بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شیراز

دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض(آنالیز)

بردهای عددی عملگرهای پوچ توان

توسط:

مریم موسوی

استاد راهنما:

دکتر عبدالعزیز عبدالهی

اسفند ۱۳۸۷

به نام خدا

اظهارنامه

اینجانب ......مریم موسوی ...... (۸۵۰۸۸۶)دانشجوی رشته‌ی ریاضی محض گرایش ...... آنالیز ...... دانشکده‌ی.......... علوم .... اظهارمی‌کنم که این پایان نامه حاصل پژوهش خودم بوده و در جاهایی که از منابع دیگران استفاده کرده‌ام، نشانی دقیق و مشخصات کامل آن را نوشته‌ام، همچنین اظهارمی‌کنم که تحقیق و موضوع پایان نامه‌ام تکراری نیست و تعهد می‌نمایم که بدون مجوز دانشگاه دستاوردهای آن را منتشر ننموده و یا در اختیار غیر قرار ندهم. کلیه حقوق این اثر مطابق با آیین‌نامه مالکیت فکری و معنوی متعلق به دانشگاه شیراز است.

نام ونام خانوادگی: مریم موسوی
تاریخ و امضا:

۸۸/۴/۶

به نام خدا

بردهای عددی عملگرهای پوچ توان

به وسیله‌ی:

مریم موسوی

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی

از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته‌ی:

ریاضی محض

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: ....عالی.............

دکتر عبدالعزیز عبدالهی، دانشیار بخش ریاضی (رئیس کمیته)..........................

دکتر کریم هدایتیان، دانشیار بخش ریاضی ....

دکتر محسن تقوی، دانشیار بخش ریاضی ....

اسفند ماه ۱۳۸۷

تقدیم به:

پدر بزرگوار و مادر مهربانم

که تمام هستی و تلاشم را مدیون وجودشان هستم، در تار و پود زندگیم جای داشته و بهانه های زیبای زندگیم هستند

و

تمام کسانی که دوستشان دارم و وجودشان به من گرمی می بخشد

سپاسگزاری

سپاس و ثنا یگانه خالقی را که ذرات وجودم از جوشش مهرش جان می گیرد او که یگانه ترین در عظمت، تنهاترین در اوج و پاک ترین در وجود است.

اکنون که به یاری خداوند توانا توانستم این رساله را به پایان برسانم، بر خود لازم می دانم از کلیه سروران و عزیزانی که در به اتمام رساندن این رساله مرا مورد لطف و عنایت خویش قرار داده‌اند کمال تشکر و قدردانی را بنمایم. خصوصاً از استاد راهنمای دلسوز و بزرگوارم جناب آقای *دکتر عبدالعزیز عبدالهی* به خاطر زحمتهای بی دریغ و راهنماییهای دلگرم کننده و نیز از آقایان دکتر کریم هدایتیان و دکتر محسن تقوی به خاطر حضور در جلسه‌ی دفاعیه و جناب آقای دکتر مجید ارشاد نماینده تحصیلات تکمیلی سپاسگزارم.

همچنین وظیفهٔ خود می دانم سپاس صمیمانه‌ام را تقدیم جناب آقای دکتر حیدری نمایم که همواره و بی دریغ مرا مرهون راهنماییها و الطافشان قرار دادند.

در پایان سپاسی بی شائبه دارم از خانواده مهربانم که همواره حامی و مشوق اصلی من در تمام دوران تحصیل بوده‌اند و موفقیت خویش را مرهون زحمات بی‌دریغ و حمایتهای عاشقانه ایشان می‌دانم.

مریم موسوی

اسفند ۱۳۸۷

چکیده

بردهای عددی عملگرهای پوچ توان

بوسیله‌ی:

مریم موسوی

به ازای هر عملگر A روی فضای هیلبرت، برد عددی، شعاع عددی و فاصله از مبدأ تا مرز برد عددی را به ترتیب، به صورت $W(A) = \{\langle Ax, x\rangle : x \in \mathcal{H}, ||x|| = ۱\}$، $w(A) = \sup\{|z| : z \in W(A)\}$ و $w_\circ(A) \equiv dist(\circ, \partial W(A))$، تعریف می کنیم. اولین بار در سال ۲۰۰۸ در مقاله [۸] ثابت شده است که اگر $A^n = \circ$، آنگاه $w(A) \leq (n-۱)\, w_\circ(A)$، و علاوه براین، اگر A شعاع عددی‌اش را بگیرد به این معنی که بردار یکه x وجود داشته باشد به قسمی که $|\langle Ax, x\rangle| = w(A)$، آنگاه شرایط زیر با هم معادلند: (۱) $w(A) = (n-۱)w_\circ(A)$، (۲) A به طور یکانی هم ارز با یک عملگر به صورت $aA_n \oplus A'$ است که a اسکالر و در $|a| = ۲w_\circ(A)$ صدق می کند، A_n ماتریس $n \times n$، $\begin{bmatrix} \circ & ۱ & \dots & ۱ \\ & \circ & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & ۱ \\ & & & \circ \end{bmatrix}$ و A' یک عملگر است.

(۳) $W(A) = bW(A_n)$ برای بعضی اسکالر b.

در این پایان نامه ضمن بررسی مقاله [۸]، شکل کلی برد عددی $W(A_n)$ را مشخص نموده و نتایج بدست آمده را به جبرهای C^* تعمیم می دهیم.

فهرست

فصل ۱

قضایا و برخی مفاهیم مقدماتی

۱ — قضایا و برخی مفاهیم مقدماتی

دراین فصل برخی قضایا و مفاهیم مقدماتی نظیر فضای هیلبرت، برد عددی، عملگر درجه دوم و گسترش یافته توانی را یادآوری کرده و برخی از قضایا را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

۱—۱ فضای هیلبرت

فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان $\mathcal{F}$ باشد. یک نیم ضرب داخلی روی X یک تابع

$$U : X \times X \longrightarrow \mathcal{F}$$

است، به طوری که به ازای $x, y, z \in X$ و $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ داشته باشیم:

$$U\left(\alpha x + \beta y, z\right) = \alpha U\left(x, z\right) + \beta U\left(y, z\right); \qquad (۱—۱)$$

$$U\left(x, \alpha y + \beta z\right) = \overline{\alpha} U\left(x, y\right) + \overline{\beta} U\left(x, z\right); \qquad (۲—۱)$$

$$U\left(x, x\right) \geq ٠; \qquad (۳—۱)$$

$$U\left(x, y\right) = \overline{U\left(y, x\right)}. \qquad (۴—۱)$$

تعریف ۱.۱. یک ضرب داخلی روی X، یک نیم ضرب داخلی است، به طوری که $U(x,x) = \circ$ ایجاب کند که $x = \circ$.

توجه ۲.۱. ضرب داخلی را با نماد $\langle \cdot,\cdot \rangle$ نمایش می دهیم، به عبارت دیگر

$$\langle x, y\rangle = U\left(x, y\right).$$

برای $x \in X$، نرم x که با نماد $||x||$ نمایش داده می شود به صورت زیر تعریف می شود.

$$||x|| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$$

فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ یک فضای برداری $\mathcal{H}$ روی میدان $\mathcal{F}$ همراه با ضرب داخلی $\langle \cdot,\cdot \rangle$ است که متر روی این فضا توسط این ضرب داخلی به صورت زیر تعریف می شود

$$d\left(x, y\right) = ||x - y||.$$

قضیه ۳.۱. (**نامساوی کوشی [۱]– شوارتز [۲]**)

اگر $\langle \cdot,\cdot \rangle$ نیم ضرب داخلی روی فضای برداری X باشد. آنگاه به ازای هر $x, y \in X$،

$$|\left\langle x, y\right\rangle|^{2} \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle,$$

علاوه براین، حالت تساوی اتفاق می افتد اگر و فقط اگر اسکالر های ناصفر α و β وجود داشته باشند به طوری که

$$\langle \beta x + \alpha y, \beta x + \alpha y\rangle = \circ.$$

[۱] Cauchy
[۲] Schwarz

اثبات: مراجعه شود به [۵]. ■

تعریف ۴.۱. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت و $f, g \in \mathcal{H}$. می گوییم بردارهای f و g برهم عمودند هر گاه $\langle f, g\rangle = ۰$ و آن را با نماد $f \perp g$ نمایش می دهیم.

تعریف ۵.۱. (مجموعه محدب) فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان $\mathcal{F}$ باشد. $A \subseteq X$ را محدب گوییم هر گاه به ازای هر $x, y \in A$ و $۰ \leq t \leq ۱$،

$$tx + (۱ - t)\, y \in A.$$

تعریف ۶.۱. (تابع تصویر عمودی) فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت و $\mathcal{M}$ یک زیر فضای خطی بسته از $\mathcal{H}$ باشد. تابع $P : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{M}$ که به ازای هر $h \in \mathcal{H}$ عنصری از $\mathcal{M}$ که با نماد Ph نمایش می دهیم را مشخص می کند که $h - Ph \perp \mathcal{M}$، تابع تصویر عمودی روی $\mathcal{M}$ نامیده می شود.

قضیه ۷.۱. فرض کنید $\mathcal{M}$ یک زیر فضای خطی بسته از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$، $h \in \mathcal{H}$ و فرض کنید Ph نقطه یکتا در $\mathcal{M}$ باشد به طوری که $h - Ph \perp \mathcal{M}$. آنگاه

(الف) P یک تبدیل خطی روی $\mathcal{H}$ است.

(ب) $||Ph|| \leq ||h||$ برای هر $h \in \mathcal{H}$.

(ج) $P^۲ = P$ (که $P^۲$ منظور ترکیب P با خودش است).

(د) $\ker P = \mathcal{M}^{\perp}$ و $\mathrm{ran}P = \mathcal{M}$.

اثبات: مراجعه شود به [۵]. ■

تعریف ۸.۱. یک زیر مجموعه متعامد یکه از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ یک مجموعه E است که دارای خواص زیر است:

۱) به ازای هر $e \in E$، $||e|| = ۱$؛

۲) اگر $e_۱, e_۲ \in E$ و $e_۱ \neq e_۲$ آنگاه $e_۱ \perp e_۲$.

تعریف ۹.۱. تابعک خطی $L : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{F}$ را **کراندار** گوییم هرگاه ثابت $c > ۰$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $h \in \mathcal{H}$،

$$|L(h)| \leq c||h||.$$

قضیه ۱۰.۱. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت و $L : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{F}$ یک تابعک خطی باشد. در این صورت عبارت‌های زیر معادل‌اند:

(۱) L پیوسته است؛

(۲) L در صفر پیوسته است؛

(۳) L در بعضی از نقاط پیوسته است؛

(۴) L کراندار است.

اثبات: مراجعه شود به [۵]. ■

توجه ۱۱.۱. تابعک خطی L کراندار است اگر وفقط اگر پیوسته باشد.

فرض کنید L یک تابعک خطی و کراندار باشد. فرض کنید

$$||L|| = \sup\{|L(h)| : ||h|| \leq ۱\},$$

اگر $||L|| < \infty$ آن را نرم L می‌گوییم.

تعریف ۱۲.۱. فرض کنید A یک عملگر خطی کراندار روی فضای هیلبرت مختلط $\mathcal{H}$ باشد. A را **مثبت** گوییم، اگر به ازای هر $h \in \mathcal{H}$، $\langle Ah, h\rangle \geq \circ$. و آن را با نماد $A \geq \circ$ نشان می دهیم.

تعریف ۱۳.۱. فرض کنید $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ فضاهای هیلبرت باشند، یک **یکریختی** بین $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ یک نگاشت پوشای خطی

$$U : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K}$$

است به طوری که به ازای هر $h, g \in \mathcal{H}$،

$$\langle Uh, Ug\rangle = \langle h, g\rangle .$$

در این حالت گفته می شود H و $\mathcal{K}$ یکریخت هستند.

تبصره ۱۴.۱. نگاشت $U : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K}$، را طولپا می گوییم اگر $||Uh|| = ||h||$.

تعریف ۱۵.۱. فرض کنید A و B به ترتیب عملگر های خطی کراندار روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ باشند، A و B به طور **یکانی معادلند**، اگر یک یکریختی

$$U : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K}$$

وجود داشته باشد به طوری که $UAU^{-۱} = B$، و آن را با نماد $A \cong B$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱۶.۱. فرض کنید $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ فضای هیلبرت باشند، جمع مستقیم فضاهای $\mathcal{H}$، $\mathcal{K}$ و ضرب داخلی روی آنها را، به ترتیب، به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\mathcal{H} \oplus \mathcal{K} = \{h \oplus k : h \in \mathcal{H}, k \in \mathcal{K}\},$$

و

$$\langle h_1 \oplus k_1, h_2 \oplus k_2 \rangle \equiv \langle h_1, h_2 \rangle + \langle k_1, k_2 \rangle .$$

تعریف ۱.۱۷. اگر $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots$ فضاهای هیلبرت باشند، فرض کنید

$$\mathcal{H} = \{(h_n)_{n=1}^{\infty} : h_n \in \mathcal{H}_n \quad \text{به ازای همه } n \text{ ها} ; \sum_{n=1}^{\infty} \| h_n \|^2 < \infty\};$$

در این صورت فضای $\mathcal{H}$ را **مجموع مستقیم** $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots$ می گوییم، و آن را به صورت

$$\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \cdots .$$

نمایش می دهیم.

تعریف ۱.۱۸. فرض کنید $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ فضای هیلبرت باشند، تابع

$$U : \mathcal{H} \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{F}$$

را نیم خطی می گوییم، اگر به ازای هر $h, g \in \mathcal{H}$، $k, f \in \mathcal{K}$ و $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$،

(۱) $U\,(\alpha h + \beta g, k) = \alpha U\,(h, k) + \beta U\,(g, k)$؛

(۲) $U\,(h, \alpha k + \beta f) = \overline{\alpha} U\,(h, k) + \overline{\beta} U\,(h, f)$.

قضیه ۱.۱۹. فرض کنید $U : \mathcal{H} \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{F}$، یک نیم خطی کراندار باشد. آنگاه عملگر های خطی کراندار A، از $\mathcal{H}$ به $\mathcal{K}$ و B، از $\mathcal{K}$ به $\mathcal{H}$ وجود دارند به طوری که

$$U(h, k) = \langle Ah, k \rangle = \langle h, Bk \rangle .$$

B را الحاقی A می گوییم و آن را با A^* نشان می دهیم.

اثبات: مراجعه شود به [۵]. ∎

تعریف ۲۰.۱. فرض کنید A یک عملگر خطی کراندار روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد A را خود الحاق یا هرمیتی گوییم، اگر $A = A^*$.

گزاره ۲۱.۱. فرض کنید A عملگر خطی کراندار روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، در نتیجه

$$||A|| = ||A^*|| = ||A^*A||^{\frac{1}{2}}.$$

اثبات: مراجعه شود به [۵]. ∎

گزاره ۲۲.۱. فرض کنید A یک عملگر خطی کراندار روی فضای هیلبرت مختلط $\mathcal{H}$ باشد، A هرمیتی است اگر وفقط اگر به ازای هر $h \in \mathcal{H}$، $\langle Ah, h\rangle \in \mathbb{R}$.

اثبات: مراجعه شود به [۵]. ∎

نتیجه ۲۳.۱. اگر $A = A^*$ و به ازای هر $h \in \mathcal{H}$، $\langle Ah, h\rangle = 0$ آنگاه $A = 0$.

اثبات: مراجعه شود به [۵]. ∎

تعریف ۲۴.۱. فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان $\mathcal{F}$ باشد.

تابع $P : X \longrightarrow [0, +\infty)$ را تابع نرم می‌گوییم هرگاه:

(۱) $P(x, y) \leq P(x) + P(y)$، به ازای هر $x, y \in X$؛

(۲) $P(\alpha x) = |\alpha| P(x)$، به ازای هر $x \in X$ و $\alpha \in \mathcal{F}$؛

(۳) اگر $P(x) = 0$ آنگاه $x = 0$.

توجه ۲۵.۱. معمولاً نرم را با نماد $||\cdot||$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۲۶.۱. فضای نرم‌دار زوج $(X, \|\cdot\|)$ است، جایی که X یک فضای برداری و $\|\cdot\|$ نرم روی X است.

تبصره ۲۷.۱. هر فضای باناخ یک فضای خطی نرم دار است که با متر تعریف شده به وسیله‌ی نرمش تام است. هر فضای هیلبرت یک فضای باناخ است.

تعریف ۲۸.۱. فرض کنید X یک فضای برداری و $A \subseteq X$ باشد، اشتراک همه مجموعه های محدب شامل A را **غلاف محدب** A گوییم و آن را با $CO(A)$ نشان می دهیم.

تعریف ۲۹.۱. فرض کنید $\{M_i\}$ یک گردایه از زیر فضاهای دو به دو متعامد از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. آنگاه

$$\oplus_i M_i \equiv \bigvee_i M_i.$$

که در آن $\bigvee_i$ نشان دهنده‌ی ترکیب خطی [۳] M_i ها است.

تعریف ۳۰.۱. فرض کنید $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ زیر فضاهای خطی بسته از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشند.

$$\mathcal{M} \ominus \mathcal{N} \equiv \mathcal{M} \cap \mathcal{N}^{\perp},$$

را **تفاضل متعامد** $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ می نامیم.

تبصره ۳۱.۱. برای $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{H}$، $\mathcal{N}^{\perp}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\mathcal{N}^{\perp} \equiv \{f \in \mathcal{H} : f \perp g \quad \text{برای هر } g \in \mathcal{N}\}.$$

[۳] linear span

تعریف ۳۲.۱. فرض کنید A یک عملگر خطی کراندار روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$، و $\mathcal{M}$ یک زیر فضای خطی بسته از $\mathcal{H}$ باشد. دراین صورت $\mathcal{M}$ زیر فضای ناوردا برای A است اگر به ازای $h \in \mathcal{M}$، $Ah \in \mathcal{M}$. به عبارت دیگر اگر $A\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$.

تعریف ۳۳.۱. فرض کنید A یک عملگر خطی کراندار روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$، و $\mathcal{M}$ یک زیر فضای خطی بسته از $\mathcal{H}$ باشد. دراین صورت $\mathcal{M}$ را زیر فضای **تحویل یافته** برای A گوییم اگر $A\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$ و $A\mathcal{M}^{\perp} \subseteq \mathcal{M}^{\perp}$.

تبصره ۳۴.۱. اگر $\mathcal{M}$ یک زیر فضای خطی بسته از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$.

تبصره ۳۵.۱. فرض کنید $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ فضای‌های هیلبرت باشند. مجموعه‌ای از همه عملگر های خطی کراندار از $\mathcal{H}$ به $\mathcal{K}$ را با $\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$، نشان می دهیم. اگر $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ از نماد $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ به جای $\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{H})$، استفاده می کنیم.

تبصره ۳۶.۱. فرض کنید A عملگر خطی کراندار روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. پس A را می توان به صورت ماتریس $\begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix}$ نمایش داد، که در آن $W \in \mathcal{B}(\mathcal{M}), X \in \mathcal{B}(\mathcal{M}^{\perp},\mathcal{M}), Y \in \mathcal{B}(\mathcal{M},\mathcal{M}^{\perp})$ و $Z \in \mathcal{B}(\mathcal{M}^{\perp})$.

گزاره ۳۷.۱. فرض کنید A یک عملگر خطی کراندار روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$، و $\mathcal{M}$ یک زیر فضای خطی بسته از $\mathcal{H}$ باشد و $P = P_{\mathcal{M}}$. آنگاه شرایط زیر با هم معادلند:

(۱) $\mathcal{M}$ به ازای A ناوردا است،

(۲) $PAP = AP$،

(۳) در $\begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix}$، $Y = 0$.

همچنین شرایط زیر نیز باهم معادلند:

(۴)$\mathcal{M}$ تحویل یافته A است؛

(۵) در $\begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix}$، $X = 0$ و $Y = 0$؛

(٦)$\mathcal{M}$ به ازای A و A^* ناوردا است.

اثبات: مراجعه شود به [۵]. ■

تعریف ۳۸.۱. فرض کنید A یک عملگر خطی کراندار روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. اسکالر λ یک مقدار ویژه A است، اگر $\ker(A-\lambda) \neq 0$.

تعریف ۳۹.۱. فرض کنید A یک عملگر خطی کراندار روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. اگر h یک بردار ناصفر در $\ker(A-\lambda)$ باشد، h را یک بردار ویژه برای λ می نامیم. بنابراین $Ah = \lambda h$.

تعریف ۴۰.۱. عدد مختلط z یک مقدار ویژه تحویل یافته عملگر A است، اگر $Ax = zx$ و برای بعضی بردار ناصفر x، $A^*x = \bar{z}x$.

تعریف ۴۱.۱. فرض کنید A یک عملگر خطی کراندار روی فضای هیلبرت مختلط $\mathcal{H}$ باشد. مجموعهٔ

$$\sigma(A) \equiv \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{است معکوس ناپذیر } A-\lambda I\},$$

را طیف A می گوییم.