دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

کنترل بهینه‌ی سیستم‌های خطی با محدودیت‌های نامساوی با استفاده از توابع ترکیبی چبیشف–بلاک‌پالس

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی (کاربردی)

مریم محمودی

اساتید راهنمای پایان‌نامه

دکتر حمیدرضا مرزبان
دکتر محمدتقی جهاندیده

۱۳۸۸

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی (کاربردی) خانم مریم محمودی

تحت عنوان

کنترل بهینه‌ی سیستم‌های خطی با محدودیت‌های نامساوی با استفاده از توابع ترکیبی چبیشف–بلاک‌پالس

در تاریخ ۱۸ فروردین ماه ۱۳۸۸ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱– استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر حمیدرضا مرزبان
۲– استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر محمدتقی جهاندیده
۳– استاد داور ۱	دکتر فرید شیخ‌الاسلام (دانشکده برق و کامپیوتر دانشگاه صنعتی اصفهان)
۴– استاد داور ۲	دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده — دکتر رسول نصر اصفهانی

فهرست مطالب

چکیده

در این پایان‌نامه، دو روش عددی برای حل مسائل کنترل بهینه‌ی خطی با تابعی معیار درجه‌ی دو با محدودیت نامساوی روی متغیرهای کنترل و حالت ارائه شده است. روش اول مبتنی بر توابع ترکیبی چبیشف—بلاک‌پالس است که یک روش عددی جدید می‌باشد. در این روش با استفاده خواص توابع ترکیبی و ماتریس‌های عملیاتی انتگرال و حاصل‌ضرب، مسأله‌ی کنترل بهینه به یافتن جوابی برای دسته‌ای از معادلات جبری تبدیل می‌شود. روش دوم بر مبنای روش چبیشف طیفی است که توسط جادو[1] ارائه شده است. در این روش مسأله‌ی کنترل بهینه به یک مسأله برنامه‌ریزی درجه‌ی دو استاندارد تبدیل می‌شود. در پایان به منظور نشان دادن کارایی و دقت روش جدید ارائه شده، مقایسه‌ای بین این دو روش صورت گرفته است.

رده‌بندی موضوعی: اولیه: ۹۳C۰۵، ۴۹N۰۵، ۴۹M۱۵. ثانویه: ۴۹M۲۵، ۴۹N۱۰.

کلمات کلیدی: چندجمله‌ای‌های چبیشف، توابع بلاک‌پالس، توابع ترکیبی، کنترل بهینه، محدودیت نامساوی.

[1] Jaddu

فصل ۱

مقدمه

دسته‌ای از مسائل بهینه‌سازی که امروزه مورد توجه بسیاری واقع شده است، مسائل کنترل هستند. هر مسأله‌ی کنترل توسط دو متغیر کنترل و وضعیت بیان می‌شود. بر اساس معلوم یا مجهول بودن این دو متغیر مطالعه‌ی سیستم‌ها، به سه دسته زیر تقسیم می‌شود:

- تحلیل و بررسی سیستم‌ها: در این دسته از مسائل، متغیرهای کنترل به عنوان پارامترهای ورودی در نظر گرفته می‌شوند و متغیرهای وضعیت به دست می‌آیند.
- شناسایی سیستم‌ها: در این دسته هدف، تعیین پارامترهای سیستم است وقتی که ورودی و خروجی مشخص باشند.
- کنترل بهینه‌ی سیستم‌ها: در مسائل مربوط به کنترل بهینه، متغیرهای کنترل و وضعیت هر دو مجهول هستند. هدف در این دسته از مسائل، تعیین کنترل بهینه و مسیر متناظر با آن به گونه‌ای است که تابعی معیار مورد نظر کمینه یا بیشینه شود و همچنین محدودیت‌های مسأله برای آن‌ها برقرار باشند.

در این پایان‌نامه با مسائل مربوط به کنترل بهینه‌ی سیستم‌ها سروکار داریم. ابتدا مروری بر روش‌هایی که برای حل مسائل کنترل بهینه وجود دارد، داریم و سپس روش‌هایی که تا کنون برای نوع خاصی از این مسائل، که مورد نظر ما است، ارائه شده است را بیان می‌کنیم.

در حل مسائل کنترل بهینه با محدودیت‌های خطی و غیرخطی همیشه نمی‌توان با توجه به اصل

حداقل‌یابی پونتریاگن فرمول کلی برای معادله استاندارد هامیلتونین یافت [٦]،[۷]،[۴۲]. روش‌های عددی زیادی برای حل این گونه مسائل تا کنون به کار رفته است. روش‌هایی که برای حل مسائل کنترل بهینه‌ی خطی و غیرخطی به کار می‌روند به طور کلی به دو دسته‌ی روش‌های مستقیم و روش‌های غیرمستقیم تقسیم می‌شوند.

روش‌های عددی که بر مبنای اصل حداقل‌یابی پونتریاگن طرح ریزی می‌شوند روش‌های غیرمستقیم نامیده می‌شوند. روش غیرمستقیم به طور عمده در [۲]، [۳۴]،[۳]، [۸] مورد توجه واقع شده است. به کار بردن اصل حداقل‌یابی پونتریاگن در حل یک مسأله‌ی کنترل بهینه، باعث ایجاد یک مسأله‌ی غیرخطی با شرایط حدی در دو نقطه‌ی مجزای ابتدا و انتها می‌گردد (TPBVP) که با حل آن کنترل بهینه به دست می‌آید. با توجه به این‌که، شرایط مرزی معادلات دیفرانسیل در دو انتهای بازه‌ی انتگرال‌گیری تعریف می‌شوند برای حل چنین مسأله‌ای باید معادلات به دست آمده، توسط الگوریتم‌های سعی و خطا و با انتگرال‌گیری‌های مکرر حل شوند که از نظر محاسباتی بسیار پیچیده هستند و تضمینی برای همگرایی جواب وجود ندارد. علاوه بر آن با تغییر تابعی معیار و محدودیت‌های موجود در مسأله، نوع مسأله‌ی مقدار مرزی نیز تغییر خواهد کرد و برای حل مسائل مختلف به روش‌های عددی متفاوتی نیاز است. بنابراین، یافتن کنترل بهینه برای حل مسائل مختلف توسط روش‌های غیرمستقیم کار پیچیده و دشواری است.

در کنار این روش‌ها، استفاده از روش‌های مستقیم از اهمیت خاصی برخوردار است. روش‌های مستقیم بر پایه‌ی گسسته‌سازی مسأله‌ی کنترل بهینه و حل مسأله‌ی بهینه‌سازی به دست آمده در فضایی با بعد متناهی بنا شده‌اند [۱]،[۱۲]،[۱۵]،[۱۸]،[۱۹]،[۴۱]. ریشه اصلی این روش را می‌توان در کارهای برنولی [1] و اویلر [2] یافت. همچنین، از این روش برای حل مسائل مختلف زیادی که دارای کاربرد در صنعت نیز هستند استفاده شده است [۱]، [۲۳]، [۲۹]،[۳۸].

بریسون [3] در [۷]، روش‌های عددی گوناگونی مثل، روش یافتن اکسترمم‌های همسایه ، روش گرادیان و روش شبه‌خطی سازی مورد بررسی قرار داده است. مهرا و دیویس در[۳۱]، روش گرادیان را برای حل مسائل کنترل بهینه با محدودیت به کار برده‌اند. در[۱۱]، امکان‌پذیری و همگرایی روش گسسته‌سازی اویلر ثابت شده است. در [۱۷] نیز یک روش تقریبی مبتنی بر توابع قطعه‌ای ثابت برای حل مسائل کنترل ارائه شده است.

توابع متعامد نقش بسیار مهمی را در روش مستقیم ایفا می‌کنند. مشخصه‌ی اصلی این روش استفاده از توابع متعامد و ماتریس‌های عملیاتی متناظر با آن‌ها به گونه‌ای است که مسأله‌ی اصلی تبدیل به یک دستگاه معادلات جبری شود و در نهایت این دستگاه به کمک روش‌های عددی حل شود. مثال‌هایی از

[1] Bernouli
[2] Euler
[3] Bryson

توابع متعامد به کار رفته در این روش توابع والش [۱۰]، توابع بلاک‌پالس [۲۱]، چندجمله‌ای‌های لژاندر [۹]، چندجمله‌ای‌های چبیشف [۲۰]، چندجمله‌ای‌های لاگر [۲۲]، سری فوریه [۳۷] و توابع هار [۲۷] می‌باشند.

بسیاری از روش‌هایی که برای حل مسائل کنترل بهینه‌ی بدون محدودیت به کار رفته است، کاملاً موفقیت‌آمیز بوده است. اما با در نظر گرفتن محدودیت‌هایی که به صورت نامعادله مطرح می‌شوند، به دست آوردن جواب تحلیلی و محاسباتی به راحتی امکان‌پذیر نمی‌باشد.
روش‌های طیفی و در میان آن‌ها روش‌های شبه‌طیفی نقش بسیار مهمی در حل عددی مسائل کنترل بهینه‌ی با محدودیت ایفا می‌کنند. در طول دو دهه‌ی اخیر بیشترین تحقیقات روی این روش‌ها انجام شده است. الناگار[۴] و همکاران در [۱۵] و فهرو[۵] و راس[۶] در [۱۶] به ترتیب روش شبه‌طیفی لژاندر و روش چبیشف شبه‌طیفی را برای حل مسائل کنترل بهینه به کار برده‌اند. همچنین جادو در [۲۴] نیز روش چبیشف شبه‌طیفی را برای دسته‌ای خاص از مسائل به کار برده که با روشی که در [۱۶] مورد استفاده واقع شده متفاوت می‌باشد. در واقع جادو با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف و ماتریس‌های عملیاتی مشتق و حاصل‌ضرب به تقریب تابعی معیار و دینامیک سیستم مسائل کنترل بهینه‌ی درجه‌ی دو با محدودیت می‌پردازد و با استفاده از نقاط گوس—لوباتوی چبیشف محدودیت نامساوی مسأله را به دسته‌ای از قیود تبدیل می‌کند. در این صورت مسأله‌ی کنترل بهینه تبدیل به یک مسأله برنامه‌ریزی درجه‌ی دوی مقید می‌شود که آن را با استفاده از روش‌های مجموعه مؤثر حل می‌کند. در فصل ۴ این پایان‌نامه این روش را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در این پایان‌نامه، یک روش عددی جدید با استفاده از توابع ترکیبی چبیشف—بلاک‌پالس را برای حل مسائل کنترل بهینه‌ی خطی درجه‌ی دو با محدودیت ارائه می‌کنیم. ابتدا چگونگی ساخت توابع ترکیبی و سپس بسط یک تابع دلخواه را برحسب این توابع بیان خواهیم کرد. سپس برای به دست آوردن روش حل مسأله‌ی کنترل بهینه‌ی مورد نظرمان به محاسبه‌ی ماتریس‌های عملیاتی متناظر با توابع ترکیبی می‌پردازیم. محدودیت مسأله‌ی کنترل بهینه را نیز با استفاده از متغیرهای کمکی به تساوی تبدیل می‌کنیم. در این روش در نهایت به دسته‌ای از معادلات جبری می‌رسیم که به سادگی می‌توانیم آن را به کمک روش‌های عددی حل کنیم. در [۳۶]، [۳۵] توابع ترکیبی چبیشف—بلاک‌پالس برای حل مسائل حساب تغییرات و آنالیز سیستم‌های تأخیری خاص به کار رفته است، در [۳۰] توابع ترکیبی لژاندر—بلاک‌پالس برای حل مسائل مورد نظر ما به کار رفته است ولی ما در این‌جا، توابع ترکیبی چبیشف—بلاک‌پالس را برای حل مسائل مختلف کنترل بهینه‌ی خطی با محدودیت به کار می‌بریم.

---

[۴] Elnagar
[۵] Fahroo
[۶] Ross

این پایان‌نامه شامل ۵ فصل است.

فصل دوم، به ارائه مفاهیمی از آنالیز، کنترل بهینه، ضرب ماتریسی و تعاریف و ویژگی‌های چندجمله‌ای‌های چبیشف و توابع بلاک‌پالس اختصاص دارد.

در فصل سوم، توابع ترکیبی را معرفی می‌کنیم و سپس ماتریس‌های عملیاتی متناظر با چندجمله‌ای‌های چبیشف و توابع ترکیبی را به دست می‌آوریم. از این ماتریس‌های عملیاتی در تقریب مسائل کنترل بهینه‌ی مورد نظرمان استفاده می‌کنیم.

در فصل چهارم، ابتدا روش‌های طیفی را معرفی کرده و سپس با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف به تقریب دینامیک و تابعی معیار مسأله‌ی کنترل بهینه می‌پردازیم. سپس نامساوی مسأله را با استفاده از نقاط گوس—لوباتوی چبیشف به دسته‌ای از نامساوی‌ها تبدیل می‌کنیم که در این صورت مسأله‌ی کنترل بهینه تبدیل به یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی درجه‌ی دوی مقید می‌شود. مسأله‌ی برنامه‌ریزی حاصل را با استفاده از روش مجموعه مؤثر حل می‌کنیم. در پایان نیز دو مثال با استفاده از این روش حل شده است.

فصل پنجم که بخش اصلی کار را تشکیل می‌دهد، به حل مسائل کنترل بهینه‌ی درجه‌ی دو با محدودیت با استفاده از روش جدید توابع ترکیبی اختصاص دارد که حل این دسته از مسائل کنترل بهینه را با استفاده از روش طیفی در فصل قبل مورد بررسی قرار دادیم. در این فصل ابتدا تقریب مسأله را، با استفاده از توابع ترکیبی و خواص آن‌ها که در فصل سوم مورد بررسی قرار گرفت، بیان می‌کنیم. بدین منظور ابتدا دینامیک مسأله را که یک معادله‌ی دیفرانسیل خطی می‌باشد به یک معادله‌ی جبری تبدیل می‌کنیم. سپس محدودیت‌های نامساوی داده شده را به کمک توابع کمکی به تساوی تبدیل می‌کنیم و شاخص عملکرد سیستم را تقریب می‌زنیم. با این روش مسأله‌ی کنترل بهینه، به یک مسأله‌ی بهینه‌سازی جبری تبدیل می‌شود که با فرآیند تکراری نیوتن به آسانی قابل حل خواهد بود. و در نهایت برای بررسی کارایی، دقت و قابلیت کاربرد روش ارائه شده چند مثال بیان شده است و نتایج به دست آمده را با نتایجی که تا کنون در مقاله‌های مختلف بیان شده است و همچنین با روش مطرح شده در فصل چهار مقایسه می‌کنیم.

در پیوست، برنامه‌های کامپیوتری مسائل حل‌شده در پایان‌نامه ارائه شده است.

فصل ۲

پیش‌نیازها

در این فصل ابتد برخی مفاهیم و تعاریف مورد نیاز را بیان می‌کنیم [۲۸]. در بخش‌های دوم و سوم، به معرفی توابع بلاک‌پالس و چندجمله‌ای‌های چبیشف می‌پردازیم و برخی از ویژگی‌های آن‌ها را که در فصل‌های بعدی به آن‌ها نیاز داریم، معرفی می‌کنیم[۲۵]،[۴]. بخش چهارم به مفاهیمی از کنترل بهینه اختصاص دارد و در آن صورت کلی یک مسأله‌ی کنترل بهینه مطرح شده و با استفاده از تابع هامیلتونین اصل حداقل‌یابی پونتریاگن بیان شده است[۲۶]،[۳۳]. در نهایت در بخش آخر تعریفی از ضرب کرونکر و ماتریس معین مثبت آورده شده است[۵].

۲—۱ فضای هیلبرت

تعریف ۱.۲ فرض کنیم X یک فضای خطی روی میدان F باشد که در آن F میدان اعداد مختلط و یا میدان اعداد حقیقی است. منظور از نرم یک تابع $\| . \|: X \to F$ است به طوری که

۱) به ازای هر $x \in X$، $\| x \| \geq ۰$ و $\| x \| = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$.

۲) به ازای هر $\alpha \in F$ و هر $x \in X$، $\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$.

۳) به ازای هر $x, y \in X$، $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

در این صورت X را فضای خطی نرم‌دار می‌نامیم. به راحتی دیده می‌شود که $d(x,y)=\| x-y \|$ یک متر روی این فضا تعریف می‌کند که به آن فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی x و y می‌گوییم.

تعریف ۲.۲ فضای خطی نرم‌دار X راکامل گوییم، اگر هر دنباله کشی در این فضا به عضوی از X همگرا باشد. هر فضای خطی نرم‌دار کامل را فضای باناخ می‌گوییم.

تعریف ۳.۲ فرض کنیم X یک فضای خطی روی میدان $\mathbb{R}$ باشد، به هر $x,y \in X$ یک عدد حقیقی نسبت می‌دهیم که با (x,y) نشان داده می‌شود و ضرب داخلی نامیده می‌شود به طوری که

- $(x,x) \geq 0$ و $(x,x)=0$ اگر و تنها اگر $x=0$
- $(x,y)=(y,x)$
- $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$
- $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$

تعریف ۴.۲ یک فضای خطی که روی آن ضرب داخلی تعریف شده باشد فضای ضرب داخلی نامیده می‌شود. هر فضای ضرب داخلی کامل را فضای هیلبرت گوییم.

تعریف ۵.۲ دنباله$\{\phi_n\}$ را در فضای ضرب داخلی X متعامد گوییم اگر

$$(\phi_i,\phi_j)=0, \quad \forall i \neq j.$$

این دنباله را متعامد یکه گوییم هرگاه

$$(\phi_i,\phi_j)=\delta_{ij}, \quad \forall i \neq j.$$

قضیه ۶.۲ اگر X یک فضای ضرب داخلی با بعد n باشد و $x_1^*,\ldots,x_n^*$ پایه‌ای متعامد یکه برای X باشند، هر $x \in X$ می‌تواند به صورت

$$x=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^*$$

نوشته شود که در آن $\alpha_i=(x,x_i^*)$.

۲−۲ توابع بلاک‌پالس

تعریف **۷.۲** مجموعه توابع بلاک‌پالس $\phi_i(t)$، $i = ۱, ..., m$، روی بازه‌ی دلخواه $t \in [۰, T)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۵]

$$\phi_i(t) = \begin{cases} ۱ & t \in [\frac{i-۱}{m}T, \frac{i}{m}T) \\ ۰ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases} \qquad (۱-۲)$$

که در آن m یک عدد صحیح و مثبت دلخواه است و نشان دهنده‌ی تعداد زیر بازه‌ها است. i−امین تابع بلاک‌پالس $\phi_i(t)$ فقط دارای یک پالس مربعی با ارتفاع یکه درi−امین زیربازه‌ی $[\frac{i-۱}{m}T, \frac{i}{m}T)$ است. توابع بلاک پالس معمولاً روی بازه‌ی یکه‌ی $[۰, ۱)$ تعریف می‌شوند. با تغییر متغیر $\tau = \frac{t}{T}$، تعریف توابع بلاک پالس روی بازه‌ی $[۰, ۱)$ به صورت زیر به دست می آید

$$\phi_i(\tau) = \begin{cases} ۱ & \tau \in [\frac{i-۱}{m}, \frac{i}{m}) \\ ۰ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases} \qquad (۲-۲)$$

ویژگی‌های توابع بلاک‌پالس

توابع بلاک‌پالس دارای ویژگی‌هایی هستند که در تشکیل ماتریس‌های عملیاتی متناظر با توابع ترکیبی استفاده خواهیم کرد. این ویژگی‌ها عبارتند از

۱) مجزابودن: توابع بلاک پالس نسبت به یکدیگر روی بازه‌ی $[۰, T)$ مجزا هستند. این خاصیت به طور مستقیم از تعریف توابع بلاک‌پالس نتیجه می‌شود.

۲) متعامد بودن: توابع بلاک‌پالس دو به دو بر هم عمود هستند. این خاصیت به طور مستقیم از مجزا بودن توابع بلاک‌پالس نتیجه می‌شود.

۳) کامل بودن: مجموعه توابع بلاک‌پالس در فضای $L^۲[۰, T)$ یک مجموعه‌ی کامل است.

۳−۲ چندجمله‌ای‌های چبیشف

چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول دسته‌ای از چندجمله‌ای‌های متعامد می‌باشند که جواب‌های معادله دیفرانسیل چبیشف

$$(۱ - x^۲)\frac{d^۲y}{dx^۲} - x\frac{dy}{dx} + \alpha^۲ y = ۰, \qquad |x| \leq ۱,$$

می‌باشند و با $T_n(x)$ نشان داده می‌شوند. این چندجمله‌ای‌ها با استفاده از تابع مولد زیر به دست می‌آیند

$$\begin{aligned} g(t,x) &\equiv \frac{1-t^2}{1-2xt+t^2} \\ &= T_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)t^n, \end{aligned}$$

که در آن $|x| \le 1$ و $|t| \le 1$. چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول نسبت به تابع وزن $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ روی بازه‌ی $[-1,1]$ متعامد می‌باشند. به عبارت دیگر

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi\delta_{mn} & m \neq 0, n \neq 0 \\ \\ \pi & m = n = 0. \end{cases} \tag{۲−۳}$$

در ادامه‌ی مطالب از چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول به طور خلاصه به عنوان چندجمله‌ای‌های چبیشف یاد می‌شود.

ویژگی‌های چندجمله‌ای‌های چبیشف

چندجمله‌ای‌های چبیشف دارای چند ویژگی مهم هستند که از آن‌ها در تشکیل ماتریس‌های عملیاتی متناظر با چندجمله‌ای‌های چبیشف و توابع ترکیبی استفاده خواهیم کرد.

الف) مجموعه چندجمله‌ای‌های چبیشف در فضای $L_w^2[-1,1]$ کامل می‌باشند. که در آن w تابع وزن متناظر با این چندجمله‌ای‌ها می‌باشد. بنابراین، این چندجمله‌ای‌ها تشکیل یک پایه برای این فضا می‌دهند.

ب) رابطه‌ی بازگشتی زیر برای چندجمله‌ای‌های چبیشف برقرار می‌باشد

$$\begin{aligned} &T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x, \\ &T_{m+1}(x) = 2xT_m(x) - T_{m-1}(x). \end{aligned} \tag{۲−۴}$$

ج) این چندجمله‌ای‌ها هم‌چنین در معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم

$$(1-x^2)\frac{d^2T_m(x)}{dx^2} - x\frac{dT_m}{dx} + m^2T_m(x) = 0, \tag{۲−۵}$$

صدق می‌کنند.

د) رابطه‌ی حاصل‌ضربی

$$T_m(x)T_n(x) = \frac{1}{2}\Big[T_{m+n}(x) + T_{|m-n|}(x)\Big], \tag{۲−۶}$$

نیز برای چندجمله‌ای‌های چبیشف برقرار می‌باشد.

چندجمله‌ای‌های چبیشف انتقال یافته

با توجه به تعریف چندجمله‌ای‌های چبیشف می‌دانیم که این چندجمله‌ای‌ها روی بازه‌ی $[-1,1]$، تعریف شده و نسبت به تابع وزن $w(t)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$، روی این بازه متعامد می‌باشند. این چندجمله‌ای‌ها را می‌توانیم روی بازه‌ی دلخواه $[\tau_0,\tau_f]$، تعریف کنیم و در این صورت به آن‌ها چندجمله‌ای‌های چبیشف انتقال یافته می‌گوییم. به کمک تبدیل

$$\tau^*=\frac{2(\tau-\tau_0)}{(\tau_f-\tau_0)}-1=\frac{2}{\tau_f-\tau_0}\tau-\frac{\tau_f+\tau_0}{\tau_f-\tau_0}=A\tau+B, \qquad (۲-۷)$$

می‌توان بازه‌ی دلخواه $[\tau_0,\tau_f]$ را به بازه‌ی $[-1,1]$، انتقال داد. قابل ذکر است که تابع وزن متناظر با آن‌ها نیز به بازه‌ی $[\tau_0,\tau_f]$ منتقل می‌شود در این صورت

$$w(\tau)=\frac{1}{\sqrt{(\tau-\tau_0)(\tau_f-\tau_0)}}, \qquad (۲-۸)$$

تابع وزن متناظر با چندجمله‌ای‌های چبیشف انتقال یافته به بازه‌ی $[\tau_0,\tau_f]$ می‌باشد.

تقریب تابع دلخواه با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف

فرض کنیم f یک تابع دلخواه در فضای هیلبرت $L_w^2[-1,1]$ باشد. در این صورت تقریب این تابع بر پایه‌ی چندجمله‌ای‌های چبیشف یک سری نامتناهی است. با قطع این سری، سری متناهی

$$f(x)\simeq\sum_{i=0}^{M-1}\overline{f}_iT_i(x). \qquad (۲-۹)$$

به دست می‌آید. با اعمال شرط کمینه شدن فاصله‌ی این تقریب دلخواه با تابع اصلی f ضرایب $\overline{f}_i$ به ازای هر $i=0,1,\dots,M-1$ از رابطه‌ی

$$\overline{f}_i=\frac{1}{\gamma_i}\int_{-1}^{1}w(x)f(x)T_i(x)dx, \qquad (۲-۱۰)$$

به دست می‌آیند، که در آن

$$\gamma_i=\int_{-1}^{1}w(x)T_i^2(x)dx.$$

۲-۴ مسأله‌ی کنترل بهینه

معادلات وضعیت، محدودیت‌های فیزیکی و شاخص عملکرد (تابعی معیار) اجزای اصلی یک مسأله‌ی کنترل بهینه را تشکیل می‌دهند. در هر مسأله‌ی کنترل بهینه دو متغیر کنترل و وضعیت داریم که به ترتیب با $u(t)$ و $x(t)$ نشان داده می‌شوند.

تعریف ۸.۲ کنترل $u(t)$ را قابل قبول می‌گوییم، اگر در بازه‌ی زمانی $[t_\circ, t_f]$ تمام محدودیت‌های کنترل مسأله برای آن برقرار باشند. مجموعه کنترل‌های قابل قبول را با $\mathcal{U}$ نمایش می‌دهیم و $u \in \mathcal{U}$ به این معنی است که کنترل u قابل قبول است.

تعریف ۹.۲ متغیر وضعیت $x(t)$ را قابل قبول گوییم اگر در طول بازه‌ی $[t_\circ, t_f]$ در محدودیت‌های مسأله صدق کند. مجموعه مسیرهای قابل قبول را با $\mathcal{X}$ نشان می‌دهیم و $x \in \mathcal{X}$ به این معنی است که x یک مسیر قابل قبول است.

شکل کلی مسائل کنترل بهینه به صورت زیر است:

مساله ۱۰.۲ بردار وضعیت $X(t) \in \mathbb{R}^n$ و بردار کنترل $U(t) \in \mathbb{R}^m$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم f تابعی با مشتق پیوسته باشد. هدف از یک مسأله‌ی کنترل بهینه، یافتن کنترل قابل قبول $U^*(t)$ به گونه‌ای است که سیستمی با معادلات وضعیت

$$\dot{X}(t) = f(X(t), U(t), t), \tag{۲-۱۱}$$

و شرط اولیه‌ی $X(t_\circ) = X_\circ$ ، مسیر قابل قبول $X^*(t)$ را طی نموده و تابعی معیار

$$J = h(X(t_f), t_f) + \int_{t_\circ}^{t_f} g(X(t), U(t), t)dt, \tag{۲-۱۲}$$

را کمینه نماید. در این صورت $U^*(t)$ کنترل بهینه و $X^*(t)$ مسیر بهینه هستند.

فرض کنیم $U^*(t)$ کنترل بهینه‌ی متناظر با مسأله‌ی کنترل بهینه‌ی فوق باشد. در این صورت $U^*(t)$ باعث کمینه‌شدن شاخص عملکرد می‌شود. به عبارت دیگر برای هر $U(t) \in \mathcal{U}$ و هر $X(t) \in \mathcal{X}$ داریم

$$\begin{aligned} J^* &= h(X^*(t_f), t_f) + \int_{t_\circ}^{t_f} g(X^*(t), U^*(t), t)dt \\ \leq J &= h(X(t_f), t_f) + \int_{t_\circ}^{t_f} g(X(t), U(t), t)dt. \end{aligned}$$

این رابطه بیانگر این نکته است که کنترل بهینه‌ی $U^*(t)$ باعث کمینه‌شدن تابعی معیار نسبت به هر کنترل و هر مسیر قابل قبول دیگری می‌شود. بنابراین هدف، به دست آوردن یک کمینه مطلق است.

برای به دست آوردن شرایط لازم برای بهینگی مسأله‌ی ۱۰.۲ تابع هامیلتونین را به صورت زیر تعریف می‌کنیم[۲۶]

$$\mathcal{H}(t, X(t), U(t), \lambda(t)) = g(X(t), U(t), t) + \lambda^T(t)\Big[f(X(t), U(t), t)\Big],$$

که در آن $\lambda(t)$، بردار ضرایب لاگرانژ است. با توجه به این تعریف، شرایط لازم برای بهینگی مسأله‌ی ۱۰.۲ به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \dot{X}^*(t) &= \frac{\partial}{\partial \lambda}\mathcal{H}(t, X^*(t), U^*(t), \lambda^*(t)), \\ \dot{\lambda}^*(t) &= \frac{\partial}{\partial X}\mathcal{H}(t, X^*(t), U^*(t), \lambda^*(t)), \qquad\qquad t \in [t_\circ, t_f] \\ \circ &= \frac{\partial}{\partial U}\mathcal{H}(t, X^*(t), U^*(t), \lambda^*(t)), \end{aligned}$$

و

$$\Big[h_X(t_f, X^*(t_f)) - \lambda^*(t_f)\Big]^T \delta X_f + \Big[\mathcal{H}(t_f, X^*(t_f), U^*(t_f), \lambda^*(t_f)) + h_t(t_f, X^*(t_f))\Big]\delta t_f = \circ,$$

که در آن δX_f و δt_f، بیانگر تغییرات X و t هستند.

اصل حداقل‌یابی پونتریاگن:

شرط لازم برای این که $U^*(t)$ شاخص عملکرد J را کمینه کند این است که به ازای هر $t \in [t_\circ, t_f]$ و تمام کنترل‌های قابل قبول داشته باشیم

$$\mathcal{H}(X^*(t), U^*(t), \lambda^*(t), t) \leq \mathcal{H}(X^*(t), U(t), \lambda^*(t), t)$$

این معادله که بیان کننده‌ی این مطلب است که یک کنترل قابل قبول باید هامیلتونین را کمینه کند، به اصل حداقل‌یابی پونتریاگن معروف است. توجه به این نکته ضروری است که این شرط لازم برای بهینگی است. اگر چه هر کنترل بهینه باید در اصل حداقل‌یابی پونتریاگن صدق کند، ممکن است کنترل‌هایی وجود داشته باشند که با وجود برقراری اصل حداقل‌یابی پونتریاگن، کنترل بهینه نباشند.

یکی از مهم‌ترین مسائل کنترل بهینه، مسأله‌ی کنترل بهینه‌ی خطی با تابعی معیار درجه‌ی دو (LQ) با محدودیت‌های نامساوی است. شکل کلی این‌گونه مسائل به صورت زیر است:

سیستم متغیر با زمان

$$\dot{X}(t) = E(t)X(t) + F(t)U(t),$$

$$X(\circ) = X_\circ,$$

$$X(t_f) = X_f,$$

را با محدودیت

$$G(t)X(t) + H(t)U(t) \leq r(t),$$

در نظر می‌گیریم که در آن $X(t) \in \mathbb{R}^l$، $U(t) \in \mathbb{R}^q$، $E(t)$، $Ft)$، $G(t)$ و $H(t)$ ماتریس‌هایی با ابعاد مناسب، $X_\circ$ و X_f بردارهای ثابت مشخص هستند. همچنین $r(t)$ یک تابع دلخواه است. هدف، یافتن کنترل قابل قبول $U^*(t)$ از مجموعه کنترل‌های قطعه‌ای پیوسته $\mathcal{U}$ و مسیر قابل قبول $X^*(t)$ متناظر با آن است که در رابطه‌های بالا صدق کنند و در ضمن شاخص عملکرد

$$J = \frac{۱}{۲}X^T(t_f)SX(t_f) + \frac{۱}{۲}\int_\circ^{t_f} \Big[X^T(t)Q(t)X(t) + U^T(t)R(t)U(t)\Big]dt,$$

را کمینه نمایند. که در آن T، نشان‌دهنده ترانهاده‌ی ماتریس و S، $Q(t)$ و $R(t)$ ماتریس‌هایی با ابعاد مناسب هستند. همچنین S و $Q(t)$ ماتریس‌های متقارن مثبت نیمه معین و $R(t)$ یک ماتریس متقارن مثبت معین است.

۲–۵ ماتریس‌ها

تعریف ۱۱.۲ اگر $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ به ترتیب ماتریس‌هایی با ابعاد $m \times n$ و $p \times q$ باشند، ضرب کرونکر آن‌ها یک ماتریس $pm \times qn$ است، که با نماد $A \otimes B$ نمایش داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{۱۱}B & a_{۱۲}B & \dots & a_{۱q}B \\ a_{۲۱}B & a_{۲۲}B & \dots & a_{۲q}B \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{p۱}B & a_{p۲}B & \dots & a_{pq}B \end{bmatrix}.$$

تعریف ۱۲.۲ فرض کنید y برداری با مؤلفه‌های حقیقی باشد. در این صورت ماتریس حقیقی متقارن A را مثبت معین گوییم اگر

$$\forall y \neq \circ \quad y^TAy > \circ,$$

و اگر

$$\forall y \quad y^TAy \geq \circ,$$

A را ماتریسی نیمه معین مثبت گوییم.

فصل ۳

توابع ترکیبی و ماتریس‌های عملیاتی متناظر با آن‌ها

در این فصل ابتدا به معرفی توابع ترکیبی می‌پردازیم. هدف از معرفی این توابع، تشکیل دسته‌ای از توابع متعامد می‌باشد که به کمک آن‌ها بتوانیم یک مسأله‌ی کنترل بهینه را تقریب بزنیم و به عبارتی بتوانیم آن را به کمک روش‌های عددی حل کنیم. بدین منظور نیاز به ماتریس‌های عملیاتی خواهیم داشت تا تقریب مسأله کنترل بهینه را تا حد زیادی برای ما راحت‌تر کنند. این ماتریس‌های عملیاتی عبارتند از ماتریس عملیاتی انتگرال، حاصل‌ضرب، انتگرال حاصل‌ضرب و مشتق. از این‌رو ابتدا ماتریس‌های عملیاتی متناظر با چندجمله‌ای‌های چبیشف را به دست می‌آوریم و سپس به کمک آن‌ها ماتریس‌های عملیاتی متناظر با توابع ترکیبی به دست می‌آیند.

۳–۱ تعریف توابع ترکیبی

توابع بلاک‌پالس و چبیشف را در فصل ۲ معرفی کردیم. حال می‌خواهیم این توابع را با یکدیگر ترکیب کرده و ساختار کلی متناظر با آن‌ها را به دست آوریم. بازه‌ی دلخواه $[0,t_f)$ را در نظر می‌گیریم. ابتدا این بازه را به N قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم، در این صورت N زیر بازه‌ی زیر را خواهیم داشت

$$[0,\frac{t_f}{N})\ ,\ [\frac{t_f}{N},\frac{2}{N}t_f)\ ,\ [\frac{2}{N}t_f,\frac{3}{N}t_f)\ ,\ \ldots,\ [\frac{N-1}{N}t_f,t_f).$$

حال در هر یک از این زیر بازه‌ها چندجمله‌ای چبیشف از مرتبه‌ی دلخواه m را در نظر می‌گیریم. بدین منظور ابتدا بازه‌ی $[\frac{n-1}{N}t_f, \frac{n}{N}t_f)$ را با استفاده از رابطه‌ی (۲—۷) را به بازه‌ی $[-1, 1]$ منتقل می‌کنیم. در این صورت با توجه به تعریف توابع بلاک‌پالس، توابع ترکیبی مورد نظر در زیر بازه‌ی n—ام به صورت تابع قطعه‌ای پیوسته‌ی زیر تعریف می‌شود [۳۶]

$$b_{nm}(t) = \begin{cases} T_m(\frac{2N}{t_f}t - 2n + 1) & t \in [\frac{n-1}{N}t_f, \frac{n}{N}t_f) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \tag{۳—۱}$$

توابع ترکیبی به دست آمده را با $b_{nm}(t)$، $n = 1, 2, \ldots, N$، $m = 0, 1, \ldots, M-1$ نشان می‌دهیم. که در آن M مرتبه‌ی چندجمله‌ای چبیشف و N مرتبه‌ی تابع بلاک‌پالس می‌باشد و T_m چندجمله‌ای چبیشف از مرتبه‌ی m است که در رابطه‌ی (۲—۴) صدق می‌کند. در ادامه‌ی مطالب این فصل، N و M به ترتیب مرتبه‌ی توابع بلاک‌پالس و چندجمله‌ای‌های چبیشف می‌باشند. برای روشن شدن بهتر چگونگی ساخت این توابع به ارائه‌ی مثالی می‌پردازیم.

مثال ۱.۳ تعداد بلاک‌ها یعنی $N = 2$ و مرتبه‌ی چندجمله‌ای چبیشف $M = 3$ در نظر می‌گیریم. در این صورت ۶ تابع ترکیبی مورد نظر روی بازه‌ی $[0, 1)$ به صورت زیر خواهند بود.

$$b_{10}(t) = \begin{cases} T_0(4t-1) & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} = \begin{cases} 1 & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$b_{11}(t) = \begin{cases} T_1(4t-1) & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} = \begin{cases} 4t-1 & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$b_{12}(t) = \begin{cases} T_2(4t-1) & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} = \begin{cases} 32t^2 - 16t + 1 & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$b_{20}(t) = \begin{cases} T_0(4t-3) & t \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} = \begin{cases} 1 & t \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$b_{21}(t) = \begin{cases} T_1(4t-3) & t \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} = \begin{cases} 4t-3 & t \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$b_{22}(t) = \begin{cases} T_2(4t-3) & t \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} = \begin{cases} 32t^2 - 48t + 17 & t \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$