بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه ارومیه

مدول های هم تابدار وانژکتیو محض نسبی

عفت صفائی

دانشکده‌ی علوم

گروه ریاضی—گرایش جبرجابجایی

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

استاد راهنما:

دکتر رضا سزیده

شهریور ۱۳۸۸

پایان نامه ~~آقای~~/خانم عفت صفایی به تاریخ ۸۸/۶/۲۵

شماره مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه عالی و نمره -۱۸٫- قرار گرفت .

۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران : دکتر رضا شریعتمداری

۲- استاد مشاور : دکتر ــــــ

۳- داور خارجی : دکتر هوشنگ بهروش

۴- داور داخلی : دکتر محسن قاسمی

۵- نماینده تحصیلات تکمیلی : دکتر سعدالله ربانی

۸۸/۷/۲۱

تقدیم به:

پدرعزیزم

که رفت و نماند...

وحسرتش بی دریغ است ودلتنگی ام همیشگی

مادرمهربانم

تکیه گاهم...

وتنها بهانه ی هستی ام

خواهروبرادرنازنینم

امیدهای زندگی ام

تقدیر و تشکر

حمد و سپاس بی پایان خداوند منان را که به من توفیق دانش اندوزی و کسب معرفت عطا فرمود تا وجود خویش را به زینت علم بیارایم. اکنون که به یاری خداوند متعال توفیق انجام این پایان نامه را یافته ام شایسته است از تمامی عزیزانی که مرا در این راه یاری نمودند سپاسگزاری کنم.

از خانواده خوبم که با تشویق و حمایت خود باعث دلگرمی من بودند.

از استاد راهنمای ارجمند م آقای دکتر رضا سزیده که با راهنمایی های مفیدشان مرا در انجام هر چه بهتر این پایان نامه کمک نمودند تشکر و قدردانی می کنم.

از اساتید محترم، آقای دکتر هوشنگ بهروش (داور خارجی)، که افتخار شاگردی ایشان را داشتم و آقای دکتر محسن قاسمی(داور داخلی)، به خاطر نقد شایسته شان ممنونم.

همچنین از نماینده تحصیلات تکمیلی آقای دکترسعید استاد باشی تشکر می کنم.

از دوستان و هم کلاسیهای خوبم که در این مدت از محبتهایشان دریغ نکردند سپاسگزارم.

چکیده

فرض کنید R یک حلقه‌ی دلخواه باشد. یک R– مدول راست C را هم‌تابدار گوییم، هرگاه برای تمام A– مدول‌های راست یکدست F داشته باشیم، $\mathrm{Ext}_R^1(F, C) = 0$. در این پایان نامه ما ابتدا آن حلقه‌هایی را طبقه بندی می‌کنیم که دارای شرط زیر باشند:

هر R– مدول هم‌تابدار راست (چپ)، انژکتیو راست (چپ) است هر گاه دارای خاصیت بئر نسبت به ایده‌ال‌های راست (چپ) باشد.

سپس مدول‌های انژکتیو محض را مطالعه کرده و ارتباط بین آنها را با مدول‌های هم‌تابدار مشخص می‌کنیم.

کلمات کلیدی: مدول هم‌تابدار[۱]، مدول انژکتیو محض نسبی [۲]، حلقه‌ی PS[۳]، حلقه‌ی مین انژکتیو عام [۴] و V- حلقه‌ی محض[۵].

---

[۱] cotortion module

[۲] relative pure injective module

[۳] PS ring

[۴] universally mininjective ring

[۵] pure V-ring

پیش گفتار

این پایان نامه بر اساس مرجع [۱۶] نوشته شده است و در آن همه‌ی حلقه‌ها شرکتپذیر و دارای همانی و همه‌ی مدول‌ها یکدار در نظر گرفته شده است. فرض کنید R یک حلقه باشد یک R مدول مانند C را مدول هم‌تابدار می‌نامیم اگر برای هر R- مدول راست یکدست مانندF داشته باشیم: $\mathrm{Ext}^1_R(F,C) = 0$ که در مرجع [۳] به تفصیل بیان شده است. حال طبق مرجع[۹] حلقه‌ی R هم تابدار راست نامیده می‌شود اگر R_R هم تابدار باشد. همچنین کلاس R- مدول‌های هم تابدار شامل همه‌ی مدول‌های انژکتیو—محض (همچنین همه‌ی انژکتیوها) است. و تحت جمع مستقیم و جمعوندهای مستقیم بسته می‌باشد.

فرض کنید ℓ کلاس R- مدول‌های راست و M یک R- مدول راست باشد مطابق مرجع [۱۰] یک پیش روکش از M یک همریختی مانند $\phi : F \to M$ است که در آن $F \in \ell$ می‌باشد به‌طوری‌که $\mathrm{Hom}(F',F) \to \mathrm{Hom}(F',M)$ برای همه‌ی $F \in \ell$ پوشا می‌باشد. همچنین یک $\ell-$ پیش روکش، $\ell-$ روکش نامیده می‌شود اگر یک خود ریختی مانند $h : F \to F$ با ویژگی $\phi h = \phi$ یک یکریختی باشد. اگر ℓ کلاس مدول‌های یکدست باشد، آنگاه $\ell-$ روکش، روکش یکدست نامیده می شود. همچنین $\ell-$ پیش پوشش‌ها به صورت دوگانی از پیش روکش‌ها تعریف می شوند.

بیکان(Bican)، بشیر(Bashir) و اِنوکس(Enochs) در سال ۲۰۰۱ ثابت کردند که هر مدول روی حلقه‌ی جابجایی یک روکش یکدست و یک پوشش هم‌تابدار دارد. یک ویژگی مهم از روکش های یکدست در مرجع [۲۲] توسط لم واکاماتس به این صورت بیان شده است که ker یک روکش یکدست، هم‌تابدار می‌باشد.

در ادامه ما M_R را به عنوان یک R- مدول راست در نظر می‌گیریم. $M^{(I)}$ جمع مستقیم از کپی‌هایی از M را نشان می‌دهد که به وسیله‌ی مجموعه‌ی I اندیسگذاری شده است.$J(M)$، $Z(M)$ و $\mathrm{Soc}(M)$ به

ترتیب رادیکال ژاکوبین، زیر مدول تکین و ساکل M را نشان می‌دهند. برای یک زیر مجموعه‌ی X از R، ann چپ (راست) X در R را به وسیله‌ی $\ell(X)$ (r(X)) نشان می‌دهیم و اگر قرار دهیم $X = \{a\}$ به صورت $\ell(a)$ ($r(a)$) نمایش می‌دهیم.

برای یک R- مدول راست مانند M، $\varepsilon_M : F(M) \to M$ و $\sigma_M : M \to C(M)$ به ترتیب یک روکش یکدست و یک پوشش هم‌تابدار از M را نشان می‌دهد.

ا ین پایان نامه در چهار فصل تنظیم شده است. در فصل اول مفاهیم اولیه از جبر جابجایی و جبر همولوژی آورده شده است. در فصل دوم تعاریف و مفاهیمی که برای ادامه‌ی کار لازم می‌باشد بیان شده است. در فصل سوم ابتدا ویژگی‌هایی از مدول‌های هم تابدار و A- انژکتیو را بیان کرده و در ادامه رابطه‌ی بین آنها را بررسی می‌کنیم. فصل چهارم که اساسی ترین فصل پایان نامه را تشکیل می‌دهد به بیان مدول‌های انژکتیو محض—نسبی پرداخته و در ادامه حلقه‌ی I- متناهی و حلقه‌ی تام و نیم تام را بررسی می‌کنیم و بخش آخر فصل به یک تعمیم جدید از V- حلقه‌ها اختصاص داده شده است.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل مباحث مقدّماتی از جبر جابجایی و جبر همولوژی را که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار گرفته‌اند، آورده شده است. تا حد امکان سعی گردیده است که مطالب مختصر بیان گردد. بنابراین از ارائه‌ی بیشتر اثبات‌ها خودداری نموده‌ایم. خواننده می تواند برای مطالعه‌ی بیشتر به مراجع مربوطه رجوع کند.

۱.۱ مفاهیمی از جبر جابجایی

تعاریف اولیه در این بخش برگرفته‌شده از مراجع [۱]، [۱۹] و [۲۱] می‌باشند.

تذکر ۱.۱.۱ در این پایان نامه همه‌ی حلقه‌ها شرکت‌پذیر بوده و دارای عضو همانی می‌باشند و همه‌ی مدول‌ها یکدار هستند.

تعریف ۲.۱.۱ رسته‌ی[۱] $\mathcal{C}$، خانواده‌ای است متشکل از شئ‌ها که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱. به‌ازای هر دو شئ مثل A و B از $\mathcal{C}$ مجموعه‌ای متناظر می‌شود که با $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ نشان داده می‌شود و برای هر چهار شیء مثل A، B، C و D داریم: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\cap \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D) = \circ$. $f \in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ یک ریخت از A به B نامیده و با $f : A \longrightarrow B$ نشان می‌دهیم. مجموعه‌ی

[۱] category

ریخت‌های رسته‌ی $\mathcal{C}$ را با $\text{Mor}\mathcal{C}$ و مجموعه اشیا آن را با $\text{obj}\ \mathcal{C}$ نشان می‌دهیم.

۲. برای هر $A, B, C \in \text{obj}\ \mathcal{C}$، ترکیب[۱]

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C)$$

$$(f,g) \mapsto g\circ f$$

در شرایط زیر صدق می‌کند:

(الف) ترکیب شرکت‌پذیر است؛

(ب) برای هر $A \in \text{obj}\ \mathcal{C}$، عضو همانی $1_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A,A)$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A)$ و هر $B \in \text{obj}\mathcal{C}$، $1_A \circ f = f$. همچنین برای هر $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C)$ و هر $C \in obj\ \mathcal{C}$، $g\circ 1_A = g$.

به‌عنوان مثال هرگاه R حلقه‌ای یکدار باشد، خانواده‌ی تمام $R-$ مدول‌های چپ (راست) یک رسته می‌باشد.

تعریف ۳.۱.۱ اگر $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو رسته باشند. **فانکتور**[۲] $T:\mathcal{A}\longrightarrow \mathcal{B}$، تابعی است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

(۱) $A \in \text{obj}\mathcal{A}$ ایجاب می‌کند $TA \in \text{obj}\mathcal{B}$؛

(۲) اگر $f: A\longrightarrow A'$ یک ریخت در $\mathcal{A}$ باشد، آنگاه $Tf: TA\longrightarrow TA'$ یک ریخت در $\mathcal{B}$ است، به‌طوری‌که

(الف) اگر f و g دو ریخت در $\mathcal{A}$ باشند که $g\circ f$ تعریف شده باشد، آنگاه $T(g\circ f) = (Tg)\circ(Tf)$؛

(ب) برای هر $A \in obj\mathcal{A}$، $T(1_A) = 1_{TA}$.

---
[۱] composition
[۲] functor

تعریف ۴.۱.۱ فانکتور $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ را هم‌ارزی از رسته‌ها گوییم اگر فانکتور $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ موجود باشد به‌طوری‌که $GF \cong \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ و $FG \cong \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$. گوییم F و G شبه—معکوس هستند.

تعریف ۵.۱.۱ فانکتور $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ را **باوفا**[۱] گوییم اگر $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, FC')$ یک نگاشت یک‌به‌یک باشد؛ یعنی اگر $f_1 : C \longrightarrow C'$ و $f_2 : C \longrightarrow C'$ نگاشت‌هایی متمایز در $\mathcal{C}$ باشند، آنگاه $F(f_1) \neq F(f_2)$.

تعریف ۶.۱.۱ فانکتور $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ را پر[۲] گوییم اگر $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, FC')$ یک نگاشت پوشا باشد؛ یعنی برای هر $g : F(C) \longrightarrow F(C')$ در $\mathcal{D}$ یک ریخت مثل $f : C \longrightarrow C'$ در $\mathcal{C}$ موجود باشد به‌طوری‌که $g = F(f)$.

تعریف ۷.۱.۱ زیر رسته‌ی $\mathcal{B}$ از $\mathcal{C}$، مجموعه‌ای است شامل اشیا و ریخت‌های $\mathcal{C}$ به‌طوری‌که ریخت‌ها در $\mathcal{B}$ تحت ترکیب بسته‌اند و برای هر $B \in \mathcal{B}$، $\mathrm{id}_B \in \mathrm{Mor}\mathcal{B}$. زیررسته در واقع یک رسته است. هرگاه $\mathcal{B}$ دارای شرط $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B, B') = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, B')$ برای هر $B, B' \in \mathcal{B}$ باشد $\mathcal{B}$ را زیررسته‌ی پر[۳] از $\mathcal{C}$ می‌نامیم.

تعریف ۸.۱.۱ گوییم I یک مجموعه‌ی مستقیم[۴] است هرگاه I شبه مرتب[۵] باشد؛ یعنی برای هر $i, j \in I$، $k \in I$ موجود باشد به‌طوری‌که $i, j \leq k$.

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنید I یک مجموعه‌ی شبه مرتب و $\mathcal{C}$ یک رسته باشد. در اینصورت یک دستگاه مستقیم[۶] در $\mathcal{C}$ با مجموعه‌ی اندیسگذار I یک فانکتور $F : I \to \mathcal{C}$ است به‌طوری‌که به ازای هر $i \in I$، یک شئ از رسته‌ی $\mathcal{C}$ به دست می‌دهد. حال اگر برای $i, j \in I$ داشته باشیم $i \leq j$، آنگاه یک همریختی مانند $\varphi^i_j : F_i \to F_j$ وجود دارد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

[۱] faithful
[۲] full
[۳] full subcategory
[۴] directed Set
[۵] quasi-ordered
[۶] direct system

(۱) به ازای هر $i \in I$، همریختی $\varphi_i^i : F_i \to F_i$ همانی است؛

(۲) اگر $i \leq j \leq k$، آنگاه نمودار زیر جابجایی است:

$$\begin{tikzcd} F_i \arrow[r, "\varphi_k^i"] \arrow[dr, "\varphi_j^i"'] & F_k \arrow[d, "\varphi_j^k"] \\ & F_j \end{tikzcd}$$

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنید $F = \{F_i, \varphi_j^i\}$ یک دستگاه مستقیم در $\mathcal{C}$ باشد. حد مستقیم این دستگاه عبارت است از یک شئ از این رسته که با نماد $\varinjlim F_i$ نمایش می‌دهیم و متشکل از ریخت‌هایی چون $\alpha : F_i \to \varinjlim F_i$ می‌باشد به‌طوری‌که نمودار زیر جابجایی است:

$$\begin{tikzcd} \varinjlim F_i \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, "\alpha_j"'] & F_i \\ F_j \arrow[ur, "\varphi_i^j"'] & \end{tikzcd}$$

بنابراین $\alpha_i = \alpha_j \varphi_j^i$. حال اگر فرض کنیم X یک شئ دلخواه از این رسته باشد و همریختی‌های f_i به صورت $f_i : F_i \to X$ موجود باشند به‌طوری‌که برای هر $i \leq j$ داشته باشیم، $f_i = f_j \varphi_j^i$.

$$\begin{tikzcd} \varinjlim F_i \arrow[rr, dashed, "\bar{\beta}"] & & X \\ & F_i \arrow[ul, "\alpha_i"'] \arrow[ur, "f_i"] \arrow[d, "\varphi_j^i"] & \\ & F_j \arrow[uul, "\alpha_j"] \arrow[uur, "f_j"'] & \end{tikzcd}$$

آنگاه یکریختی منحصر بفردی مانند $\beta : \varinjlim F \to X$ وجود دارد که نمودار کل را جابجا می‌کند. در نتیجه $\beta\alpha_i = f_i$.

۲.۱ تعاریف و قضایایی از همولوژی جبری

در این بخش مفاهیمی از همولوژی جبری را ا ز مرجع [۱۹] بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱ فرض می‌کنیم R یک حلقه باشد. دنباله‌ی زیر را

$$A : \ldots \to A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots$$

یک **همبافت** [۷] A یا **زنجیره‌ی همبافت**[۸] می‌نامیم که در آن A_n یک $R-$ مدول و d_n یک $R-$همریختی برای هر $n \in \mathbb{Z}$ باشد.

d_n ها را دیفرانسیل نیز می نامند و برای هر $n \in \mathbb{Z}$ دارای شرط $d_n \circ d_{n+1} = 0$ است.

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنید (A, d) و (A', d') دو همبافت باشند. **نگاشت زنجیره‌ای** [۹] $f : A \to A'$ برای هر $n \in \mathbb{Z}$ یک دنباله از نگاشت ها به صورت $f_n : A_n \to A'_n$ است به‌طوری‌که نمودار زیر جابجایی می‌باشد.

$$\begin{array}{ccccccc}
\ldots \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{d_n} & A_{n-1} & \longrightarrow \ldots \\
& \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & \\
\ldots \longrightarrow & A'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & A'_n & \xrightarrow{d'_n} & A'_{n-1} & \longrightarrow \ldots
\end{array}$$

---

[۷] Complex
[۸] chain complex
[۹] chain map

تعریف ۳.۲.۱ فرض کنید $(\mathcal{A}, d)$ یک همبافت باشد. n– **امین هومولوژی مدول**[۱۰] را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$.H_n(\mathcal{A}) = \frac{\mathrm{Ker}d_n}{\mathrm{Im}d_{n+1}}$$

تذکر ۴.۲.۱ اگر $H_n(\mathcal{A}) = 0$، آنگاه $\mathrm{ker}d_n = \mathrm{Im}d_{n+1}$. که در اینصورت دنباله‌ی همبافت، دقیق است.

تعریف ۵.۲.۱ فرض کنید $(\mathcal{A}, d)$ یک همبافت باشد. برای هر $n \in \mathbb{Z}$ عناصر A_n را یک n–زنجیره[۱۱] می‌نامیم و قرار می‌دهیم:

$$\mathrm{Im}d_{n+1} = B_n(\mathcal{A}) = B_n \text{ و } \mathrm{ker}d_n = Z_n(\mathcal{A}) = Z_n$$

در اینصورت

$$.H_n(\mathcal{A}) = \frac{Z_n(\mathcal{A})}{B_n(\mathcal{A})}$$

تعریف ۶.۲.۱ فرض کنید $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ یک نگاشت زنجیره‌ای بین دو همبافت $\mathcal{A}$ و $\mathcal{A}'$ باشد. در اینصورت $H_n(f) : H_n(\mathcal{A}) \to H_n(\mathcal{A}')$ که برای هر $n \in \mathbb{Z}$ یک R– همریختی مدول‌ها است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_n(f) : \frac{Z_n}{B_n} \to \frac{Z'_n}{B'_n}$$

$$(z_n + B_n)(\mathcal{A}) \to f_n(z_n) + B_n(\mathcal{A}')$$

$H_n(f)$ **رانگاشت بوجود آمده**[۱۲] توسط f می‌نامیم.

تعریف ۷.۲.۱ فرض کنید X یک همبافت به صورت زیر باشد:

$$X = \ldots \to X_1 \to X_0 \to M \to 0$$

در اینصورت همبافت زیر را **همبافت حذف شده‌ی**[۱۳] M می‌نامیم.

[۱۰] nth homology module
[۱۱] n-chain
[۱۲] induced map
[۱۳] deleted complex

$$X_M = ... \to X_1 \to X_0 \to 0$$

به طور مشابه همبافت حذف شده‌ی N را برای همبافت زیر

$$Y = 0 \to N \to Y^0 \to Y^1 \to ...$$

به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$Y_N = 0 \to Y^0 \to Y^1 \to ...$$

تعریف ۸.۲.۱ فرض کنید T یک فانکتور همورد باشد. در اینصورت n—امین فانکتور مشتق شده‌ی راست[۱۴] T را روی A به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(R^nT)A = H^n(TE_A) = \frac{\ker(Td^n)}{\mathrm{im}(Td^{n-1})}$$

که معمولاً به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(R^nT)A = H_{-n}(TE_A) = \frac{\ker(Td_{-n})}{\mathrm{im}(Td_{-n+1})}$$

تعریف ۹.۲.۱ فرض کنید A یک R- مدول باشد دنباله‌ی زیر را که در آن به ازای هر $i \geq 0$ هر P_i تصویری است یک تحلیل تصویری برای A می‌نامیم.

$$... \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} A \to 0$$

همچنین دنباله‌های زیر را که در آن برای هر $i \geq 0$ هر E^i انژکتیو و هر F_i یکدست است به ترتیب یک تحلیل انژکتیو و تحلیل یکدست برای A می‌نامیم.

$$0 \to A \xrightarrow{\epsilon} E^0 \xrightarrow{d_0} E^1 \xrightarrow{d_1} ...$$

$$... \longrightarrow F_2 \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\epsilon} A \to 0$$

تعریف ۱۰.۲.۱ اگر $T = Hom_R(C,-)$، آنگاه $R^nT = \mathrm{Ext}^n_R(C,-)$. در واقع اگر دنباله‌ی زیر

$$0 \to A \to E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \to ...$$

یک تحلیل انژکتیو برای A باشد، آنگاه قرار می‌دهیم:

[۱۴] nth right deriverd functor

$$\mathrm{Ext}^n_R(C,A)=\frac{\ker d^n_*}{\mathrm{im} d^{n-1}_*}$$

که درآن $d^n_* = Td_{-n}$.

تعریف ۱۱.۲.۱ اگر T یک فانکتور پادورد و دنباله‌ی زیر یک تحلیل تصویری برای C باشد:

$$\dots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \to C \to 0$$

در اینصورت

$$.(R^nT)C=\frac{\ker Td_{n+1}}{\mathrm{im} Td_n}$$

تعریف ۱۲.۲.۱ اگر $T=\mathrm{Hom}_R(-,A)$، آنگاه $R^nT=\mathrm{Ext}^n_R(-,A)$. در واقع اگر دنباله‌ی زیر یک تحلیل تصویری برای C باشد

$$\dots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \to C \to 0$$

آنگاه قرار می‌دهیم:

$$\mathrm{Ext}^n_R(A,B)=\frac{\ker d_{n+1*}}{\mathrm{im} d_{n*}}$$

که درآن $d_{n*}=Td_n$.

تعریف ۱۳.۲.۱ اگر E_B یک تحلیل انژکتیو حذف شده برای $R-$ مدول B باشد، آنگاه برای هر $R-$ مدول A، $\mathrm{Ext}^n_R(A,B)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{Ext}^n_R(A,B)=H_{-n}(\mathrm{Hom}(A,E_B))$$

همچنین اگر P_A یک تحلیل تصویری حذف شده برای A باشد، آنگاه برای هر $R-$ مدول B، $\mathrm{Ext}^n_R(A,B)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{Ext}^n_R(A,B)=H_{-n}(\mathrm{Hom}(P_A,B)$$