بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

گرایش تحقیق در عملیات

الگوریتم‌های کارا برای مسائل بهینه سازی درجه دوم کسری

از

آرزو زارع

استاد راهنما

دکتر مازیار صلاحی

شهریور ۱۳۹۳

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی ثمری لحظه ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آن چنان که تو دوست می داری.

تو می دانی و همه می دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته ام می درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه هایم احساس می کنم. نمی توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله های ضعیف و افتاده، پنهان کرده ام دریاب، دریاب.

تو می دانی و همه می دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است. تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی همراه، جهاد بی سلاح، کار بی پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی دنیا، مذهب بی عوام، عظمت بی نام، خدمت بی نان، ایمان بی ریا، خوبی بی نمود، گستاخی بی خامی، قناعت بی غرور، عشق بی هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنهاشوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن هاست...

---

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

تشکر و قدردانی

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می دانم به پاس زحمات بی دریغ استاد راهنمای گرامی خود، جناب آقای دکتر مازیار صلاحی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی رسید.

و درود می فرستم بر روح بهترین الگوی زندگی ام، پدر بزرگوارم، که هرچند اکنون درکنارم نیست اما همواره حضور معنویش را حس می کنم و امیدوارم بتوان سپاس گوی زحماتش باشم و بوسه می زنم بر دستان خداوندگار مهر و مهربانی، مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می کنم وجود مقدسش را و تشکر می کنم به پاس عاطفه سرشارش و گرمای امید بخش وجودش، که همواره بهترین پشتیبان من بوده است.

آرزو زارع

۱۳۹۳

فهرست مطالب

فهرست جدول ها

عنوان صفحه

فهرست تصویرها

عنوان صفحه

۰-۱ چکیده

الگوریتم‌های کارا برای مسائل بهینه‌سازی درجه دوم کسری

آرزو زارع

در این پایان‌نامه، به مطالعه مسائل بهینه‌سازی درجه دوم کسری با یک و دو قید درجه دوم در فضای اعداد حقیقی و مختلط که در زمینه‌های مختلف همچون امورمالی، مکان‌یابی، ارتباطات، پردازش سیگنال و ...کاربرد دارند می‌پردازیم. ابتدا این مسائل را به مسائل برنامه‌ریزی پارامتری تبدیل کرده و با بکارگیری بهینه‌سازی نیمه معین آزادسازی شده آن‌ها را حل می‌کنیم. در پایان نیز با انجام آزمایش‌های عددی کارایی الگوریتم‌ها را بررسی می‌کنیم.

کلید واژه:

برنامه‌ریزی کسری، برنامه‌ریزی نامحدب، برنامه‌ریزی محدب، روش‌های نقطه درونی، برنامه‌ریزی مخروطی.

۰-۳ پیش گفتار

در برنامه‌ریزی غیرخطی، مسائل متعددی وجود دارد که در آن‌ها هدف یافتن ماکسیمم و یا مینیمم نسبت دو تابع است که عموماً این مسائل، مسائل برنامه‌ریزی کسری نامیده می‌شوند. از جمله این مسائل، می‌توان به شرایط مالی در شرکت‌های بزرگ(نسبت بدهی / حقوق صاحبان سهام)، برنامه‌ریزی تولید(نسبت موجودی / فروش، خروجی/ کارمند)، مراقبت‌های بهداشتی، برنامه‌ریزی بیمارستانی (نسبت هزینه / بیمار، پرستار / بیمار) و ...اشاره نمود.

لازم به ذکر است، شروع کار این دسته از مسائل بهینه‌سازی، با محدودیت‌های خطی و تابع هدف به صورت نسبت دو تابع خطی بوده است. توسعه این مسائل در علم مدیریت، تحقیق در عملیات، اقتصاد و ...باعث به وجود آمدن برنامه‌ریزی غیرخطی، برنامه‌ریزی درجه دوم، برنامه‌ریزی اعداد صحیح، برنامه‌ریزی چند هدفه، برنامه‌ریزی پیچیده، برنامه‌ریزی عدم قطعیت و ... [۲] شده است. در واقع تمام موارد ذکر شده انعکاسی از برنامه‌ریزی‌های مختلف ریاضی‌اند، که بنا به علل مختلف در طول زمان وارد مبحث برنامه‌ریزی کسری شده‌اند.

نخستین بار نیومن [۳] [۱۹] در سال ۱۹۳۷ یکی از مسائل برنامه‌ریزی کسری را به عنوان مدل تعادل اقتصادی برای توسعه تولیدات اقتصادی مطرح کرد. چانز و کوپر [۴] [۸] در سال ۱۹۶۲ مقاله‌ای کلاسیک در زمینه‌ی مسأله برنامه‌ریزی خطی کسری منتشر کردند. آن‌ها در مقاله خود با در نظر گرفتن یک تغییر متغیر غیرخطی، مسأله برنامه‌ریزی کسری را به مسأله برنامه‌ریزی خطی تبدیل نمودند. دینکل‌باخ [۵] [۹] در سال ۱۹۶۷ رابطه‌ای جالب بین برنامه‌ریزی کسری و برنامه‌ریزی پارامتری را بیان کرد. همچنین در طی سال‌های ۱۹۶۹ تا ۱۹۷۹ آثار برجسته‌ای توسط منگساریان [۶] کولاتز و وترلینگ [۷] کول‌استین [۸] شتی و بازارا [۹] و ...منتشر شد.

بک، بن‌تال و تبوله [۱۰] [۳] در سال ۲۰۰۶ با استفاده از مسأله کمترین مربعات کامل نمونه‌ای از مسأله بهینه‌سازی درجه دوم کسری را معرفی و حل کردند. بنسون [۱۱] [۵] در سال ۲۰۰۶ ماکسیمم نسبت دو تابع محدب که حداقل یکی از آن‌ها درجه دوم باشد را مورد بررسی قرار داد. وی جواب بهینه‌ی سراسری را برای مسأله تحت فرضی ضعیف بدست آورد و همچنین برای حل مسأله از الگوریتم شاخه و کران استفاده کرد.

بک و تبوله [۱۲] [۴] مسأله برنامه‌ریزی درجه دوم کسری با محدودیت درجه دوم را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها با استفاده از روش همگن‌سازی، مسأله مورد نظر را به شکل غیرکسری تبدیل، سپس برای حل آن از آزادسازی

[2] quadratic programming, nonlinear programming, integer programming, multi-objective programming, complex programming, inexact programming with set inclusive-constraints, etc

[3] Neumann, J.V

[4] Charnes, A. and Cooper, W.

[5] Dinkelbach, W.

[6] Mangosarian

[7] Collatz and Wetterling

[8] Col'stein

[9] Shetty and Bazara

[10] Beck, A., Ben−Tal, A. and Teboulle, M.

[11] Benson, P. H.

[12] Beck, A. and Teboulle, M.

نیمه معین استفاده کردند. سرانجام در سال ۲۰۱۱ زانگ و هایاشی [13] [۲۸] مسأله مینیمم‌سازی درجه دوم کسری با دو قید درجه دوم را بررسی کردند. آن‌ها با استفاده از رابطه‌ی بین برنامه‌ریزی کسری و برنامه‌ریزی پارامتری مسأله کسری را به یک مسأله مینیمم‌سازی درجه دوم نامحدب با قیدهای مسأله کسری اولیه تبدیل و آن را به عنوان یک زیرمسأله معرفی نمودند. سپس در هر تکرار از الگوریتم‌های دوبخشی و نیوتن تعمیم یافته این زیرمسأله را حل کردند.

در این پایان‌نامه به مطالعه مسائل برنامه‌ریزی درجه دوم کسری با یک و دو قید درجه دوم در حالت حقیقی و مختلط می‌پردازیم. برای این منظور در فصل اول به بیان تعاریف و قضایای مقدماتی پرداخته و به طور خلاصه مقدمه‌ای از بهینه‌سازی نیمه معین را شرح می‌دهیم. در فصل دوم چگونگی حل یک مسأله بهینه‌سازی درجه دوم با یک قید درجه دوم را با استفاده از بهینه‌سازی نیمه معین بیان می‌کنیم و از این مسأله در فصل بعدی به عنوان زیرمسأله نام می‌بریم.

در فصل سوم مسأله بهینه‌سازی درجه دوم کسری با یک قید درجه دوم را در نظر می‌گیریم. سپس شکل پارامتری آن را بیان و به معرفی دو الگوریتم دوبخشی و نیوتن تعمیم یافته برای حل آن می پردازیم. در پایان نیز چند مثال را همراه با نتایج عددی حاصل از اجرای الگوریتم‌های دوبخشی و نیوتن تعمیم یافته ارائه می‌کنیم. سپس در فصل چهارم به بررسی مسأله بهینه‌سازی درجه دوم کسری با دو قید درجه دوم در پردازش سیگنال می‌پردازیم. نحوه‌ی حل آن را با استفاده از بهینه‌سازی نیمه معین شرح داده و نتایج حاصل از الگوریتم نیوتن تعمیم یافته را برای آن ذکر می‌کنیم. این فصل را با ارائه چند مثال که توسط الگوریتم نیوتن تعمیم یافته حل شده‌اند به پایان می‌رسانیم.

[13] Zhang, A. and Hayashi, Sh.

فصل ۱

تعاریف و مقدمات اولیه

در این فصل برخی از مفاهیم و قضایای مقدماتی از جبرخطی و بهینه‌سازی نیمه معین که در فصل‌های بعدی بکارگرفته می‌شود گردآوری شده است.

۱-۱ مقدماتی از جبرخطی

تعریف ۱-۱-۱. اثر ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ عبارت است از مجموع عناصر قطری ماتریس، یعنی

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

تعریف ۱-۱-۲. اگر ماتریس‌های $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ مفروض باشند، در این صورت

$$Tr(AB) = Tr(BA).$$

تعریف ۱-۱-۳. ضرب داخلی فربنیوس دو ماتریس به صورت زیر تعریف می‌شود:

(۱) اگر $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ باشند

$$\mathbf{X} \bullet \mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}Y_{ij} = Tr(X^TY).$$

(۲) اگر $X, Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$ (فضای ماتریس‌های مختلط) باشند

$$\mathbf{X} \bullet \mathbf{Y} = Re(Tr(X^HY)) = Tr[(ReX)^T(ReY) + (ImX)^T(ImY)],$$

که H ترانهاده مزدوج عناصر در فضای مختلط است.

با این ضرب داخلی، مجموعه ماتریس‌های $n \times n$ یک فضای حاصل‌ضرب داخلی است.

تعریف ۱-۱-۴. ماتریس $A \in \mathbb{S}^n$ (مجموعه ماتریس‌های متقارن) را یک ماتریس نیمه معین مثبت گوییم هرگاه

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0,\ x^TAx \geq 0,$$

و آن را با $A \succeq 0$ نشان می‌دهیم. اگر نامساوی ذکر شده به صورت اکید باشد، ماتریس را معین مثبت می‌گوییم و با $A \succ 0$ نشان می‌دهیم.

نمادگذاری ۱-۱-۵. (۱) $\mathbb{S}^n_+$ مجموعه ماتریس‌های متقارن نیمه معین مثبت است.

(۲) $\mathbb{S}^n_{++}$ مجموعه ماتریس‌های متقارن معین مثبت است.

قضیه ۱-۱-۶. (مکمل شور [1]) ماتریس $X = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}$ که در آن $A \in \mathbb{R}^{k\times k}$ و $C \in \mathbb{R}^{t\times t}$ ماتریس‌هایی متقارن و ماتریس A ماتریسی معین مثبت است را در نظر بگیرید. در این صورت X ماتریسی معین مثبت(نیمه معین مثبت) است اگر و فقط اگر $C - B^TA^{-۱}B$ معین مثبت(نیمه معین مثبت) باشد. ماتریس $C - B^TA^{-۱}B$ مکمل شور A در X نامیده می‌شود.

برهان. به [۲۳] مراجعه شود. □

تعریف ۱-۱-۷. ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ را هرمیتی گویند، هرگاه ترانهاده مزدوج مختلط آن با خودش برابر باشد، یعنی

$$a_{ij} = a^*_{ji} \text{ یا } a_{ij} = \bar{a}_{ji} \text{ یا } A = \bar{A}^T,$$

که $\bar{A}^T$ با A^* نیز نشان داده می‌شود.

نمادگذاری ۱-۱-۸. (۱) $\mathbb{H}^n$ مجموعه ماتریس‌های هرمیتی است.

(۲) $\mathbb{H}^n_+$ مجموعه ماتریس‌های هرمیتی نیمه معین مثبت است.

مثال ۱-۱-۹. ماتریس زیر یک ماتریس هرمیتی است:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ۲ & ۲+i & ۴ \\ ۲-i & ۳ & i \\ ۴ & -i & ۱ \end{pmatrix}.$$

نکته ۱-۱-۱۰. چند ویژگی مهم از ماتریس‌های هرمیتی عبارت است از:

(۱) ماتریس A هرمیت است اگر عناصر روی قطر اصلی آن همگی متعلق به مجموعه اعدادحقیقی و سایر عناصر به تقارن، ترانهاده مزدوج یکدیگر باشند.

(۲) اگر ماتریس $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$، آن‌گاه $A = (C + C^T)$ هرمیتی است.

(۳) اگر ماتریس $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$، آن‌گاه $A = (CC^T)$ هرمیتی نیمه معین مثبت است.

تعریف ۱-۱-۱۱. مجموعه S در $\mathbb{R}^n$ را محدب گویند، هرگاه برای هر $x_۱$ و $x_۲$ در S و هر عدد حقیقی $۰ < \lambda < ۱$ داشته باشیم

$$\lambda x_۱ + (۱ - \lambda)x_۲ \in S.$$

[1] Schur complement

تعریف ۱-۱-۱۲. اگر S مجموعه‌ای محدب در $\mathbb{R}^n$ و $f : S \to \mathbb{R}$ مفروض باشد f را روی مجموعه S محدب گویند، هرگاه برای هر $x_۱, x_۲ \in S$ و هر $۰ < \lambda < ۱$ داشته باشیم

$$f(\lambda x_۱ + (۱-\lambda)x_۲) \leq \lambda f(x_۱) + (۱-\lambda) f(x_۲).$$

اگر نامساوی فوق اکید باشد، تابع f را محدب اکید گویند.

تعریف ۱-۱-۱۳. تابع f در فضای $\mathbb{R}^n$ در شرط لیپ شیتس صدق می‌کند اگر ثابت k ای وجود داشته باشد که به ازای $x, y \in \mathbb{R}^n$، $| f(x) - f(y) | \leq k \mid x - y \mid$.

تعریف ۱-۱-۱۴. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای محدب در $\mathbb{R}^n$ باشد، همچنین فرض کنید g تابعی از S به $\mathbb{R}$ و محدب باشد. در این صورت f را یک زیر گرادیان از g در x گویند هرگاه به ازای هر y

$$g(y) - g(x) \geq f^T(x).$$

۱-۲ بهینه‌سازی نیمه معین [۲]

مسأله بهینه‌سازی نیمه معین، گسترشی از مسأله بهینه‌سازی خطی است که مسائل متعددی در زمینه‌های مختلف همچون پردازش سیگنال، ریاضی مالی و غیره را می‌توان به این صورت مدل کرد. این دسته از مسائل و استفاده از آن‌ها به طور جدی در دهه‌ی ۹۰ شروع شد به طوری که در دو دهه‌ی گذشته محققان بسیاری در زمینه‌های علوم و مهندسی این مسأله را مطالعه و الگوریتم‌های متعددی برای حل آن ارائه کردند. از جمله این الگوریتم‌ها، الگوریتم نقطه درونی است که نرم افزارهای کارای متعددی برای حل آن ارائه شده است که می‌توان به cvx و $SeDuMi$ [۱۱, ۲۲] اشاره کرد. در ادامه شرح مختصری از مسأله بهینه‌سازی نیمه معین را ارائه می‌دهیم.

شکل استاندارد مسأله اولیه و مسأله دوگان آن به صورت زیر است:

مسأله اولیه	مسأله دوگان
$$\begin{array}{lll} \underset{\mathbf{x}}{\textbf{minimize}} & \mathbf{C \bullet X} & \\ \textbf{subject to} & \mathbf{A_i \bullet X = b_i}, & \forall \mathbf{i} = ۱, ۲, \ldots, \mathbf{m}, \\ & \mathbf{X \succeq ۰_{n\times n}}, & \end{array}$$	$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^{\mathbf{m}}}{\textbf{maximize}} & \mathbf{b^T y} \\ \textbf{subject to} & \sum_{\mathbf{i}=۱}^{\mathbf{m}} \mathbf{y_i A_i} \preceq C, \end{array}$$

که $A_i \in \mathbb{S}^n$، $b_i \in \mathbb{R}^m$، $C \in \mathbb{S}^n$ و $A \bullet B = tr(AB^T)$ است.

مثال ۱-۲-۱. مسأله اولیه بهینه‌سازی نیمه معین به ازای $m = ۲$ و $n = ۳$ برای

[۲] Semidefinite optimization (SDO)

$$\mathbf{A}_۱ = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۳ & ۷ \\ ۱ & ۷ & ۵ \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}_۲ = \begin{pmatrix} ۰ & ۲ & ۸ \\ ۲ & ۶ & ۰ \\ ۸ & ۰ & ۴ \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} ۱۱ \\ ۱۹ \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۹ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۷ \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{۱۱} & x_{۱۲} & x_{۱۳} \\ x_{۲۱} & x_{۲۲} & x_{۲۳} \\ x_{۳۱} & x_{۳۲} & x_{۳۳} \end{pmatrix},$$

به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &\textbf{minimize} && x_{۱۱} + ۴x_{۱۲} + ۶x_{۱۳} + ۹x_{۲۲} + ۰x_{۲۳} + ۷x_{۳۳} \\ &\textbf{subject to} && x_{۱۱} + ۰x_{۱۲} + ۲x_{۱۳} + ۳x_{۲۲} + ۱۴x_{۲۳} + ۵x_{۳۳} = ۱۱, \\ & && ۰x_{۱۱} + ۴x_{۱۲} + ۱۶x_{۱۳} + ۶x_{۲۲} + ۰x_{۲۳} + ۴x_{۳۳} = ۱۹, \\ & && \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{۱۱} & x_{۱۲} & x_{۱۳} \\ x_{۲۱} & x_{۲۲} & x_{۲۳} \\ x_{۳۱} & x_{۳۲} & x_{۳۳} \end{pmatrix} \succeq ۰, \end{aligned}$$

مسأله دوگان آن نیز به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &\textbf{maximize} && ۱۱y_۱ + ۱۹y_۳ \\ &\textbf{subject to} && y_۱ \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۳ & ۷ \\ ۱ & ۷ & ۵ \end{pmatrix} + y_۲ \begin{pmatrix} ۰ & ۲ & ۸ \\ ۲ & ۶ & ۰ \\ ۸ & ۰ & ۴ \end{pmatrix} + S = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۹ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۷ \end{pmatrix}, \\ & && \mathbf{S} \succeq ۰, \end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned} &\textbf{maximize} && ۱۱y_۱ + ۱۹y_۳ \\ &\textbf{subject to} && \begin{pmatrix} ۱ - ۱y_۱ - ۰y_۲ & ۲ - ۰y_۱ - ۲y_۲ & ۳ - ۱y_۱ - ۸y_۲ \\ ۳ - ۰y_۱ - ۲y_۲ & ۹ - ۳y_۱ - ۶y_۲ & ۰ - ۷y_۱ - ۰y_۲ \\ ۳ - ۱y_۱ - ۸y_۲ & ۰ - ۷y_۱ - ۰y_۲ & ۷ - ۵y_۱ - ۴y_۲ \end{pmatrix} \succeq ۰. \end{aligned}$$

قضیه ۱-۲-۲. (ضعیف دوگانی) اگر X در مسأله اولیه و (y,S) در مسأله دوگانی شدنی باشند، آن‌گاه

$$\mathbf{C}\bullet\mathbf{X}-b^Ty=\mathbf{X}\bullet\mathbf{S}\geq ۰.$$

برهان. داریم

$$\begin{aligned}\mathbf{C}\bullet\mathbf{X}-b^Ty&=(\sum_{i=۱}^{m}y_iA_i+S)\bullet X-b^Ty\\&=\sum_{i=۱}^{m}(A_i\bullet X)y_i+S\bullet X-b^Ty\\&=b^Ty+S\bullet X-b^Ty\\&=X\bullet S.\end{aligned}$$

حال چون X و S ماتریس‌هایی نیمه معین مثبت‌اند، و $tr(AB)=tr(BA)$ داریم

$$X\bullet S=tr(XS)=tr(X^{\frac{۱}{۲}}X^{\frac{۱}{۲}}S)=tr(X^{\frac{۱}{۲}}SX^{\frac{۱}{۲}})\geq ۰,$$

که نامساوی آخر به دلیل نیمه معین مثبت بودن ماتریس $(X^{\frac{۱}{۲}}SX^{\frac{۱}{۲}})$ برقرار است. □

تعریف ۱-۲-۳. اختلاف بین جواب بهینه مسأله اولیه و جواب بهینه مسأله دوگان را فاصله دوگانی می‌نامند.

برقراری قضیه قوی دوگانی برای مسائل بهینه‌سازی نیمه معین برخلاف مسائل برنامه‌ریزی خطی نیازمند شرایط قوی‌تری است که در ادامه بیان می‌شود. لذا ابتدا مجموعه‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}&F(P):=\{X\in\mathbb{S}^n\ \mid\ A_i\bullet X=b_i,\ i=۱,...,m,\ X\succeq ۰\},\\&F^{'}(P):=\{X\in F(P)\ \mid\ X\succ ۰\},\\&F(D):=\{(y,S)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{S}^n\ \mid\ \sum_{i=۱}^{m}y_iA_i+S=C,\ S\succeq ۰\},\\&F^{'}(D):=\{(y,S)\in F(D)\ \mid\ S\succ ۰\}.\end{aligned}$$

قضیه ۱-۲-۴. (قضیه قوی دوگانی) فرض کنید که $F(P)$ و $F^{'}(D)$ ناتهی باشند، بنابراین مسأله اولیه (P) یک مجموعه فشرده و ناتهی از جواب‌های بهینه دارد و مقادیر بهینه مسأله اولیه و دوگان برابرند.

برهان. به [۲۳] مراجعه شود. □

نتیجه ۱-۲-۵. فرض کنید که $F^{'}(P)$ و $F(D)$ ناتهی باشند، بنابراین مسأله دوگان (D) یک مجموعه فشرده و ناتهی از جواب‌های بهینه دارد که اختلاف دوگانی آن‌ها صفر است.

برهان. به [۲۳] مراجعه شود. □

نتیجه ۱-۲-۶. فرض کنید که $F^{'}(P)$ و $F^{'}(D)$ ناتهی باشند، بنابراین هر دو مسأله اولیه (P) و دوگان (D) مجموعه‌ای فشرده و ناتهی از جواب‌های بهینه دارند که اختلاف دوگانی آن‌ها صفر است.

برهان. به [۲۳] مراجعه شود. □

فصل ۲

مسأله بهینه سازی درجه دوم با یک قید درجه دوم

۲-۱ مقدمه

مسأله بهینه‌سازی درجه دوم با یک قید درجه دوم به شکل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} &\textbf{minimize} && \mathbf{x^T A_۱ x - ۲b_۱^T x + c_۱} \\ &\textbf{subject to} && \mathbf{x^T A_۲ x - ۲b_۲^T x + c_۲ \leq ۰,} \end{aligned} \tag{۱-۲}$$

که در آن $A_۱, A_۲ \in \mathbb{S}^n$، $b_۱, b_۲ \in \mathbb{R}^n$ و $c_۱, c_۲ \in \mathbb{R}$. مسأله (۲−۱) به عنوان زیرمسأله در حل بسیاری از مسائل ظاهر می‌شود. زیرمسأله ناحیه اعتماد، دسته خاصی از این دسته از مسائل است که در حل مسائل بهینه‌سازی غیرخطی بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنین در مسأله (۲−۱) لزوماً ماتریس $A_۱$ و $A_۲$ نیمه معین مثبت نیستند، لذا در این حالت این دسته از مسائل نامحدب‌اند [۲۷].

در ادامه برای این که جوابی برای مسأله‌ی (۲−۱) بیابیم، ابتدا فرم همگن‌سازی شده مسأله را نوشته، سپس با استفاده از آزادسازی نیمه معین، مسأله همگن‌سازی شده را به صورت یک مسأله بهینه‌سازی نیمه معین باز نویسی می‌کنیم. سرانجام از جواب مسأله مورد نظر به جوابی برای مسأله (۲−۱) دست می‌یابیم.

۲-۲ شکل آزادسازی نیمه معین مسأله و یافتن جواب

ابتدا نسخه‌ی همگن‌سازی شده‌ی مسأله (۲−۱) را با صرف نظر از مقدار ثابت $c_۱$ به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} &\underset{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\ \mathbf{t}\in\mathbb{R}}{\textbf{minimize}} && x^T A_۱ x - ۲tb_۱^T x \\ &\textbf{subject to} && x^T A_۲ x - ۲tb_۲^T x + t^۲ c_۲ \leq ۰, \\ &&& t^۲ = ۱. \end{aligned} \tag{۲-۲}$$

واضح است که اگر (x,t) جواب مسأله فوق باشد $\frac{x}{t}$ جوابی برای مسأله (۲−۱) است.

لذا مسأله (۲−۲) به صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned} &\textbf{minimize} && \mathbf{M_۰ \bullet \hat{X}} \\ &\textbf{subject to} && \mathbf{M_۱ \bullet \hat{X} \leq ۰,} \\ &&& \mathbf{M_۲ \bullet \hat{X} = ۱,} \end{aligned} \tag{۳-۲}$$