دانشگاه پیام نور

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض

دانشکده علوم

گروه ریاضی

عنوان پایان نامه :

هم مشتق های نرمال برای توابع مجموعه ای مقدار
و قضایای توابع ضمنی

استاد راهنما:

دکتر محسن علیمحمدی

استاد مشاور:

دکتر هادی خدابخشیان

مولف:

حسین آرین

مرداد ماه *1388*

بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور

پایان نامه
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی محض

دانشکده علوم
گروه ریاضی

عنوان پایان نامه :

هم مشتق های نرمال برای توابع مجموعه ای مقدار
و قضایای توابع ضمنی

استاد راهنما:

دکتر محسن علیمحمدی

استاد مشاور:

دکتر هادی خدابخشیان

مولف:

حسین آرین

مرداد ماه 1388

باسمه تعالی

((تصویب نامه پایان نامه))

پایان نامه کارشناسی ارشد تحت عنوان : هم مشتقهای نرمال برای توابع مجموعه ای مقدار و قضایای توابع ضمنی که توسط **آقای حسین آرین** تهیه به هیات داوران ارائه گردیده است مورد تایید می باشد.

تاریخ دفاع:۸۸/۰۵/۰۷ نمره : ۱۹ (نوزده) درجه ارزشیابی: ....

اعضای هیات داوران :

نام ونام خانوادگی:	هیات داوران	مرتبه علمی	امضا
۱- جناب آقای دکتر محسن علیمحمدی	استاد راهنما	دانشیار	
۲- جناب آقای دکتر هادی خدابخشیان	استاد مشاور		
۳- جناب آقای دکتر ماشاء اله متین فر	استاد داور خارجی	استادیار	
۴- جناب آقای دکتر تقی کریمی	**استاد** داور داخلی		
۵- جناب آقای دکتر تقی کریمی	نماینده گروه		

تقدیم به

روان مادرم به عزیز ترین و مقدس ترین بانوی زندگیم که مرابه نیروی عشق تا سرچشمه سعادت ابدی رهنمون شد و مفهوم سعادت را در زمزمه هایش به جانم هدیه کرد.

روان مادرم شادان که عمری	***مرا در راه ایزد رهبری کرد***
بگوشم نغمه توحید سر داد	***به جای مادری پیغمبری کرد.***

تقدیر و سپاس از استاد ارجمند جناب

آقای دکتر محسن علیمحمدی که در طول این مدت در محضرشان جرعه نوش زلال معرفت بودم کسی که جویبار سرگردان اندیشه ام را با مسیر دریا آشنا ساخت و کسی که بهترین راه سعادت را که دانش و آگاهی توام با کردار است به من آشکار ساخت راهی که پیمودن آن بالاترین موهبت برای من بود.همچنین از آقای دکتر هادی خدابخشیان که سمت استاد مشاور اینجانب را به عهده داشتند تشکر می نمایم و از دکتر ماشااله متین فر و دکتر تقی کریمی که زحمت داوری این پایان نامه را متحمل شدند،قدردانی می نمایم .همچنین از گروه ریاضی دانشگاه پیام نور مرکز فریمان به دلیل همکاری بی شائبه خود برای این جانب تشکر می کنم .

و قدر دان زحمات مهندس محمد حسینی و مرتضی کوزه گر نیز می باشم .

نام خانوادگی : آرین	**نام** : حسین
استاد راهنما : دکتر محسن علیمحمدی	**استاد مشاور** : دکتر هادی خدابخشیان
دانشکده : علوم پایه **رشته** : ریاضی محض	**گرایش** : آنالیز مقطع : کارشناسی ارشد
تاریخ دفاع : 1388\5\7	**تعداد صفحات**100

عنوان پایان نامه :هم مشتق های نرمال برای توابع مجموعه ای مقدار و قضایای توابع ضمنی

کلید واژه ها: توابع مجموعه ای مقدار – هم مشتق های نرمال- تصویر متریکی – قضیه تابع ضمنی – نیمه پیوسته پایینی – منظم متریکی – خاصیت شبه لیپ شیتس .

چکیده:

در چارچوب نظریه هم مشتق های نرمال برای توابع مجموعه ای مقدار قضایای جدیدی برای توابع ضمنی بدست می آید .ابزار های اصلی اثبات عبارتند از :

1)اصل تغیرات اکلند

2)مدل غیر هموار ی از قاعده فرما

3)قاعده جمع

4)برآورد تفصیلی برای توابع حاشیه ای

که توسط بوریس موردوکویچ و یونگگ شائو در مقاله آنالیز دنباله ای غیر هموار در فضای آسپلوند آورده شده است .

امضاء استاد راهنما :

تقریبا،

به خاطرشکل کلی جهان که کاملترین است و در حقیقت طراحی شده است بوسله داناترین خالق ،هیچ چیزی در سراسر جهان اتفاق نخواهد افتاد بدون قانون افراط و تفریط که در هر حال در ظاهر خارجی در حال درخشش است (یعنی نمود پیدا می کند).

Leonhard Euler (1744)

فهرست مندرجات

فصل ۱

کلیات

۱—۱ مقدمه

مباحث تغییراتی (آنالیز تغییراتی)شامل تکنیک های کلاسیکی هستند که پیدایش و کاربرد آنها به قبل از توسعه حساب تغییرات بر می گردد. تقابل بین اصول تغییراتی مدرن و آنالیز غیر هموار ،نشان دهنده دامنه وسیعی از کاربردهای این تکنیک ها است. کاربرد آنالیز تغیراتی و آنالیز غیر هموار در صنایع کشورهای صنعتی، در مسائل بهینه سازی و سیستمهای کنترلی مشهود است.
از جهتی دیگر ما از دیر باز با تابع ضمنی و قضایای تابع ضمنی و کاربرد این مسائل در معادلات دیفرانسیل و بهینه سازی و سیستمهای دینامیکی کم و بیش آشنایی داریم.

اگر X و P فضاهای توپولوژیک وY فضای برداری توپولوژیک و$F : X \times P \rightrightarrows Y$ تابع مجموعه‌ای مقدار باشد. فرض کنید $(x_o, p_o) \in X \times P$ است به طوری که

$$o \in F(x_o, p_o).$$

نگاشت مجموعه ای مقدار $G : P \rightrightarrows X$ با تعریف

$$G(p) := \{x \in X | \circ \in F(x, p)\}$$

را یک تابع ضمنی مجموعه‌ای مقدار می نامیم.
در این پایان نامه شرایطی از F را فراهم می آوریم به طوری که G در $p_\circ$ نیمه پیوسته‌پایینی باشد و همچنین G در(x_o, p_o) تحت شرایط مشخص شده منظم متریکی و بنابر شرایط دیگری برای F ، G در (p_o, x_o) شبه لیپ شیتس باشد.
در فصل اول به بیان سوال تحقیق و اهداف تحقیق می پردازیم و روشها و ابزارهای جمع آوری اطلاعات را معرفی می کنیم.
در فصل دوم ابتدا پیشینه ای از آنالیز غیر هموار و آنالیز تغییراتی را بیان کرده و سپس به ارائه خلاصه ای از کارهای که دانشمندان در ارتباط با قضایای تابع مجموعه مقدار ضمنی با استفاده از

آنالیز غیر هموار انجام دادند می پردازیم.

در فصل سوم بعضی از تعاریف و قضایایی از آنالیز تابعی و محدب، چون فضای انعکاسی ،فضای باناخ، توپولوژی ضعیف ستاره، غلاف محدب، مخروط، غلاف مخروطی، مخروط محدب و تابع لیپ شیتس ویژگی های توابع لیپ شیتس و... را می آوریم.

در فصل چهارم به بیان تعریف تابع مجموعه ای مقدار و تعریف جدیدی از مخروط نرمال که مشهور به مخروط نرمال موردوکویچ است می پردازیم. سپس با استفاده از این تعریف زیر دیفرانسیل، زیر دیفرانسیل های تعمیم یافته و هم مشتق ها را تعریف خواهیم کرد. تفاوت این تعریف زیر دیفرانسیل با تعاریف دیگر در این است که با استفاده از مخروط نرمال موردوکویچ شرط محدب بودن برداشته می شود. بعد از آن به بیان قضایایی چون ε—نرمال ها در مجموعه های محدب ،پایه های نرمال در بعد متناهی و...می پردازیم و قضیه مهم و پر کاربرد مدل غیر همواری از قائده فرما را ارائه می کنیم .در بخش دیگری از این فصل فضای جدیدی با کارایی های بهتر از فضای باناخ به نام فضای آسپلوند را معرفی می کنیم.

در حقیقت فصل چهارم پیش نیازی برای فصل پنجم محسوب می شود.

در فصل پنجم تابع ضمنی مجموعه ای مقدار را معرفی می کنیم سپس به ارائه قضایایی از توابع ضمنی مجموعه ای مقدار خواهیم پرداخت .درست است که چنین قضایایی در مراجعی چون [۸,۱۵,۳۹,۴۰] آورده شده اند اما هدف این فصل مطالعه نوع جدیدی از اثبات برای این قضایا همراه با کاستن از شرایط و اضافه نمودن نتایج با استفاده از مطالب فصل ۴ می باشد.

۱ـــ۲ تعریف مساله

تعریف ۱.۲.۱:

برای معادله ضمنی $F(x,y)=0$ منظور از جواب، تابعی چون $y=f(x)$ است بطوری که به ازای $x\in domf$؛ $F(x,f(x))=0$.

تعریف ۱.۲.۲:

گوییم $G:X\rightrightarrows Y$ یک تابع مجموعه‌ای مقدار از X به Y است هرگاه برای هر $x\in X$، $G(x)$ زیر مجموعه ای از Y باشد.

تعریف ۱.۲.۳:

اگر $(\bar{x},\bar{y})\in cl(gph\Phi)$ که در آن $\Phi:X\rightrightarrows Y$ یک تابع مجموعه‌ای مقدار بین فضاهای باناخ X و Y باشد. در این صورت تابع مجموعه‌ای مقدار $D^*\Phi(\bar{x},\bar{y}):Y^*\rightrightarrows X^*$ با ضابطه ذیل را یک هم مشتق نرمال نامیم .

$$D^*\Phi(\bar{x},\bar{y})(y^*):=\{x^*\in X^*\,|(x^*,-y^*)\in N((\bar{x},\bar{y});gph\Phi)\}.$$

۱ـــ۳ بیان سوالهای اصلی تحقیق

اگر X و P فضاهای توپولوژیک و Y فضای برداری توپولوژیک و $F:X\times P\rightrightarrows Y$ تابع مجموعه‌ای مقدار باشد. فرض کنید $(x_o,p_o)\in X\times P$ است به طوری که $o\in F(x_o,p_o)$. نگاشت مجموعه ای مقدار $G:P\rightrightarrows X$ با تعریف $G(p):=\{x\in X|0\in F(x,p)\}$ را یک تابع ضمنی مجموعه مقدار می نامیم.

در این پایان نامه شرایطی از F را فراهم می آوریم به طوری که G در p_0 نیمه پیوسته‌پایینی باشد. و همچنین G در (x_o,p_o) تحت شرایط مشخص شده منظم متریکی و بنابر شرایط دیگری برای F ، G

در (p_o, x_o) شبه لیپ شیتس با شد.

۱—۴ اهداف تحقیق

هدف این تحقیق این است که به‌معرفی مفاهیم و قضایایی از آنالیز تغییراتی ودیفرانسیل های تعمیم یافته می پردازیم و سپس به بررسی شرایطی که G فرض شده بواسطه F مشخص نیمه پیوسته‌پایینی، منظم متریکی و شبه لیپ شیتس باشد.

۱—۵ روش و ابزار گرد آوری اطلاعات

در این تحقیق از روش کتابخانه ای برای گرد آوری اطلاعات استفاده می شود. که به صورت جمع آوری مقالات مورد نظر از مجلات علمی ، مجموعه مقالات کنفرانسهای علمی و جستجو از طریق اینترنت و مطالعه‌ی کتابهای مرجع می باشد.

فصل ۲

پیشینه و ادبیات تحقیق

۲—۱ پیشینه و ادبیات تحقیق

مشتق و انتگرال مفاهیم اساسی در آنالیز می باشند. اصطلاح آنالیز غیر هموار ابتدا توسط فرانسیس کلارک [1] ، در سال ۱۹۷۰ به کار رفت . کلارک در کتاب بهینه سازی و آنالیز غیر هموار در سال ۱۹۸۳ به توضیح این مفهوم پرداخت. سپس ج .پ.آوبین [2] و ر.ت.روکافلر [3] در کتابهای آنالیز توابع مجموعه ای مقدار و آنالیز تغییراتی به گسترش این مفهوم کمک کردند. سر انجام بوریس موردوکویچ [4] در کتاب آنالیز تغییراتی و دیفرانسیل های تعمیم یافته در سال ۲۰۰۶ به تبعین این شاخه از علم ریاضی پرداخت [۳۶,۲۶,۵,۳] .

به طوری که امروزه توابع مجموعه ای مقدار و مشتقات توابع مجموعه ای مقدار در آنالیز تغییراتی و کاربردهای مختلف آن نقش اساسی بازی می کنند.

به منظور تعریف مشتق یک تابع مجموعه ای مقدار، ابتدا یک مخروط مماس از گراف یک نگاشت را در نقطه داده شده تعریف می کنیم . در واقع مشتق ، یک تابع مجموعه ای مقدار همگن است که گراف آن با مخروط مماس مطابقت دارد.با رسیدن به این هدف ،که روش فضای مقدماتی نامیده می شود به منظور خود نزدیک می شویم.

بنا به نوع انتخاب مخروط مماس ممکن است هر یک از مشتقات کلارک یا میانی یا مشتق محتمل الوقع خودمان را داشته باشیم . به کارگیری ایده مخروط نرمال (غیر محدب) می تواند در یک روش فضای دوگان، مورد قبول باشد.

به جای یک مشتق می توانیم نگاشت هم مشتق نرمال بین فضاهای دوگان را به دست آوریم. این ایده توسط بوریس موردوکویچ در [۱۸] مورد مطالعه قرار گرفت .پیشرفت های اخیر ما را به نتایج جالب و قابل توجه ای رهنمون می کند. (برای مثال می توانید مقالات [۲۹ − ۲۵, ۲۷ − ۱۷, ۲۰] وکتابهای [۱۹, ۲۶, ۳۶] را مشاهده کنید.)

---

[1] $Francis Clarke$

[2] $j.p.Aubin$

[3] $R.T.Rockafeller$

[4] $B.S.mordukhovich$

قضایای تابع وارون و تابع ضمنی ابزارهای مؤ ثری در حل بسیاری از مسائل گسترش یافته در آنالیز کاربردی و نظریه بهینه سازی در موارد خاص می باشند.در حالت کلاسیک قضایای تابع ضمنی شرایط کافی برای منتج شدن به یک تابع پیوسته یا مشتق پذیر $x = x(p)$ برای معادله $F(x,p) = o$ در یک همسایگی از نقطه $(x_\circ, p_\circ)$ که $F(x_\circ, p_\circ) = \circ$ ، را فراهم می کنند.
چون مسائل بهینه سازی که شامل توابع مجموعه ای مقدار است در خور توجه ویژه می باشد، لذا این امر طبیعی است که تلاش کنیم تا قضایای توابع ضمنی در حالت کلاسیک را به حالت توابع مجموعه ای مقدار گسترش دهیم.
اگر X و P فضاهای توپولوژیک و Y فضای برداری توپولوژیک و $F : X \rightrightarrows Y$ تابع مجموعه‌ای مقدار و $(x_o, p_o) \in X \times P$ باشد ،به طوری که $.o \in F(x_o, p_o)$. نگاشت مجموعه ای مقدار $G : P \rightrightarrows X$ با تعریف $G(p) := \{x \in X | \circ \in F(x,p)\}$ رایک تابع ضمنی مجموعه مقدار می نامیم.
مسئله، بررسی شرایطی است که G فرض شده بواسطه F مشخص در $p_\circ$ نیمه پیوسته‌پایینی ، شبه لیپ شیتس و... باشد.

در این زمینه توپولوژی های مختلف و متریک پذیری و ویژگی های دیفرانسیل پذیری توابع مجموعه ای مقدار ضمنی (که به عنوان مثال :نیمه پیوسته‌پایینی –منظم متریکی – پیوستگی شبه لیپ شیتس – پیوستگی لیپ شیتس بالایی – B–دیفرانسیل پذیری می باشند)مورد بررسی قرار می دهیم.البته، مجموعه های غیر تهی $G(p)$ برای هر p در یک همسایگی از $p_\circ$ می باشند که این همسایگی دارای یک ویژگی مهم است .
ساختار F و رفتار آن حول نقطه $(x_\circ, p_\circ)$ ویژگی های موضعی را برای G در یک همسایگی از نقطه $(p_\circ, x_\circ)$ در گراف اش اعمال می کند. شروع این کار توسط روبینسون [5] ،[۳۴ – ۳۱] می باشد که مثالهای خوبی از قضایای تابع ضمنی برای نگاشت های مجموعه ای مقدار و کاربردهای آن ارائه کرده است . خواننده می تواننددر زمینه قضایای تابع وارون و قضایای تابع ضمنی برای توابع مجموعه ای مقدار به [۸, ۱۵ – ۱۷, ۲۳ – ۲۵, ۲۷, ۳۰, ۳۵, ۳۹, ۴۰] مراجعه نماید. توضیحات

[5] $Robinson$

فصل ۴ و مراجع موجود در [۲۶] اطلاعات جامع و تازه ای از موضوع فوق ارائه می دهد.

در این تحقیق به وسیله ایده های مطرح شده در بالا از هم مشتق نرمال که به وسیله بوریس موردوکویچ معرفی شده است قضایای جدیدی از تابع ضمنی برای نگاشت های مجموعه ای مقدار بدست می آوریم . یک روش معمول([۳۶ – ۲۳ ,۲۰] را مشاهده کنید) به این صورت هست : با اطلاعاتی درباره G به وسیله تابع دیفرانسیل پذیر F نسبت به هر دو متغیر p,x عمل مشتق گیری را انجام دهیم یعنی هم مشتق $F : X \times P \rightrightarrows Y$ در $(x,p,0)$ یا نقاط (x,p,y) از یک همسایگی $(x,p,0)$ متعلق به گراف F را محاسبه کنیم. در برخی از کاربردهای مرتبط با نظریه بهینه سازی پارامتری و معادله های توسیع یافته پارامتری می توانیم از نگاشت های $p \in P, F(.,p)$ دیفرانسیل بگیریم.

به منظور دست یابی به قضایای تابع ضمنی در این حالت، ما ازروش ارائه شده در [۳۹] استفاده خواهیم کرد که این روش در [۸, ۴۰] و در [۱۵] تحت شرایط منظم بودن و شرایطی دیگر از این نوع به کار گرفته شده است.

نتایج ما به بنیان قضایای تابع ضمنی که توسط [۱۶, ۳۰] بنا نهاده شده است نزدیک است امّا فرضیات و روش اثبات ما بسیار متفاوت تر از روش های استفاده شده در [۱۶, ۳۰] می باشد.