بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی

دانشکده علوم پایه

گروه علمی ریاضی

عنوان پایان‌نامه:

روش عناصر مرزی

با گالرکین متقارن و کار برد آن در حل معادلات دیفرانسیل جزیی

استاد راهنما:

دکتر علی ذاکری

استاد مشاور:

دکتر فهیمه سلطانیان

نگارش:

جبرائیل ملک‌زاده

دی‌ماه ۱۳۸۹

صورت جلسه دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

جلسه دفاع ازپایان نامه دوره کارشناسی ارشد آقای جبرائیل ملک زاده

دانشجوی رشته ریاضی به شماره دانشجویی ۸۷۰۰۰۶۸۴۵

تحت عنوان:

"روش عناصر مرزی با گالرکین متقارن و کاربرد آن در حل معادلات دیفرانسیل جزئی"

جلسه دفاع با حضور داوران نامبرده ذیل در روز سه شنبه مورخ: ۸۹/۱۰/۰۷ ساعت ۱۱-۱۰در محل مجتمع علوم پایه و کشاورزی برگزار شد و پس از بررسی پایان نامه مذکور بانمره (بعدد) ۱۸٫۲۵ (بحروف)هیجده و بیست و پنج صدم... وبا درجه ...عالی......... مورد قبول واقع شد/نشد.

ردیف	هیات داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	دانشگاه/موسسه	امضاء
۱	استاد راهنما	دکتر علی ذاکری	استادیار	صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی	
۲	استاد مشاور	دکتر فهیمه سلطانیان	استادیار	پیام نور	
۳	استاد داور	دکتر سید مقتدی هاشمی پرست			
۴	نماینده گروه	دکتر خدیجه احمدی آملی	استادیار	پیام نور مرکز تهران	

اینجانب دانشجوی ورودی سال مقطع کارشناسی ارشـد رشته گواهی می نمایم چنانچه در پایان نامه خود از فکر، ایده و نوشته دیگری بهره گرفته ام با نقل قول مستقیم یا غیر مستقیم منبع و ماخـذ آن را نیـز در جای مناسب ذکر کرده ام. بدیهی است مسئولیت تمـامی مطـالبی کـه نقـل قـول دیگران نباشد بر عهده خویش می دانم و جوابگوی آن خواهم بود.

دانشجو تأیید می نماید که مطالب مندرج دراین پـایان نامه (رساله) نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

نام و نام خانوادگی دانشجو

تاریخ و امضاء

اینجانب دانشجوی ورودی سال مقطع کارشناسی ارشـد رشته گواهی می نمایم چنانچه براساس مطالب پایان نامه خود اقدام به انتشار مقاله، کتاب، و ... نمایم ضمن مطلع نمودن استاد راهنما، با نظر ایشان نسـبت بـه نشـر مقالـه، کتاب، و ... و به صورت مشترک و با ذکر نام استاد راهنما مبادرت نمایم.

ام و نام خانوادگی دانشجو

تاریخ و امضاء

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات ، آزمایشات و نو آوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه پیام نور می باشد .

ماه و سال

تقدیم به

پدر بزرگوار و مادر مهربانم

که همواره یار و یاورم بوده اند

تقدیر و تشکر

اکنون که بخش دیگری از دوران تحصیلات به پایان رسیده است، ضمن سپاس بی پایان از قادر بی‌همتا و سجده شکر بر عنایت او در این راه مقدس بر خود واجب می‌دانم مراتب قدردانی خود را هر چند ناچیز و زبانی از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر علی ذاکری به پاس زحمات بی دریغ و صبر و بردباری بی شائبه ایشان در راهنمایی این تحقیق ابراز نمایم. همچنین از سرکار خانم دکتر فهیمه سلطانیان که مشاور این تحقیق بوده اند تشکر می نمایم. در آخر از حضور جناب آقای دکتر سید مقتدی هاشمی پرست که پایان نامه اینجانب را مطالعه و جلسه دفاعیه را به حضور خود مزین نمودند کمال تشکر دارم.

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا روش‌های تجزیه دامنه از قبیل روش تفاضلات‌متناهی و اجزای محدود معرفی می‌شوند. سپس روش عناصر(اجزای)مرزی با استفاده ازگالرکین متقارن مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. در ادامه دو کاربرد این روش در حل مسایل پواسون و مسایل الاستیسیته در فضای یک و دوبعدی ارایه می‌گردد، و در آخر چند نمونه مثال عددی به همراه برنامه رایانه‌ای آنها و نتایج حاصل آمده است.

کلمات کلیدی:روش اجزای مرزی، تابع گرین،گالرکین‌متقارن، تابع وزن، مسایل پواسن

پیش گفتار

روش‌های عددی در مکانیک محیط‌های پیوسته عبارتند از روش تفاضلات متناهی روش اجرای محدود و روش اجزای مرزی، در این میان روش تفاضلات متناهی اولین روش شناخته شده در این حوزه است. در این روش معمولاً از بسط تیلور برای گسسته‌سازی معادلات حاکم استفاده شده، و برای یک دامنه محاسباتی دوبعدی، شبکه‌ای از سلول‌های داخلی دامنه محاسباتی استفاده شده، و تقریب تفاضلی برای نقاط داخلی اعمال می‌شود. اجزای محدود روش دیگری است که در آن دامنه مورد بررسی به اجزای کوچک‌تر افراز و با اعمال شرایط تعادل و همسان‌سازی بین آنها یک دستگاه معادلات کلی تشکیل می‌گردد. سرانجام با حل این دستگاه به تحلیل کامل سیستم می‌انجامد. روش تفاضلات متناهی قادر به مدل کردن انواع محیط‌های فیزیکی با تغییرات بالا نبوده و روش اجزای محدود نیز به دلیل حجم بالای اطلاعات و داده‌های اولیه و عدم توانایی در مدل کردن محیط‌های نامحدود بعضاً ناکارامد می‌باشد. اما روش مورد بررسی در این پایان نامه، یعنی روش اجزای مرزی معادلات دیفرانسیل را به اتحادهای انتگرالی روی مرز تبدیل نموده و تقسیم-بندی مرز به اجزای کوچک‌تر همانند سایر روش‌های عددی به یک دستگاه معادلات جبری خطی که دارای جواب یکتا است منجر می‌گردد. مهم‌ترین ویژگی این روش زمان کمتر برای آماده سازی اطلاعات و ذخیره‌سازی رایانه‌ای به دلیل کاهش بعد دامنه محاسباتی و دقت بالای محاسبات به دلیل عدم وجود هر گونه تقریب اضافی در دامنه محاسباتی است.

در فصل اول پایان‌نامه حاضر ابتدا مفاهیم، تعاریف و قضایای مقدماتی مورد نیاز در این تحقیق ارائه می‌گردد. سپس روش عناصر(اجزای) مرزی با گالرکین متقارن در فضای یک و دوبعدی برای حل مسایل پواسون با استفاده از توابع پایه‌ای تکه‌ای ثابت، در فصل دوم مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در فصل سوم کاربرد این روش در الاستیسیته بیان، و فصل آخر به ارائه مثال‌های عددی همراه با برنامه رایانه‌ای در این خصوص اختصاص می‌یابد.

امید است مطالعه این پایان‌نامه رضایت خاطر خوانندگان محترم را تأمین نماید.

فهرست مطالب

۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

یکی از روش‌های عددی موثر و با دقت بالا در حل مسایل مربوط به معادلات دیفرانسیل جزیی روش اجزای مرزی (BEM)[۱] است که کاربرد فراوانی در حل مسایل فنی مهندسی دارد. با عنایت به حضور روش‌های عددی پیشرفته در شاخه‌های مختلف مهندسی، مانع اصلی در توسعه سریع روش اجزای مرزی شهرت این روش به داشتن ریاضیات پیچیده و غیر معمول در بین مهندسان است. لذا در این فصل سعی بر آن است که تعاریف و مفاهیم اصلی مورد نیاز در فصل‌های بعدی با حوصله بیشتری بیان گردد.

۱-۱ روش باقیمانده وزن‌دار

فرض کنید $L(u) = ۰$ نمایش اپراتوری یک معادله دیفرانسیل معمولی یا یک معادله دیفرانسیل جزیی باشد با جایگذاری تابع آزمون u_n به عنوان جواب تقریبی در معادله دیفرانسیل مقدار باقیمانده یا خطا به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$R = L(u_n)$$

[۱] Boundary Element Method

از طرفی شرایط مرزی معادله فوق نیز دارای باقیمانده خواهد بود. روش باقیمانده وزن‌دار از جمله تکنیک‌های موثری است که سعی در تقلیل اندازه خطا به حداقل مقدار ممکن دارد. این روش عبارت است از انتگرال در سراسر دامنه Ω تابعی که از حاصل‌ضرب R و تابع وزن مثبت W_i تعریف شده است، به طوری که در سراسر ناحیه Ω به صفر میل کند، یعنی

$$\int_{\Omega} R w_i d\Omega = ۰$$

در انتگرال فوق Ω ناحیه تعریف شده برای اپراتور دیفرانسیلی $L(u) = ۰$ است.

دراین روش جواب تقریبی درفضای یک‌بعدی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$u_n = \sum_{i=۰}^{n} \alpha_i \beta_i$$

که درآن β_i ها توابع پایه‌ای و α_i ها ضرایب ثابتی هستند که باید محاسبه شوند. همچنین u_n تقریب u با استفاده از مجموع فوق است.به عنوان مثال با انتخاب $B_i(x) = x^i(۱-x)$ داریم:

مثال:

$$u_n = x(۱-x)(\alpha_۱ + \alpha_۲ x + \cdots + \alpha_N x^{N-۱}) =$$
$$x(۱-x)\alpha_۱ + x^۲(۱-x)\alpha_۲ + \cdots + x^N(۱-x)\alpha_N$$

درفضای دوبعدی جواب تقریبی را به صورت

$$u_n = \sum_{i,j}^{n} \alpha_{i,j} x^i Y^j (۱-x)(۱-y)$$

می‌توان در نظر گرفت.

مسایل مورد بحث در این پایان نامه که با فرض جواب تقریبی u_n به طور کلی یکی از سه روش زیرمی‌باشد:

- در صورتی که جواب تقریبی پیشنهادی برای مسئله عیناً تمام شرایط مرزی مسئله را بدون توجه به فضای تعریفی Ω اقناع کند، آنگاه حل یک روش صرفاً دامنه‌ای است[۱].

[۱] Domain method

- اگر جواب مورد نظر معادله دیفرانسیل را دردامنه حاکم برآن Ω بدون شرایط مرزی ارضاء کند در این صورت حل یک روش مرزی است[1].
- اگر جواب پیشنهادی معادله دیفرانسیل را نه در دامنه مورد بررسی و نه در روی مرزآن اقناع کند حل یک روش آمیخته می‌باشد[2].

به دلیل اهمیت انتخاب تابع وزن در روش باقیمانده وزن‌دار به معرفی و توضیح چهار روش مختلف در انتخاب تابع وزن به شرح زیر می‌پردازیم:

۱-۱-۱ روش هم‌محلی زیردامنه‌ای یا زیرفضا[3]

دراین روش تابع وزن برای هرقسمت برابر واحد، $W_i(x) = ۱$ درنظر گرفته می‌شود، یعنی:

$$W_i(x) = \begin{cases} ۱ & x \text{ داخل و روی ناحیه } \Omega \\ ۰ & x \text{ خارج ناحیه } \Omega \end{cases}$$

درنتیجه انتگرال حاصل‌ضرب باقیمانده درتابع وزن برای کل ناحیه موردنظر باید صفر گردد. تعداد ناحیه‌هایی که انتگرال برروی آنها محاسبه می‌شود، برابر تعداد ضرایب نامعلوم درجواب تقریبی u_n است درنتیجه:

$$\int_{\Omega} R(x)W_i(x)dx = ۰ \quad , \quad i = ۱,۲,\ldots,n$$

مثال(۱): معادله دیفرانسیل $\frac{du^۲}{dx^۲} + ۲ = ۰$ باشرایط کرانه ای $u(۰) = ۰$ و $u(۱) = ۰$ زیر در نظر بگیرید.

جواب تحلیلی این معادله $u(x) = x - x^۲$ می‌باشد.جواب تقریبی $u_۲ = \alpha_۱\beta_۱ + \alpha_۲\beta_۲$ را در نظر می‌گیریم که در آن $\beta_۲ = x^۳ - x^۲$ و $\beta_۱ = x - ۲x^۲ + x^۳$ توابع پایه‌ای می‌باشند. در این صورت برای جمله باقیمانده خواهیم داشت:

---

[1] Boundary method
[2] Mixed method
[3] Subdomain collocation- method

$$R(x,\alpha_1,\alpha_2)=\frac{du^2}{dx^2}+2=\alpha_1(6x-4)+\alpha_2(6x-2)+2$$

به تعداد ضرایب مجهول یعنی α_1 و α_2 ناحیه را به دو قسمت مساوی ۰ تا $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ تا ۱ افراز می‌کنیم

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{R}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}(\alpha_1(6x-4)+\alpha_2(6x-2)+2)\mathrm{R}dx=0$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{R}dx=\int_0^{1}(\alpha_1(6x-4)+\alpha_2(6x-2)+2)\mathrm{R}dx=0$$

در نتیجه:

$$\begin{cases}-5\alpha_1+\alpha_2+4=0\\ \alpha_1-5\alpha_2+4=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\alpha_1=1\\ \alpha_2=-1\end{cases}$$

که دقیقاً با جواب تحلیلی $u(x)=x-x^2$ برابر است.

۱-۱-۲روش هم‌مکانی نقطه‌ای[1]

دراین روش تابع ضربه به صورت $W_i(x)=\delta(x-x_i)$ به عنوان تـابع وزن انتخـاب مـی‌شـود.(در بخش ۱-۲ تابع ضربه و خواص آن به تفصیل شرح می‌دهیم) این انتخاب سبب می‌شود کـه خطـا در نقاط معینی به صفر میل کند. تعداد انتخابی با تعداد ضرایب نـامعلوم میـدان درجـواب تقریبـی برابـر خواهد بود.

با توجه به ویژگی تابع ضربه به صورت

$$\int_\Omega R(x)\delta(x-x_i)\mathrm{d}x=R(x_i)\qquad,\qquad i=1,2,\dots,n$$

سعی می‌کنیم که مقدار انتگرال باقیمانده در کل ناحیه مورد نظر به صفر برسد. یعنی

$$\int_\Omega \mathrm{R}(x)\delta(x-x_i)\mathrm{d}x=0\qquad,\qquad i=1,2,\dots,n$$

مثال(۱) را در نظر می‌گیریم. فرض کنید $u_2=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2$ جواب تقریبی باشد و توابع پایه‌ای بـه فرم $\beta_2=x^2-x^3$ و $\beta_1=x-2x^2+x^3$ باشند.

[1] Point collocation method

بنابراین داریم $u_2 = \alpha_1(x - 2x^2 + x^3) + \alpha_2(x^2 - x^3)$

ناحیه مسئله را به دو قسمت مساوی افراز نموده و دو تابع ضربه را در نقاط $x = \frac{1}{4}$ و $x = \frac{3}{4}$

می‌نویسیم، تا خطا در این نقاط به صفر میل کند. برای جمله خطا یا باقیمانده داریم:

$$R(x, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}x^2} + 2 = \alpha_1(-4 - 6x) + \alpha_2(2 - 6x) + 2$$

حال باید انتگرال حاصل ضرب این باقیمانده در تابع وزن برای دو ناحیه صفر شود.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{RW}_i(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} (\alpha_1(-4 - 6x) + \alpha_2(2 - 6x) + 2)\delta(x - \frac{1}{4})\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \mathrm{RW}_i(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (\alpha_1(-4 - 6x) + \alpha_2(2 - 6x) + 2)\delta(x - \frac{3}{4})\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\begin{cases} \alpha_1 - 5\alpha_2 + 4 = 0 \\ -5\alpha_1 - \alpha_2 + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

با جایگذاری ضرایب به‌دست آمده در جواب پیشنهادی به دست می‌آوریم:

$$u(x) = x - x^2$$

۱-۱-۳ روش مینیمم مربعات[1]:

دراین روش خود باقیمانده را به عنوان تابع وزن انتخاب می‌کنیم. درنتیجه خواهیم داشت:

$$Error = E_r = \int_\Omega R(x)^2 dx$$

سپس نسبت به هر یک از متغیرهای معادله از انتگرال فوق مشتق می‌گیریم. به عبارت دیگر نسبت به ضرایب جواب تقریبی مشتقات جزیی را اعمال می‌نماییم.

مثال(۲): معادله دیفرانسیل $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = -x$ به همراه شرایط مرزی زیر در نظر بگیرید $u(0) = u(1) = 0$ این معادله را با روش کمترین مربعات حل می‌نماییم.

جواب تقریبی به صورت

[1] least squares

$$u_۲ = x(۱-x)\alpha_۱ + x^۲(۱-x)\alpha_۲$$

را درنظر بگیرید. با جایگذاری در معادله برای جمله باقیمانده داریم:

$$R = \frac{d^۲u_۲}{dx^۲} + u_۲ + x = \alpha_۱(-۲+x-x^۲) + \alpha_۲(۲-۶x-x^۲-x^۳) + x$$

با به کارگیری مشتقات جزیی نسبت به ضرایب مجهول $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ جهت مینیمم کردن R خواهیم داشت:

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_۱} = \int_۰^۱ ۲R\frac{\partial R}{\partial \alpha_۱}dx = ۲\int_۰^۱ R(-۲+x-x^۲)dx = ۰$$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_۲} = \int_۰^۱ ۲R\frac{\partial R}{\partial \alpha_۲}dx = ۲\int_۰^۱ R(۲-۶x+x^۲-x^۳)dx = ۰$$

سر انجام با بسط و محاسبه انتگرال‌های بالا به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} ۲/۲\alpha_۱ + ۱/۱\alpha_۲ = ۵۵ \\ ۷/۷\alpha_۱ + ۱۵۷۲\alpha_۲ = ۳۹۹ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_۱ = ۰/۱۸۷۵ \\ \alpha_۲ = ۰/۱۶۹۵ \end{cases}$$

$$u_۲ = x(۱-x)(۰/۱۸۷۵ - ۰/۱۶۹۵x)$$

جدول زیر مقایسه‌ای بین جواب واقعی و جواب تقریبی فوق را نمایش می‌دهد:

x	u_{exact}	$u_۲$
۰	۰	۰
۰/۲۵	۰/۰۴۴	۰/۰۴۳
۰/۵	۰/۰۷۰	۰/۰۶۸
۰/۷۵	۰/۰۶۰	۰/۰۵۹
۱	۰	۰

۱-۱-۴ روش گالرکین[۱]:

دراین روش توابع وزن $W_i(x)$ توابع پایه‌ای یا همان توابع درونیاب در جواب تقریبی معادلـه (تـابع آزمون) انتخاب می‌شود. سپس مقادیر مجهول را چنان می‌یابیم که مقدار انتگرال حاصل‌ضرب توابع وزن معرفی شده درباقیمانده $R(x)$ در سراسر ناحیه به صفر گردد. یعنی

$$\int_{\Omega} R(x)W_i(x)dx = ۰ \qquad i = ۱,۲,\dots,n$$

دراین روش فرض می‌کنیم:

$$u_n = \sum_{i=۰}^{n} \alpha_i \beta_i$$

جواب تقریبی مورد نظر باشد. که درآنها β_i ها توابع پایه‌ای و α_i ها ضرایب ثابت مجهول می‌باشـند. برای محاسبه α_i ها دستگاه معادلات خطی به صورت

$$\int_{۰}^{۱} R\beta_i dx = ۰ \quad , \quad i = ۱,\dots,n$$

را تشکیل داده و سپس ضرایب مجهول را از حل دستگاه معادلات خطی فوق به دست می‌آوریم. بـه سبب تساوی $W_i = B_i$ درتشکیل روابط پایه تقارن به‌طور ذاتی درفرمول‌بنـدی رعایـت شـده اسـت طوری که این امر سبب ایجاد ماتریس‌های متقارن جبری در روش گالرکین می‌شود. در فصل بعد بـه تشریح این روش در به کار بردن روش اجزای مرزی خواهیم پرداخت.

مثال(۲) را دوباره در نظر می‌گیریم. برای جواب تقریبی داریم:

$$u_۲ = x(۱-x)\alpha_۱ + x^۲(۱-x)\alpha_۲$$

که در آن $\beta_۲ = x^۲(۱-x)$ و $\beta_۱ = x(۱-x)$ توابع پایه‌ای هستند. برای جمله باقیمانده نیز داریم:

$$R = \alpha_۱(-۲+x-x^۲) + \alpha_۲(۲-۶x+x^۲-x^۳) + x$$

در نتیجه:

[۱] Galerkin method

$$\int_{۰}^{۱} R\beta_۱ dx = ۰ \quad \Rightarrow \quad \frac{۳}{۱۰}\alpha_۱ + \frac{۳}{۲۰}\alpha_۲ = \frac{۱}{۱۲} \quad \alpha_۱ = \frac{۷۱}{۳۶۹}$$

$$\int_{۰}^{۱} R\beta_۲ dx = ۰ \quad \Rightarrow \quad \frac{۳}{۱۰}\alpha_۱ + \frac{۱۳}{۱۰۵}\alpha_۲ = \frac{۱}{۲۰} \quad \alpha_۲ = \frac{۷}{۴۱}$$

بنابراین جواب تقریبی زیر به دست می‌آید:

$$u_۲ = (۱ - x)\left(\frac{۷۱}{۳۶۹} + \frac{۷}{۴۱}x\right)$$

جدول زیر یک مقایسه با جواب‌های تحلیلی به دست آمده را نشان می‌دهد:

x	u_{exact}	$u_۲$
۰	۰	۰
۰/۲۵	۰/۰۴۴	۰/۰۴۴
۰/۵	۰/۰۶۹۷	۰/۰۶۸۹
۰/۷۵	۰/۰۶۰۱۰	۰/۰۶۰۰
۱	۰	۰

۱-۲روش‌های عددی درمعادلات دیفرانسیل جزیی

در مکانیک محیط‌های پیوسته هرچند بهترین روش جهت جواب مسایل پیوسته که به وسیله معادلات دیفرانسیل جزیی به همراه شرایط مرزی معین تعریف می‌شوند جواب تحلیلی آنها است. گاهی تحلیل مسایل دیفرانسیل جزیی به صورت‌های بی‌قاعده و نامنظم با شرایط مرزی مختلف و ناحیه-هایی با مشخصات متفاوت یا غیرخطی بسیار مشکل و حتی غیرممکن می‌شود. بنابراین درصورت بروز چنین مشکلاتی می‌توان روش‌های تحلیل عددی را برای به دست آوردن جواب تقریبی معادلات دیفرانسیل جزیی به کار گرفت.

روش‌های عددی به کارگرفته شده درمکانیک محیط‌های پیوسته را می توان به سه رویکرد متفاوت تقسیم نمود.

- **روش تفاضلات متناهی**[۱]
- **روش اجزای محدود**[۲]
- **روش اجزای مرزی**[۳]

توصیف خلاصه‌ای از هریک از این روش‌ها در ذیل آمده است.

۱-۲-۱روش تفاضلات متناهی:

دراین روش جملاتی که شامل مشتقات جزیی تابع مجهول که درمعادلات دیفرانسیل جزیی(PDE) می‌باشند، برحسب معادلات تفاضل متناهی جایگزین می‌گردند. دراین روش معمولاً از بسط تیلور تابع مجهول برای گسسته‌سازی معادلات حاکم استفاده می‌شود. بنابراین برای یک دامنه حل دوبعدی شبکه ای از سلول‌ها مطابق شکل(۱-۱) داخل دامنه محاسباتی قرار می‌گیرد و تقریب تفاضلی برای نقاط داخلی اعمال می‌شود. پس از ساده کردن عبارات حاصل یک دستگاه معادلات جبری خطی پدید می‌آید که بدون اعمال شرایط مرزی می‌باشد. بعد از اعمال شرایط مرزی دستگاه معادلات حاصل دارای جوابی یکتا خواهد بود که تمام شرایط مرزی مسئله واقعی را ارضاء می‌کند. روش تفاضلات متناهی در فضای یک بعدی در بین این سه روش ساده‌ترین حالت محسوب شده ونسبتاً از برنامه نویسی ساده‌تری برخوردار است.

مشکل اصلی این روش درمسایل مهندسی وکاربردی آن است که برای حل مسایل با هندسه پیچیده و نامنظم مناسب نیست. به علاوه تغییر اندازه سلول‌های مختلف نیز در برخی نواحی خاص مثل مسایل شامل تمرکز تنش و امواج ضربه‌ای مشکل است. بنابراین این روش برای مسایلی که شامل تغییرات سریع متغیرها هستند مناسب نبوده وامروزه برای حل مسایل انتقال حرارت و جریان سیالات بیشتر از مسایل تحلیل تنش به کار می‌رود.

---

[۱] Finite Difference
[۲] Finite Element
[۳] Boundary Element