فهرست مطالب

پیشگفتار

عبارت "مسئله خوش‌حالتی" از تعریف ارائه شده توسط جاکس هادامارد [1] ریشه می‌گیرد. او بر این باور است که مدل‌های ریاضی یک پدیده فیزیکی باید ویژگی‌های زیر را داشته باشد.

الف) وجود جواب،

ب) منحصربفرد بودن جواب،

ج) وابستگی مداوم جواب به داده‌ها در یک توپولوژی.

لینگولا[2] و مورگان[3] خوش‌حالتی پارامتریک را برای یک خانواده از نابرابری تغییراتی بیان نمودند. از سوی دیگر لینگولا نظریه‌های خوش‌حالتی و $L-$خوش‌حالتی را برای نابرابری‌های شبه تغییراتی بیان نمود و تعدادی از خواص متریک آن‌ها را بدست آورد.

---

[1] Jacques Hadamard

[2] Lingola

[3] Morgan

مفاهیم متنوعی از خوش‌حالتی به‌طور گسترده در دهه‌های گذشته بررسی شده است. در این زمینه تلاش‌های زیادی شده است. به عنوان مثال به [۴، ۸، ۱۲، ۲۰، ۲۶، ۳۳، ۳۶، ۳۷] رجوع شود. در سال‌های اخیر، مفهوم خوش‌حالتی به سایر زمینه‌ها نیز بسط داده شده است، مانند مسائل نابرابری تغییراتی [۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۲۰]، مسائل نقطه زینی [۵]، مسائل تعادل نش [۴] [۱۸، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۷]، مسائل شمول [۱۴، ۱۵] و مسائل نقطه ثابت [۱۴، ۱۵، ۳۴، ۲۹]. درباب خوش‌حالتی یک مسئله تغییراتی معین بررسی ویژگی‌های متریک، یافتن شرایطی که تحت آن مسئله خوش‌حالت است و اثبات رابطه‌اش با خوش‌حالتی سایر مسائل مربوطه مهم و مورد توجه می‌باشد.

خوش‌حالتی مسائل بهینه‌سازی، اولین بار توسط تیخونف [۵]، در سال ۱۹۶۶ بررسی و مطالعه شد و از آن به بعد، مفهوم خوش‌حالتی به انواع مختلف مسائل بهینه‌سازی بسط داده شد. به‌خاطر رابطه نزدیک خوش‌حالتی مسائل نابرابری تغییراتی با مسائل بهینه‌سازی بررسی آن در دهه‌ی اخیر آهنگ بیشتری داشته است. رابطه بین خوش‌حالتی نابرابری‌های تغییراتی و خوش‌حالتی مسائل بهینه‌سازی در [۷، ۱۷، ۲۰] بحث شده‌اند. لمایر [۶] [۱۴] روابط بین خوش‌حالتی مسائل کمینه‌یابی، مسائل

[۴] Nash

[۵] Tykhonov

[۶] Lemaire

شمول و مسائل نقطه ثابت را مورد بررسی قرار داد؛ اخیرا فنگ [۷]، هانگ [۸] و یائو [۹] [۱۱] خوش‌حالتی یک نابرابری تغییراتی آمیخته را به عنوان یک مورد خاص که شامل نابرابری تغییراتی کلاسیک می‌باشد را بررسی کرد و نتایجی برای خوش‌حالتی این نابرابری تغییراتی آمیخته، مسئله شمول متناظر و مسئله نقطه ثابت متناظر بدست آورد.

این پایان‌نامه در ۴ فصل تنظیم شده است؛ که فصل اول مربوط به تعاریف و مفاهیم مورد نیاز می‌باشد. در فصل دوم ابتدا مفهوم خوش‌حالتی را بیان می‌کنیم و سپس جنبه‌های مختلف خوش‌حالتی برای یک مسئله نابرابری شبه تغییراتی پارامتریک با نگاشت‌های مجموعه مقدار را بررسی می‌کنیم و با کمک نتایج بدست آمده برای $\mathrm{QVI}(x_\circ)$ درنهایت خوش‌حالتی برای یک مسئله بهینه‌سازی با قیود نابرابری شبه تغییراتی را بسط می‌دهیم. در فصل سوم نابرابری شبه تغییراتی مانند آمیخته را معرفی و سپس در بخش‌های مختلف خوش‌حالتی، L-خوش‌حالتی و خوش‌حالتی به مفهوم تعمیم یافته را بررسی می‌کنیم.

بالاخره در فصل چهارم با الهام از یافته‌های فنگ، هانگ و یائو مفهوم خوش‌حالتی را به یک نابرابری تغییراتی آمیخته تعمیم‌یافته بسط می‌دهیم و برخی از ویژگی‌های آن را ارائه می‌دهیم، هم‌چنین تحت شرایط مناسب روابط بین خوش‌حالتی یک نابرابری تغییراتی آمیخته تعمیم‌یافته و خوش‌حالتی مسئله

---

[۷] Fang

[۸] Huang

[۹] Yao

نقطه ثابت متناظر را مورد بحث و بررسی قرار خواهیم داد. در نهایت برخی از شرایطی که نابرابری تغییراتی آمیخته تعمیم‌یافته تحت آن خوش‌حالت است را استنتاج می‌کنیم.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۰.۱. اگر X یک فضای برداری باشد. تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را محدب می‌نامیم اگر برای هر $x, y \in X$ و هر $\lambda \in [۰, ۱]$ داشته باشیم

$$f(\lambda x + (۱ - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (۱ - \lambda)f(y).$$

در صورتی که $-f$ محدب باشد f را مقعر گوییم.

تعریف ۲.۰.۱. اگر X یک فضای برداری و $A \subseteq X$ باشد. در این صورت کوچکترین مجموعه محدب شامل A را غلاف محدب A [۱] گوییم و با coA نمایش می‌دهیم.

[۱] Convex hull

تعریف ۱.۰.۳. فرض می‌کنیم X و Y مجموعه‌هایی غیرتهی باشند. نگاشت مجموعه مقدار از X به Y، نگاشتی است که X را به $\{\emptyset\} - ۲^{Y}$ (مجموعه تمام زیرمجموعه‌های غیرتهی Y)می‌نگارد.

برای سه تعریف زیر فرض می‌کنیم X یک زیرمجموعه بسته غیرتهی از $\mathbb{R}^n$ ، $Y = \mathbb{R}^m$ باشد.

تعریف ۱.۰.۴. نگاشت مجموعه مقدار$F : X \longrightarrow ۲^{Y}$ نیم‌پیوسته بالایی (usc) [۲] در $x \in \operatorname{dom} F$ گفته می‌شود اگر برای هر دنباله $\{y_n\}$ همگرا به y در Y یک دنباله $\{x_n\}$ همگرا به x در X وجود داشته باشد به‌طوری که $y_n \in F(x_n)$ و $y \in F(x)$.

تعریف ۱.۰.۵. نگاشت مجموعه مقدار $F : X \longrightarrow ۲^{Y}$ نیم‌پیوسته پایینی (lsc) [۳] در $x \in \operatorname{dom} F$ گفته می‌شود اگر برای هر دنباله $\{x_n\}$ در $\operatorname{dom} F$ همگرا به x و برای هر $y \in F(x)$ دنباله $\{y_n\}$ در $F(x_n)$ همگرا به y وجود داشته باشد.

تعریف ۱.۰.۶. نگاشت مجموعه مقدار $F : X \longrightarrow ۲^{Y}$ بسته در $x \in X$ گفته می‌شود اگر برای هر دنباله $\{x_n\}$ همگرا به x در X و دنباله $\{y_n\}$ همگرا به y در Y، $y_n \in F(x_n)$ وجود داشته باشد به‌طوری که $y \in F(x)$.

تعریف ۱.۰.۷. یک تابع $f : X \longrightarrow Y$ بین دو فضای توپولوژی سره [۴] است اگر وتنها اگر

---

[۲] Upper semicontinuous

[۳] Lower semicontinuous

[۴] Proper

وارون هر مجموعه فشرده در Y یک مجموعه فشرده در X باشد.

تعریف ۸.۰.۱. فضای برداری مختلط X را یک فضای خطی نرم‌دار نامیم اگر به هر $x \in X$ یک عدد حقیقی نامنفی مانند $\| x \|$ به نام نرم x چنان مربوط شده باشد که

الف) به ازای هر x و y در X، $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$؛

ب) اگر $x \in X$ و α اسکالر باشد $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \|$؛

پ) $\| x \| = ۰$ تساوی $x = ۰$ را ایجاب نماید.

تعریف ۹.۰.۱. یک فضای خطی نرم‌دار را فضای باناخ می‌نامیم هرگاه با متر تعریف شده به‌وسیله نرم آن تام باشد.

تعریف ۱۰.۰.۱. منظور از یک پوشش باز مجموعه E در فضای متری X یعنی گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های باز X مانند $\{G_\alpha\}$ که $E \subset \bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha$

تعریف ۱۱.۰.۱. زیرمجموعه K از فضای متری X را فشرده [۵] می‌نامیم هرگاه هر پوشش باز K دارای زیرپوششی متناهی باشد.

تعریف ۱۲.۰.۱. فرض کنید X یک فضای نرم‌دار و X^* دوگان X باشد. توپولوژی تولید شده بوسیله X^* روی X یعنی ضعیف‌ترین توپولوژی τ روی X به‌قسمی که هر $\lambda \in X^*$ نسبت به τ

---

[۵] Campact

پیوسته باشد، که آن را توپولوژی ضعیف روی X می‌نامیم و با $\sigma(X, X^*)$ نشان می‌دهیم.

اگر دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در X نسبت به توپولوژی ضعیف همگرا به x باشد می‌نویسیم $x_n \rightharpoonup x$.

تعریف ۱.۰.۱۳. اگر X یک فضای نرم‌دار و X^* دوگان X باشد. آن‌گاه توپولوژی $\sigma(X^*, X^{**})$ توپولوژی ضعیف روی X^* است. که با $\sigma(X^*, X)$ نشان داده و آن را توپولوژی ضعیف* می‌نامیم.

توپولوژی ضعیف*، ضعیف‌تر از توپولوژی ضعیف روی X^* است.

اگر $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در X باشد که در توپولوژی ضعیف* به λ همگرا باشد می‌نویسیم $\lambda_n \rightharpoonup \lambda$.

فصل ۲

خوش‌حالتی مسائل نابرابری شبه تغییراتی پارامتریک و مسائل بهینه‌سازی

۱.۲ خوش‌حالتی مسائل نابرابری شبه تغییراتی پارامتریک

۱.۱.۲ مفاهیم اساسی

فرض کنیم X یک زیرمجموعه بسته غیرتهی از $\mathbb{R}^n$، $Y=\mathbb{R}^m$ و A یک زیرمجموعه غیرتهی، بسته و محدب از Y باشد. هم‌چنین $K : X\times Y \longrightarrow 2^Y$ و $T : X\times Y \longrightarrow 2^Y$ را نگاشت‌های

مجموعه مقدار در نظر می‌گیریم به‌طوری که

$$\operatorname{dom} K := \{(x,u) \in X \times Y \ : \ K(x,u) \neq \emptyset\}.$$

مسئله نابرابری شبه تغییراتی [۱] با نگاشت‌های مجموعه مقدار، وابسته به یک پارامتر $x_\circ \in X$، یافتن $u_\circ \in K(x_\circ, u_\circ) \cap A$ و $t_\circ \in T(x_\circ, u_\circ)$ است به‌طوری که برای هر $v \in K(x_\circ, u_\circ)$،

$$\langle t_\circ, u_\circ - v \rangle \leq \circ. \qquad (\mathrm{QVI}(x_\circ))$$

۲.۱.۲ خوش‌حالتی برای مسئله $\mathrm{QVI}(x_\circ)$

تعریف ۱.۱.۲. دنباله‌ی $\{u_n\}$ یک دنباله تقریبی [۲] برای $\mathrm{QVI}(x_\circ)$ نامیده می‌شود اگر

الف) یک دنباله‌ی $\{x_n\}$ در X وجود داشته باشد به‌طوری که x_n همگرا به $x_\circ$ باشد،

ب) $u_n \in K(x_n, u_n) \cap A$،

پ) یک دنباله از اعداد حقیقی مثبت $\{\epsilon_n\}$ همگرا به صفر و یک دنباله‌ی $t_n \in T(x_n, u_n)$ وجود داشته باشد به‌طوری که به ازای هر $v \in K(x_n, u_n)$،

$$\langle t_n, u_n - v \rangle \leq \epsilon_n.$$

---

[۱] Quasivariational inequality

[۲] Approximating sequence

تعریف ۲.۱.۲. هرگاه دو شرط

الف) جواب یکتای $u_\circ$ برای $\mathrm{QVI}(x_\circ)$ وجود داشته باشد،

ب) هر دنباله تقریبی برای $\mathrm{QVI}(x_\circ)$ همگرا به $u_\circ$ باشد،

برقرار باشد، مسئله‌ی $\mathrm{QVI}(x_\circ)$ خوش‌حالت نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۱.۲. فرض کنیم $S(x_\circ)$ مجموعه جواب $\mathrm{QVI}(x_\circ)$ را نشان دهد که عبارتست از

$$S(x_\circ) := \{u \in K(x_\circ, u) \cap A \;:\; \exists t \in T(x_\circ, u) \;\; s.t. \; \langle t, u-v\rangle \leq \circ \quad \forall v \in K(x_\circ, u)\}.$$

برای هر عدد حقیقی $\delta, \epsilon \geq \circ$ مجموعه جواب‌های تقریبی$\mathrm{QVI}(x_\circ)$ عبارتست از

$$S(x_\circ, \delta, \epsilon) := \bigcup_{x \in B(x_\circ, \delta)} \{u \in K(x, u) \cap A \;:\; \exists t \in T(x, u)$$

$$s.t \;\; \langle t, u-v\rangle \leq \epsilon \quad \forall v \in K(x, u)\},$$

که $B(x_\circ, \delta)$ گوی بسته به مرکز $x_\circ$ و شعاع δ است.

واضح است که به ازای هر $\delta, \epsilon \geq \circ$ ، $S(x_\circ, \circ, \circ) = S(x_\circ)$ و $S(x_\circ) \subseteq S(x_\circ, \delta, \epsilon)$.

تعریف ۴.۱.۲. قطر مجموعه غیرتهی A در Y به‌صورت $\operatorname{diam} A := \sup_{a,b \in A} \|a-b\|$ تعریف می‌شود.

قضیه ۱.۱.۲. *اگر شرایط زیر برقرار باشد*

۱ . K بسته و نیم‌پیوسته پایینی روی $\{x_\circ\} \times Y$ باشد،

۲ . T نیم‌پیوسته بالایی با مقادیر فشرده روی $\{x_\circ\} \times Y$ باشد،

آن‌گاه $\mathrm{QVI}(x_\circ)$ *خوش‌حالت است اگر و تنها اگر برای هر* $\delta, \epsilon > \circ$، $S(x_\circ, \delta, \epsilon) \neq \varnothing$ *و*

$$\operatorname{diam} S(x_\circ, \delta, \epsilon) \longrightarrow \circ, \qquad (\delta, \epsilon) \longrightarrow (\circ, \circ). \tag{۱.۲}$$

اثبات. اگر مسئله $\mathrm{QVI}(x_\circ)$ خوش‌حالت باشد، جواب منحصربفرد $u_\circ \in S(x_\circ)$ وجوددارد.

برای هر $\delta, \epsilon > \circ$ چون $S(x_\circ) \subseteq S(x_\circ, \delta, \epsilon)$ لذا $S(x_\circ, \delta, \epsilon) \neq \varnothing$.

اثبات را با برهان خلف ادامه می‌دهیم یعنی

$$\operatorname{diam} S(x_\circ, \delta, \epsilon) \nrightarrow \circ, \qquad (\delta, \epsilon) \longrightarrow \circ$$

پس $r > \circ$ ، یک عدد صحیح مثبت m، $\delta_n > \circ$ و $\epsilon_n > \circ$ وجود دارند به‌طوری که

$$(\delta_n, \epsilon_n) \longrightarrow (\circ, \circ), \quad u_n, u'_n \in S(x_\circ \delta_n, \epsilon_n)$$

و

$$\| u_n - u'_n \| > r \qquad \forall\, n \geqslant m \tag{۲.۲}$$

چون $u_n, u'_n \in S(x_\circ, \delta_n, \epsilon_n)$ ، دنباله‌های $x_n, x'_n \in B(x_\circ, \delta_n)$، $t_n \in T(x_n, u_n)$ و

$t'_n \in T(x'_n, u'_n)$ وجود دارند به‌طوری که

$$\langle t_n, u_n - v \rangle \leq \epsilon_n \qquad \forall\, v \in K(x_n, u_n)$$

و

$$\langle t'_n, u'_n - v\rangle \leq \epsilon_n \qquad \forall\, v \in K(x'_n, u'_n)$$

هنگامی‌که δ_n همگرا به صفر است، دنباله‌های $\{x'_n\}, \{x_n\}$ همگرا به $x_\circ$ اند و هر دو دنباله‌ی $\{u'_n\}, \{u_n\}$ دنباله‌های تقریبی برای $\mathrm{QVI}(x_\circ)$ هستند.

به دلیل خوش‌حالتی $\mathrm{QVI}(x_\circ)$ هردو دنباله فوق همگرا به $u_\circ$ اند که با (۲.۲) تناقض دارد.

بر عکس، فرض می‌کنیم $\{u_n\}$یک دنباله تقریبی برای مسئله $\mathrm{QVI}(x_\circ)$ باشد، پس دنباله‌های

$$x_n \longrightarrow x_\circ,\ u_n \in K(x_n,\ u_n) \cap A,\ \epsilon_n \longrightarrow \circ$$

و $t_n \in T(x_n, u_n)$ وجود دارند به‌قسمی که

$$\langle t_n, u_n - v\rangle \leq \epsilon_n \qquad \forall\, \nu \in K(x_n, u_n) \tag{۳.۲}$$

اگر $\delta_n = \parallel x_n - x_\circ \parallel$ را انتخاب کنیم، لذا δ_n به صفر میل می‌کند و $u_n \in S(x_\circ, \delta_n, \epsilon_n)$.

از آن‌جا که

$$\operatorname{diam} S(x_n, \delta_n, \epsilon_n) \longrightarrow \circ, \qquad (\delta_n, \epsilon_n) \longrightarrow \circ$$

نتیجه می‌گیریم $\{u_n\}$ دنباله کشی همگرا به $u_\circ \in Y$ است. چون مجموعه A بسته و K نگاشت بسته روی $\{x_\circ\} \times Y$ است پس $u_\circ \in K(x_\circ, u_\circ) \cap A$.

اگر $\nu \in K(x_\circ, u_\circ)$ چونK نیم‌پیوسته پایینی در $(x_\circ, u_\circ)$ است و دنباله $\{(x_n, u_n)\}$ همگرا به

$(x_\circ, u_\circ)$ است لذا دنباله $\{v_n\}$ وجود دارد به‌طوری که $v_n \in K(x_n, u_n)$ و v_n همگرا به v است.

حال با توجه به (۲.۳) برای هر$v \in K(x_\circ, u_\circ)$ داریم

$$\langle t_n, u_n - v\rangle = \langle t_n, u_n - v_n\rangle + \langle t_n, v_n - v\rangle \leq \epsilon_n + \langle t_n, v_n - v\rangle \qquad (۴.۲)$$

برای $\eta > \circ$ فرض می‌کنیم $N = \{t : \exists t' \in T(x_\circ, u_\circ) : \| t - t' \| < \eta\}$ یک همسایگی از $T(x_\circ, u_\circ)$ باشد. چون نگاشت T در $(x_\circ, u_\circ)$ نیم‌پیوسته بالایی است، یک همسایگی M از $(x_\circ, u_\circ)$ وجود دارد به‌طوری که $T(M) \subseteq N$.

واضح است برای n های به اندازه کافی بزرگ، $(x_n, u_n) \in M$ است و بنابراین دنباله $\{t_n\}$ وجود دارد که برای nهای به اندازه کافی بزرگ $t_n \in T(x_n, u_n)$. در نتیجه دنباله $\{t'_n\}$ وجود دارد به‌قسمی که $t'_n \in T(x_\circ, u_\circ)$ و برای nهای به اندازه کافی بزرگ داریم

$$\| t_n - t'_n \| < \eta \qquad (۵.۲)$$

حال چون نگاشت T در $(x_\circ, u_\circ)$ مقدار فشرده است، یک زیر دنباله $\{t'_{n_k}\}$ از دنباله $\{t'_n\}$ وجود دارد به‌طوری که t'_{n_k} همگرا به $t_\circ$ است و $t_\circ \in T(x_\circ, u_\circ)$. پس زیردنباله $\{t_{n_k}\}$ از دنباله $\{t_n\}$ وجود دارد که بااستفاده از (۵.۲.۲)برای n های به اندازه کافی بزرگ نتیجه می‌گیریم

$$\| t_{n_k} - t_\circ \| \leq \| t_{n_k} - t'_{n_k} \| + \| t'_{n_k} - t_\circ \| < \eta + \| t'_{n_k} - t_\circ \|$$

طبق رابطه فوق برای $\eta > \circ$ داریم t_{n_k} همگرا به $t_\circ$ است.

با داشتن حد زیردنباله در (۴.۲.۲) بدست می آوریم

$$\langle t_\circ, u_\circ - v\rangle \leq \circ \qquad \forall\, v \in K(x_\circ, u_\circ)$$

یکتایی $u_\circ \in S(x_\circ)$ از شرط (۱.۲) نتیجه می‌شود. $\square$

نتیجه ۵.۱.۲. اگر شرایط ۱ و ۲ قضیه فوق برقرار باشد، آن‌گاه $\mathrm{QVI}(x_\circ)$ خوش‌حالت است اگر و تنها اگر

$$S(x_\circ) \neq \varnothing$$

و

$$\operatorname{diam} S(x_\circ, \delta, \epsilon) \longrightarrow \circ \qquad (\delta, \epsilon) \longrightarrow (\circ, \circ).$$

مثال ۶.۱.۲. فرض کنید $X = [-۱, ۱]$ و $Y = A = \mathbb{R}$.

نگاشت‌های مجموعه مقدار $K : X \times Y \longrightarrow ۲^Y$, $T : X \times Y \longrightarrow ۲^Y$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$K(x,u) = \begin{cases} \{\circ\} & u = \circ \\ [\circ, |x|] & u \neq \circ \end{cases} \quad , \quad T(x,u) = \begin{cases} \{-\frac{۱}{۲}\} & u < \circ \\ [-۱, ۱] & u = \circ \\ \{\frac{۱}{۲}\} & u > \circ \end{cases}$$

برای $x_\circ = \circ$ نگاشت T نیم‌پیوسته بالایی با مقادیر فشرده در $\{x_\circ\} \times Y$ و نگاشت K نیم‌پیوسته

پایینی و بسته روی $\{\circ\} \times Y$ است. مشاهده می‌شود که $S(x_\circ) = \{\circ\}$ و

$$S(x_\circ, \delta, \epsilon) = \bigcup_{x \in [-\delta, \delta]} \{u \in [\circ, |x|] \;:\; \langle \frac{۱}{۲}, u - v \rangle \leq \epsilon, \quad \forall v \in [\circ, |x|]\}$$

اگر $\delta \leq ۲\epsilon$، واضح است که برای هر $x \in [-\delta, \delta]$

$$\{u \in [\circ, |x|] \;:\; u - v \leq ۲\epsilon, \forall v \in [\circ, |x|]\} = [\circ, |x|]$$

و بنابراین

$$\bigcup_{x \in [-\delta, \delta]} \{u \in [\circ, |x|] \;:\; \langle \frac{۱}{۲}, u - v \rangle \leq \epsilon, \quad \forall v \in [\circ, |x|]\} = [\circ, \delta]$$

اگر $\delta > ۲\epsilon$، آن‌گاه برای هر $x \in [-\delta, \delta]$

$$\{u \in [\circ, |x|] \quad u - v \leq ۲\epsilon, \quad \forall v \in [\circ, |x|]\} = \begin{cases} [\circ, |x|] & |x| \leq ۲\epsilon \\ [\circ, ۲\epsilon] & |x| > ۲\epsilon \end{cases}$$

و بنابراین

$$\bigcup_{x \in [-\delta, \delta]} \{u \in [\circ, |x|] \;:\; \langle \frac{۱}{۲}, u - v \rangle \leq \epsilon, \quad \forall v \in [\circ, |x|]\} = [\circ, ۲\epsilon]$$

در نتیجه

$$\operatorname{diam} S(x_\circ, \delta, \epsilon) = \min\{\delta, ۲\epsilon\} \longrightarrow \circ, \qquad (\delta, \epsilon) \longrightarrow (\circ, \circ)$$

بنابراین طبق قضیه ۱.۲ $\mathrm{QVI}(x_\circ)$ خوش‌حالت است.

قضیه ۲.۱.۲. *اگر شرطهای ۱ و ۲ قضیه ۱.۱.۲ برقرار باشد و A یک مجموعه فشرده در Y باشد. آن‌گاه $\mathrm{QVI}(x_\circ)$ خوش‌حالت است اگر وتنها اگر جواب یکتا داشته باشد.*

اثبات. یک طرف اثبات واضح است.

اثبات عکس، فرض کنید $\bar{u}$، جواب یکتای $\mathrm{QVI}(x_\circ)$ باشد یعنی $S(x_\circ) = \{\bar{u}\}$.

هرگاه $\{u_n\}$ دنباله تقریبی برای $\mathrm{QVI}(x_\circ)$ باشد چون A یک مجموعه فشرده است، دنباله $\{u_n\}$ یک زیردنباله $\{u_{n_k}\}$ دارد که همگرا به یک نقطه $u_\circ \in A$ است. از این که K یک نگاشت بسته روی $\{x_\circ\} \times Y$ است نتیجه می گیریم $u_\circ \in K(x_\circ, u_\circ)$ است.

با توجه به روند اثبات در قضیه (۱.۱.۲) می‌توان نشان داد $u_\circ \in S(x_\circ)$ به این ترتیب $u_\circ$ بر $\bar{u}$ منطبق می شود.

از یکتایی جواب نتیجه می گیریم هر زیردنباله، همگرا به حد یکتای $\bar{u}$ است و بنابراین کل دنباله $\{u_n\}$ همگرا به $\bar{u}$ می شود. و این خوش‌حالتی $\mathrm{QVI}(x_\circ)$ را نشان می دهد. $\square$

مثال ۷.۱.۲. فرض کنید $X = Y = \mathbb{R}$ و $A = [\circ, ۱]$.

نگاشت‌های مجموعه مقدار $K : X \times Y \longrightarrow ۲^Y$, $T : X \times Y \longrightarrow ۲^Y$ را به‌صورت زیر

تعریف می‌کنیم

$$K(x,u)=\begin{cases}[0,1] & u<0\\ [\sqrt{u},1] & 0\leq u<1\\ [\frac{1}{u},1] & u\geq 1\end{cases}\quad,\quad T(x,u)=\begin{cases}[-1+x,1+x] & u=1\\ \{x^2-1\} & u\neq 1\end{cases}$$

برای $x_0=0$ نگاشت T نیم‌پیوسته بالایی با مقادیر فشرده روی $\{x_0\}\times Y$ و Kنیم‌پیوسته پایینی و بسته روی $\{x_0\}\times Y$ است. واضح است که $S(x_0)=\{1\}$ بنابراین جواب یکتاست. مجموعه A نیز فشرده است، درنتیجه$\mathrm{QVI}(x_0)$ خوش‌حالت است.

۳.۱.۲ خوش‌حالتی به مفهوم تعمیم یافته برای مسئله $\mathrm{QVI}(x_0)$

تعریف ۸.۱.۲. هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد

الف) مجموعه جواب $S(x_0)$ از $\mathrm{QVI}(x_0)$غیرتهی باشد،

ب) هر دنباله تقریبی دارای یک زیردنباله همگرا به یک نقطه از$S(x_0)$ باشد،

مسئله $\mathrm{QVI}(x_0)$ به مفهوم تعمیم‌یافته خوش‌حالت نامیده‌می‌شود.

تذکر ۹.۱.۲. خوش‌حالتی به مفهوم تعمیم‌یافته ایجاب می‌کند که مجموعه جواب $S(x_0)$ از $\mathrm{QVI}(x_0)$ یک مجموعه فشرده‌ی غیرتهی باشد.

زیرا به روشنی مشاهده می‌شود که هر دنباله $\{w_n\}$ در $S(x_0)$ یک دنباله تقریبی با $x_n=x_0$