulft) که دلسوزانه وقت گرانبهای خود را در اختیار اینجانب قرار دادند و اینجانب را از دانش خویش بهره‌مند کردند صمیمانه تشکر می‌نمایم. از تمامی دوستان و همکلاسی‌هایم مخصوصاً داوود میرزایی، حسین لرکی، اکبر محبی و رضا قاسمی‌یقین که در تمام این مدت همراه و همگام من بودند نیز قدردانی می‌نمایم و برای آنها آرزوی توفیق و موفقیت روز افزون در تمامی مراحل زندگی را از خداوند منان خواستارم.

چکیده

در این پایان‌نامه به بررسی روش‌های نقطه داخلی در حل مسائل برنامه‌ریزی نیمه معین مثبت می‌پردازیم که از میان همه روش‌های نقطه داخلی، روش تعقیب مسیر مرکزی[1] و روش درج خود دوگان همگن[2] را شرح می‌دهیم. از این روش‌ها، به عنوان موفق‌ترین وکارآمدترین روش‌های نقطه داخلی در برنامه‌ریزی نیمه معین مثبت یاد می‌شود. همچنین در ادامه، از میان جهت‌های جستجو در برنامه‌ریزی نیمه معین مثبت از جهت نستروف-تاد[3] برای بهنگام کردن تکرارها استفاده می‌شود. با استفاده از روش‌های یاد شده چگونگی حل مسائل برنامه‌ریزی نیمه معین مثبت را شرح می‌دهیم. سرانجام بر اساس مطالب این پایان‌نامه الگوریتمی را در برنامه‌ریزی خطی ارائه، و آن را به برنامه‌ریزی نیمه معین مثبت تعمیم می‌دهیم.

کلمات کلیدی: برنامه‌ریزی نیمه معین مثبت؛ نقطه داخلی؛ تابع مانعی؛ مسیر مرکزی؛ اولیه-دوگان؛ درج خود دوگان همگن.

[1] Central path-following methods
[2] Homogenous self-dual embedding
[3] Nesterov-Todd

فهرست مندرجات

فهرست اشکال

فهرست جداول

فهرست الگوریتم ها

مقدمه

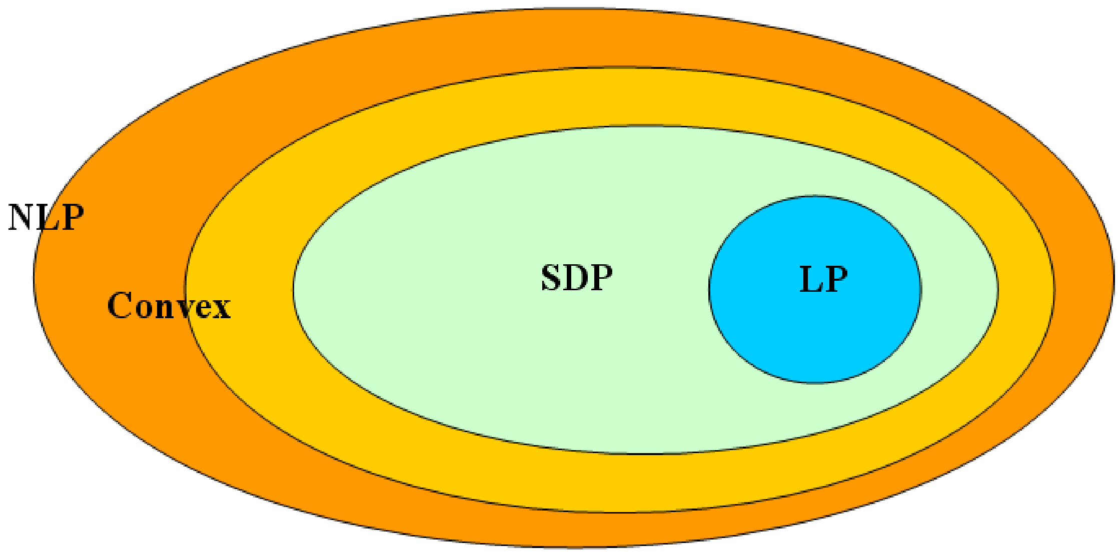
برنامه‌ریزی نیمه معین مثبت، زمینه ای جدید در برنامه‌ریزی ریاضی است. ایـن برنامـه‌ریـزی یکـی از جذاب‌ترین و فعال‌ترین زمینه‌های تحقیق در بهینه‌سازی در دو دهه اخیر بوده است. ایـن موضـوع، بـه لحاظ کاربردهای متفاوت در برنامه‌ریزی محدب، بهینه سازی عددی، بهینـه سـازی ترکیبـاتی، نظریـه کنترل، آمار و ... مورد توجه محققان قرار گرفته است.

برنامه‌ریزی نیمه معین مثبت (SDP[1]) در واقع برنامه‌ریزی خطی بـر روی مـاتریس‌هـای نیمـه معـین مثبت است. به عبارت دیگر، محدودیت ماتریسی جایگزین محدودیت برداری می‌شـود(جـدول ۱). بـه همین دلیل چندان تعجب‌آور نیست که قضایای این برنامه‌ریزی در راستای قضایای برنامه‌ریزی خطـی باشند. اکثر الگوریتم‌های برنامه‌ریزی خطی به طور کلی‌تر برای برنامه‌ریزی نیمه معین مثبـت بـه کـار گرفته می شوند. اگر چه تفاوت‌هایی بین این دو برنامه‌ریـزی وجـود دارنـد (بـه عنـوان مثـال، نتـایج دوگانی برای برنامه‌ریزی نیمه معین مثبت ضعیف‌تر از برنامه‌ریزی خطـی اسـت و از روش سـیمپلکس برای حل برنامه‌ریزی معین مثبت نمی توان بطور مستقیم استفاده کرد).

برنامه‌ریزی نیمه معین مثبت، برنامه‌ریزی محدب است که نسبت به برنامه‌ریزی خطی کلیت بیشـتری دارد و در عین حال حل آن سخت‌تر نیز نیست(شکل۱). اولین بار بلمن و فن[2] [۱] مقاله‌ای را با عنوان "برنامه‌ریزی خطی با متغیرهای ماتریسی" در ۱۹۶۳ مطرح کردند. این شاید بهترین و گویاترین بیـان برای مفهوم برنامه‌ریزی نیمه معین مثبت است. لازم به ذکر است که بر اساس مطالب این پایـان نامـه مقالات [۲] و[۳] تهیه شدند.

---

[1] Semidefinite programming
[2] Bellman-Fan



شکل ۱: ارتباط بین برنامه‌ریزی نیمه معین مثبت با دیگر برنامه ریزی‌ها

مطالب این پایان‌نامه به صورت زیر سازماندهی شده‌اند:
در فصل اول، ابتدا به معرفی برنامه‌ریزی نیمه مثبت و تعاریف و قضایای مورد نیاز می پردازیم. در فصل دوم، برای تشریح و درک بهتر تطبیق روش‌های نقطه داخلی در برنامه‌ریزی نیمه معین مثبت، ابتدا به تشریح روش‌های نقطه داخلی و ایده این روش‌ها در برنامه‌ریزی خطی می پردازیم، که در میان همه روش‌های نقطه داخلی به روش گام بلند و گام کوتاه تعقیب مسیر مرکزی، همچنین به روش درج خود دوگان همگن بسنده می کنیم. در فصل سوم، روش های تعقیب مسیر مرکزی و روش درج خود دوگان همگن را به برنامه‌ریزی نیمه معین مثبت تعمیم خواهیم داد و چگونگی پیاده‌سازی آنها را توضیح می‌دهیم. در فصل چهارم، یک الگوریتم برنامه‌ریزی خطی ارائه می‌دهیم که برای اجرا نیازی به نقطه شروع اکیداً شدنی ندارد و می تواند از هر نقطه دلخواه شروع کند. این الگوریتم را نیز برای برنامه‌ریزی نیمه معین مثبت تعمیم می‌دهیم. سرانجام در فصل آخر نتیجه‌گیری پایان‌نامه را بیان می‌کنیم.

فصل ۱

تعاریف و قضایا، و معرفی برنامه‌ریزی نیمه معین مثبت

در این فصل، ابتدا نگاهی گذرا به تاریخچه برنامه ریزی نیمه معین مثبت خواهیم داشت. در ادامه به بیان صورت‌های مختلف برنامه‌ریزی نیمه معین مثبت و تعاریف و مفاهیم اساسی این برنامه ریزی می‌پردازیم. قضایا و تعاریف آمده در این فصل از مرجع [۴] آورده شده است.

۱-۱ مروری بر تاریخچه

برنامه‌ریزی خطی در دهه‌های ۵۰ و ۶۰ به خاطر روش کارآمد سیمپلکس دانتسیگ رشد زیادی یافت. با وجود اینکه برنامه‌ریزی نیمه معین مثبت شناخته شده بود، چندان توجه‌ای به آن نمی‌شد. یکی از دلایل اساسی این بود که روش سیمپلکس بر روی آن قابل اجرا نبود. با ایجاد الگوریتم‌های کارآمد جدید در دهه‌های ۸۰ و ۹۰، تحقیقات در این زمینه گسترش یافت، اگر چه این تنها دلیل نبود. بلکه توانایی قدرتمند SDP در مدل‌سازی مسائل مختلف در زمینه‌های متعدد دانشمندان را متوجه خود کرده بود. اولین مقاله در زمینه برنامه‌ریزی نیمه معین مثبت توسط بلمن و فن با عنوان برنامه‌ریزی خطی با متغیرهای ماتریسی در سال ۱۹۶۳ مطرح شد. آنها توانستند قضایای دوگان را بدست آورند و نشان بدهند که شرط نقطه داخلی برای برنامه‌ریزی نیمه معین مثبت لازم است. اگرچه اهمیت برنامه‌ریزی نیمه معین مثبت خیلی زودتر در ۱۹۸۰ توسط لیاپانوف[۱] مشخص شده بود. لیاپانوف نشان داد که معادله دیفرانسیل $\frac{d}{dt}x(t)=Ax(t)$ پایدار است اگر وتنها اگر ماتریس معین مثبتی وجود داشته باشد، به طوری که $A^TP+PA<0$. پس از آن افرادی چون پست نیکوف[۲]، یاکیوبویچ[۳] و لور[۴] در دهه‌های ۴۰، ۵۰ و۶۰ روش‌های لیاپانوف را در مهندسی کنترل بکار بستند و اهمیت برنامه‌ریزی نامساوی ماتریسی خطی را دوچندان کردند. دراوایل دهه ۷۰، دوناث و هافمن[۵] و سپس کالوم و دوناث[۶] و ولف[۷] نشان دادند مسائل سخت افراز گراف‌ها ارتباط نزدیکی با برنامه‌ریزی نیمه معین مثبت دارند و با مسائل بهینه‌سازی مقدار ویژه مرتبط هستند. سپس در ۱۹۷۱، لواژ[۸] با فرمولبندی برنامه-ریزی نیمه معین مثبت، کرانی برای ظرفیت شانون[۹] بدست آورد و بدین وسیله نیز ظرفیت پنج ضلعی را پیدا کرد. تا آن موقع روش موثر شناخته شده برای SDP، روش بیضوی بود که توسط گروتشل[۱۰]، لواژ و شرایور[۱۱] در بهینه‌سازی ترکیباتی مورد استفاده قرار گرفت. پس از آن لواژ و شرایور نشان دادند که چگونه SDP می‌تواند مسائل صفر و یک را فرمولبندی کند و حدود بهتری را نسبت به LP ارائه

[۱] Lyapunov
[۲] Postnikov
[۳] Yakubovich
[۴] Lure
[۵] Donath and Hoffman
[۶] Cullum, Donath
[۷] Wolf
[۸] Lovasz
[۹] Shannon
[۱۰] Grotschel
[۱۱] Schijver

دهد. فلچر[۱] در دهه ۸۰ از SDP در مسائل آمار استفاده کرد و برنامه‌ریزی نیمه معین مثبت را در میان سایر برنامه‌ریزی‌های غیرخطی دوباره زنده کرد، که منجر به انتشار مقالات متعددی شد.
روش‌های نقطه داخلی برای LP توسط کارمارکار[۲]در برنامه‌ریزی خطی در ۱۹۸۴ [۵] معرفی شدند. پس از آن‌که نتایج عملی بسیار چشمگیری داشتند، اولین بار توسط فرید علیزاده[۳][۶] و نیز به طور جداگانه توسط نستروف و نمیروفسکی[۴] [۷]، ازبرنامه‌ریزی خطی به برنامه‌ریزی نیمه معین مثبت تعمیم پیدا کردند، و روش‌های نقطه داخلی را بیش از بیش مورد توجه قرار دادند. از جمله مقالات ارزشمندی که در ارتباط با بکارگیری روش‌های نقطه داخلی بر روی برنامه‌ریزی نیمه معین مثبت می‌توان عنوان کرد، عبارتند از: وندربرگ و بوید[۵][۸]، رندل ، وندربای و ولکویکز[۶] [۹]، علیزاده، های‌برلی و اورتن[۱۰][۷]، کوجیما، شیندو و هارا[۸][۱۱]، فیبوسویچ[۹][۱۲]، گاهینه و نمیروفسکی[۱۰] [۱۳]، فروبند[۱۱] [۱۴]. همچنین به چند مرجع مفید در این زمینه می‌توان اشاره کرد:
دن هرتوگ[۱۲][۱۵]، کلرک[۱۳][۴]، کتاب راهنمای ولکویکز[۱۶]،[۱۷] و[۱۸]از آن‌جمله است.

تعریف ماتریس(نیمه معین مثبت)۱-۱-۱ . مجموعه همه ماتریس‌های $n\times n$ متقارن را به صورت S_n نمایش می دهیم. ماتریس $S\in S_n$ را نیمه معین مثبت می‌گوییم هرگاه $\forall x\in \mathbb{R}^n, x^T S x\geq 0$، و آن را به صورت $S\succeq 0$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ماتریس(معین مثبت۱-۱-۲. ماتریس $S\in S_n$ را معین مثبت می گوییم هرگاه $\forall x\neq 0,\ x\in \mathbb{R}^n, x^T S x>0$، و آن را به صورت $S\succ 0$ نمایش می‌دهیم.
. در چند سال اخیر، برنامه‌ریزی نیمه معین مثبت با توجه به کاربردهای متعدد آن در مهندسی و همچنین بهینه سازی ترکیباتی، کنترل و... مورد توجه زیادی قرار گرفته است. ما در این جا برای آشنایی بیشتر خواننده چند مثال از کاربردهای آن را می‌آوریم.

مثال۱-۱-۳ . مینیمم کردن ماکزیمم مقدار ویژه یک ماتریس

فرض کنید ماتریس متقارن $A(x)$ به صورت ترکیبی از $x\in\mathbb{R}^n$، به صورت زیر نوشته شود: $A(x)=A_0+x_1A_1+\dots+x_nA_n$ که $A_i=A_i^T\in\mathbb{R}^{n\times n}$. با توجه به آنچه گفته شد، قصد داریم ماکسیمم مقدار ویژه ماتریس $A(x)$ را مینیمم کنیم. براحتی با دانستن این نکته که $t\geq \lambda_{\max}(A(x))$ اگر و تنها اگر $tI-A(x)\succeq 0$، می‌توان این مسأله را به یک مسأله برنامه‌ریزی‌نیمه معین مثبت تبدیل کرد:

---

۱ Fletcher
۲ Karmarkar
۳ Farid Alizadeh
۴ Nesterov-Nemirovsky
۵ Vanderberghe-Boyd
۶ Rendl, Vanderbei, Wolkowicz
۷ Alizadeh,Haeberly, and Overton
۸ Kojima, Shindoh, and Hara
۹ Faybusovich
۱۰ Gahinet and Nemirovsky
۱۱ Freund
۱۲ Den Hertog
۱۳ Klerk

$$\begin{aligned} &\min \quad t \\ &tI-A(x)\succeq 0, \end{aligned}$$

که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ و $t \in \mathbb{R}$.

مثال۱-۱-۴ . مسأله غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\min \quad \frac{(c^T x)^2}{d^T x} \\ &Ax+b \geq 0. \end{aligned}$$

فرض کنید $d^T x > 0$. این مسأله را با یک مسأله بهینه سازی مدلبندی می‌کنیم. متغیر کمکی t را به عنوان کران بالا برای تابع هدف در نظر می گیریم. خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\min \; t \\ &Ax+b \geq 0, \\ &\frac{(c^T x)^2}{d^T x} \leq t. \end{aligned}$$

حال همه محدودیت‌ها را می‌توان به صورت نامساوی خطی ماتریس بر حسب متغیرهای x و t نشان داد:

$$\begin{aligned} &\min \quad t \\ &\begin{pmatrix} \mathrm{diag}(Ax+b) & 0 & 0 \\ 0 & t & c^T x \\ 0 & c^T x & d^T x \end{pmatrix} \succeq 0. \end{aligned}$$

توجه شود که $\begin{pmatrix} t & c^T x \\ c^T x & d^T x \end{pmatrix} \succeq 0$ معادل است با $t - \frac{(c^T x)^2}{d^T x} \geq 0$ و $d^T x \geq 0$ ، که یک مکمل شور است.

تعریف (نرم طبیعی)۱-۱-۵. نرم طبیعی ماتریس A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|A\|_2 = (\lambda_{\max}(A^T A))^{1/2}.$$

قضیه (مکمل شور[۱])۱-۱-۶ [۴].

فرض کنید $M=\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}$، که درآن A ماتریس معین مثبت و C متقارن است. آنگاه ماتریس $C-B^TA^{-1}B$ مکمل شور A در M گفته می‌شود.

موارد زیر معادلند:

۱- M (نیمه) معین مثبت است.

۲- $C-B^TA^{-1}B$ (نیمه) معین است.

مثال۱-۱-۷. مینیمم کردن نرم ماتریس

فرض کنید $A(x)=A_0+x_1A_1+x_2A_2+...+x_kA_k \in \mathbb{R}^{m\times n}$

حال براحتی می‌توان مسأله $\min \|A(x)\|_2$ را به صورت زیر نوشت:

$$\min \ t$$
$$\begin{bmatrix} tI & A(x) \\ A(x)^T & tI \end{bmatrix} \succeq 0.$$

مثال۱-۱-۸ .تقریب لگاریتمی چبیشف

فرض کنید که قصد داریم دستگاه $A(x)\approx b$ را به صورت تقریبی حل کنیم، که در آن $A=[a_1,...,a_p]^T \in \mathbb{R}^{m\times m}$ و $b\in\mathbb{R}^m$. با تقریب لگاریتمی چبیشف می توانیم مسأله را به صورت برنامه‌ریزی نیمه معین مثبت نمایش داد.

تقریب چبیشف همواره نرم بی‌نهایت را مینیمم می‌کند یعنی، $\min \ \|A(x)-b\|_\infty$:

$$\min \ \|A(x)-b\|_\infty = \min_x \ \max_i \left|a_i^T x - b\right|$$

در این حالت مسأله را به صورت یک مسأله برنامه‌ریزی خطی فرمولبندی می‌کنیم :

$$\min \ t$$
$$-t \le a_i^T x - b_i \le t, \ i=1,...,m$$

در بعضی موارد که مقدار b_i ها، بزرگ باشند برای اینکه از کار با مقادیر بزرگ پرهیز کنیم از تابع لگاریتمی بدین منظور استفاده می‌کنیم. و دستگاه را به صورت لگاریتمی نمایش می‌دهیم:

$$\min \ \max\left|\log(a_i^T x)-\log(b_i)\right|,$$

و با فرض اینکه $a_i^T x>0$ و $b_i>0$، داریم:

$$\left|\log(a_i^T x)-\log(b_i)\right| = \log\max\left(\frac{a_i^T x}{b_i}, \frac{b_i}{a_i^T x}\right),$$

حال به راحتی می توان نوشت :

---

[۱] Schur complement

$$\begin{aligned}&\min\ t\\&\begin{bmatrix} t-\frac{a_i^T x}{b_i} & 0 & 0\\ 0 & \frac{a_i^T x}{b_i} & 1\\ 0 & 1 & t \end{bmatrix}\succeq 0,\quad i=1,\ldots,m.\end{aligned}$$

مثال۱-۱-۹ . بهینه‌سازی سازه

یک سازه متشکل از k میله انعطاف پذیر را در نظر بگیرید که مجموعه‌ای از p گره را بـه هـم متصـل می‌کنند. هندسه مسأله و طول میله‌ها ثابت فرض شده‌اند. فرض کنید که $i=1,\ldots,p$ و f_i مجموعـه نیروهای خارجی باشند که بر گره‌ها وارد می‌شوند، و جابجایی گره‌ها براساس نیـروی‌هـایی کـه بـر آن وارد می‌شود برابر d است. هدف در اینجا بدست آوردن یک سطح مقطـع مناسـب بـرای میلـه هاسـت بطوریکه مقدار انرژی ذخیره شده یعنی $\frac{1}{2}f^T d$ مینیمم شود. همچنین ما باید بر روی حجم مسأله یـا بطور معادل وزن آن محدودیت و برای سطح مقطع هر میله کران بالا و پایین در نظر بگیریم.

متغیرهای طراحی در این مسأله مساحت سطح مقطع x_i است و رابطه بین f و d خطی است کـه به صورت $f=A(x)d$ نمایش داده می‌شود، که به $A(x)=\sum_{i=1}^{k}x_iA_i$ ماتریس سـختی مـی‌گوینـد. A_i ها ماتریس‌های متقارن و نیمه معین مثبت هستند که وابسته به پارامترهای مشخصه چون مـدول یانگ، طول میله و هندسه مسأله هستند. اکنون مسأله بهینه سازی بدین صورت است:

$$\begin{aligned}&\min\ f^T d\\&f=A(x)d,\\&\sum_{i=1}^{k}l_i x_i\le v,\\&\underline{x}_i\le x_i\le\overline{x}_i,\quad i=1,\ldots,k,\end{aligned}$$

که d و x متغیرهای مسأله، vماکزیم حجم، l_i ها طول میله‌هـا، $\underline{x}_i$، $\overline{x}_i$ بـه ترتیـب کـران بـالا و پایین مساحت سطح مقطع میله‌هاست. برای سادگی فرض می‌کنیم $\underline{x}_i>0$ و $A(x)>0$. حـال مـی توانیم d را حذف کنیم و بنویسیم :

$$\begin{aligned}&\min\ f^T A(x)^{-1}f\\&\sum_{i=1}^{k}l_i x_i\le v,\\&\underline{x}_i\le x_i\le\overline{x}_i,\quad i=1,\ldots,k.\end{aligned}$$

حال این مسأله بهینه‌سازی را به صورت یک مسآله برنامه‌ریزی نیمه معین مثبت نمایش می‌دهیم:.

$$
\begin{aligned}
&\min \ t\\
&\begin{bmatrix} t & f^T \\ f & A(x) \end{bmatrix} \succeq 0,\\
&\sum_{i=1}^{k} l_i x_i \le v,\\
&\underline{x}_i \le x_i \le \overline{x}_i, \quad i=1,....,k.
\end{aligned}
$$

توجه شود که ما از مکمل شور بر حسب x و t برای بیان $f^T A(x)^{-1} f \le t$ به صورت یک مدل برنامه‌ریزی نیمه معین مثبت استفاده کردیم.

۱ ۴ بیان مسأله

صورت اول

در اینجا به معرفی صورت‌های مختلف برنامه‌ریزی نیمه معین مثبت می‌پردازیم.

تعریف (ضرب داخلی)۱-۲-۱ . ضرب داخلی دو ماتریس A و B به صورت زیر تعریف می‌کنیم و با نماد $\bullet$ نمایش می‌دهیم.

$$A \bullet B = \langle A,B \rangle = Tr(AB^T) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}.$$

در برنامه‌ریزی نیمه معین مثبت هدف مینیمم کردن ضرب داخلی $C \bullet X$ است که در آن ماتریس متقارن $C_{n\times n}$ ثابت، و ماتریس متقارن $X_{n\times n}$ متغیر است:

$$
\begin{aligned}
&\min \ \mathrm{C} \bullet \mathrm{X}\\
&\mathrm{A_i} \bullet X = b_i, \qquad \mathrm{i=1,...,m}\\
&X \succeq 0
\end{aligned}
\tag{۱}
$$

که در آن $X_{n\times n} \in S_n$، $b_i \in R^m$ ، $A_i \in S_n$، و $C \in S_n$ یک ماتریس ثابت است.

با توجه به این که ضرب داخلی دو ماتریس با رد حاصلضرب آن دو برابر است، لذا می توان فرمولبندی (۱) به صورت زیر نیز نوشت:

$$
\begin{aligned}
&\min \ \mathrm{Tr(CX)}\\
&\mathrm{Tr(A_i}X) = b_i, \quad \mathrm{i=1,...,m}\\
&\mathrm{X} \succeq 0
\end{aligned}
\tag{۲}
$$

یا

$$
\begin{aligned}
&\min \ \langle \mathrm{C,X} \rangle\\
&\langle \mathrm{A_i}, X \rangle = b_i, \quad \mathrm{i=1,...,m}\\
&\mathrm{X} \succeq 0
\end{aligned}
\tag{۳}
$$