**وزارت علوم، تحقیقات و فناوری**
**دانشگاه شهید مدنی آذربایجان**
دانشکده علوم پایه

**پایان نامه**
**جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد**
رشته ریاضی محض

# خمینه های کنموتسو شبه متقارن

استاد راهنما

دکتر اسمعیل عابدی

استاد مشاور

دکتر قربانعلی حقیقت دوست

پژوهشگر

نرگس غفارزاده قویدل

شهریورماه ۱۳۹۱

تبریز - ایران

بسم الله الرّحمن الرّحیم

تقدیم به

مادر مهربانم

و پدر بزرگوارم

پروردگارا...

هرگاه چیزی از تو خواستم ، تو را بخیل نیافتم و چون قصد تو کردم ، تو را گرفته ندیدم بلکه تو را شنوندهٔ دعایم و بخشنده و عطا کنندهٔ خواسته هایم یافتم و در هر حالی از حالاتم و هر زمانی از زمانهایم همیشه و در همه حال ، نعمتهای تو را دربارهٔ خودم فراوان یافتم . پس تو نزد من ستوده هستی و لطف و احسانت پیش من نیك و پسندیده است .

خدایا، همیشه در لحظات سخت زندگیم با خود می‌گویم : شاید این همان آزمایشی باشد که تو در پشت این پردهٔ تاریک می‌خواهی تصویر زیبایی از زندگی برایم بسازی .

پس ای خدای من ،مرا به اندازهٔ توانم بیازما و صبوری بیاموز و از رحمت و دوام توفیق خود ، آنقدر به من ارزانی دار تا آن را نردبان ترقی برای رسیدن به رضا و خشنودی ات قرار دهم و بدین وسیله از عقوبت و عذاب تو ایمن گردم ای مهربانترین مهربانان .

به من کمک کن تا قبول کنم که دانسته‌هایم در مقابل دانش لایتناهی تو ندانستنی بیش نیست و بدانم که دانایی تو بیشتر از آن است که من می‌دانم و آن همه را حتی به اندازهٔ یک قطره جز به یاری تو، دانستن نمی‌توانم.

الهی چون تو حاضری... چه جویم ؟

و چون تو ناظری... چه گویم ؟

## سپاسگزاری

سپاس خدای را که وجودمان را بر پویش، قلممان را بر نگارش و جسممان را بر کوشش واداشت و تلاشمان را فرجام نیکو عنایت فرمود. حمد و سپاس خدای را که معرفت خویش را ارزانی بندگانش نمود تا او را بشناسند و افتخار عبودیت به ساحت قدسی‌اش را اعطاء نمود تا بسوی او تقرب جویند.

تشکر و سپاس از استاد راهنمای ارجمندم، جناب آقای دکتر اسمعیل عابدی که از محضر پر فیض‌شان، بهره برده‌ام.

تقدیر و تشکر از زحمات جناب آقای دکتر قربانعلی حقیقت دوست که افتخار بهره‌مندی از نظرات و مشاورهٔ ایشان را در انجام این پایان‌نامه داشته‌ام.

تشکر و سپاس از جناب آقای دکتر رضا چاوش خاتمی که زحمت نظارت و داوری این پایان‌نامه را تقبل فرموده‌اند.

و با سپاس بیکران ، بوسه می‌زنم بر دستان پدر و مادر عزیزم که توانستم زیر سایهٔ مهربانی و صبوری‌هایشان در راه کسب علم و دانش قدم بردارم وهمچنین تشکر می‌کنم از دو خواهر عزیزم، به پاس کمک‌های بی‌دریغ و دلگرمی‌های بی‌پایانشان، که بهترین پشتیبان من بودند.

نرگس غفارزاده قویدل

شهریور ماه ۱۳۹۱

# فهرست مطالب

# چکیده

در این پایان نامه هدف مطالعهٔ خمینه های کنموتسو با شرایط زیر می باشد :

$$R.R = L_R\, Q(g,R) \ \ , \ \ R.R = L\, Q(S,R) \ \ , \ \ R.W = L_W\, Q(g,W)$$

نشان می دهیم که هر خمینهٔ نیم متقارن ، نیم متقارن ریچی ؛ هر خمینهٔ شبه متقارن ، شبه متقارن ریچی ؛ هر خمینهٔ نیم متقارن ریچی ، شبه متقارن ریچی؛همچنین هر خمینهٔ نیم متقارن وایل ، شبه متقارن وایل است . ولی عکس این احکام درست نیستند .

همچنین نتایج جالبی به صورت زیر به دست می آوریم :

$(i)$هر خمینهٔ کنموتسو $M^n$ و $n \geqslant ۳$ ، یك خمینهٔ شبه متقارن به صورت :

$R.R = -Q(g,R)$ است.

$(ii)$هر خمینهٔ کنموتسو $M^n$ و $n \geqslant ۳$ ،یك خمینهٔ شبه متقارن ریچی به صورت :

$R.S = -Q(g,S)$ است.

$(iii)$هر خمینهٔ کنموتسو $M^n$ و $n \geqslant ۴$ ،یك خمینهٔ شبه متقارن وایل به صورت :

$R.W = -Q(g,W)$ است.

**کلید واژه‌ها :** خمینهٔ ساساکی، خمینهٔ کنموتسو،خمینهٔ شبه متقارن، خمینهٔ شبه متقارن ریچی،خمینهٔ شبه متقارن ریچی تعمیم یافته، خمینهٔ انیشتینی،تانسور خمیدگی همدیس وایل، خمینهٔ شبه متقارن وایل.

# پیشگفتار

در سال ۲۰۰۶ ، $C.Özgüre$ خمینه های کنموتسو شبه متقارن را معرفی می کند .( [۲] )

$U.C, De$ و $G.Pathak$ خمینه‌های کنموتسو با بعد ۳ را مورد بررسی قرار می‌دهند .( [۱۷] )

همچنین $J.B.Jun$ ، $U.C.De$ و $G.Patahak$ خمینه های نیم متقارن ریچی و نیم متقارن وایل را مورد بررسی قرار می‌دهند . ( [۷] )

$S.Hong$ ، $C.Özgüre$ و $M.M.Tripathi$ خمینه های کنموتسو شبه متقارن ریچی را مورد بررسی قرار می‌دهند .( [۱۵] )

در **فصل اول** : تعاریف و قضیه‌های مقدماتی که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد را بیان می‌کنیم.

در **فصل دوم** : خمینه‌های کنتاکت ، ساساکی ، شبه ساساکی ، کنموتسو و $\eta$-انیشتین را معرفی کرده و طی چند قضیه روابط بین آنها را بررسی می کنیم .

در **فصل سوم** : بطور موضعی شبه متقارن بودن را تعریف کرده و رابطهٔ آن با نیم متقارن بودن را بررسی می کنیم و تعدادی از قضایای مربوطه را اثبات می کنیم و سرانجام نتیجه می گیریم که هر خمینهٔ کنموتسو $n$ بعدی و$n \geqslant$ ۳ ،یك خمینهٔ شبه متقارن به صورت $R.R = -Q(g, R)$ است.

در **فصل چهارم** : بطور موضعی شبه متقارن ریچی و شبه متقارن ریچی تعمیم یا فته بودن را تعریف کرده و تعدادی از قضایای مربوطه را اثبات می کنیم و در نهایت نتیجه می گیریم که هر خمینهٔ کنموتسو $n$ بعدی و $n \geqslant$ ۳ ، یك خمینهٔ شبه متقارن ریچی به صورت $R.S = -Q(g, S)$ است.

در **فصل پنجم** : تانسور خمیدگی همدیس وایل و شبه متقارن وایل را تعریف کرده و رابطهٔ شبه متقارن وایل با نیم متقارن وایل بودن را بررسی می کنیم و سرانجام نتیجه می گیریم که هر خمینهٔ کنموتسو $n$ بعدی و $n \geqslant$ ۴ ، یك خمینهٔ شبه متقارن وایل به صورت $R.W = -Q(g, W)$ است.

# فصل ۱

# تعاریف و مفاهیم مقدماتی

## ۱.۱ هندسه ریمانی

**تعریف ۱.۱.** مجموعهٔ تمام بردارهای مماس در نقطه $p$ از خمینهٔ $M$ را**فضای مماس**بر $M$ در نقطه $p$ گوئیم و با $T_pM$ نمایش می دهیم.

**تعریف ۲.۱.** فرض کنید $M$ یک خمینهٔ هموار، $TM$ کلاف مماس آن و $\pi : TM \longrightarrow M$ نگاشت تصویر کلاف مماس باشد.مقصود از یک **میدان برداری** $C^\infty$ روی $M$، نگاشت $C^\infty$ مانند $X : M \longrightarrow TM$ می‌باشد به طوریکه $\pi \circ X = id_M$ . بنابراین $X$ به هر نقطه $x \in M$، عضو $X_x$ از $T_xM$ را نسبت می‌دهد.

**تعریف ۳.۱.** فرض کنید $M$ یک خمینه باشد. مجموعهٔ نگاشت‌های حقیقی $C^\infty$ روی $M$ را با $F(M)$ و مجموعهٔ میدان‌های برداری $C^\infty$ روی $M$ را با $\chi(M)$ نمایش می دهیم. هر یک از این دو مجموعه تحت عمل جمع نگاشت‌ها یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است. ضرب نگاشت‌ها در $F(M)$، این مجموعه را به یک حلقه تبدیل می‌کند. برای $X \in \chi(M)$ و $f \in F(M)$ میدان برداری $fX$ به ازای هر $p \in M$ به صورت $fX(p) = f(p)X(p)$ تعریف می‌شود . بنابراین $\chi(M)$ یک مدول روی $F(M)$ است.

**تعریف ۴.۱.** فرض کنید $V$ یک $K$ -مدول باشد . در اینصورت $V^*$ که مجموعهٔ همهٔ توابع $K$-خطی از $V$ به $K$ می باشد، با عمل جمع توابع و ضرب توسط عناصر حلقهٔ $K$ به یک $K$-مدول تبدیل می‌شود، که **مدول دوگان** $V$ نامیده می‌شود.

**تعریف ۵.۱.** فرض کنید $V_1, \ldots, V_s, W$ مدول‌هایی روی حلقهٔ $K$ باشند . در اینصورت $V_1 \times \ldots \times V_s$ نیز یک مدول روی حلقهٔ $K$ بوده و $A : V_1 \times \ldots \times V_s \longrightarrow W$ را **چند خطی** گوییم هر گاه نسبت به تمام متغیرها خطی باشد . یعنی :

$$\begin{aligned} A(v_1, \ldots, \lambda v_i + \mu v_i, v_{i+1}, \ldots, v_s) &= \lambda A(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_s) \\ &+ \mu A(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_s) \end{aligned}$$

که $\lambda, \mu \in K$ برای $1 \le i \le s$ .

**تعریف ۶.۱.** فرض کنید $V$ فضایی برداری روی میدان $F$ باشد.یك **فرم دو خطی**روی $V$ عبارت است ازتابعی چون $f$ که به هر زوج مرتب از بردارهای $\alpha$ و $\beta$ در $V$ یك اسکالر $f(\alpha, \beta)$ در $F$ تخصیص دهدکه در شرایط زیر صدق کند:

۱- $f(c\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = cf(\alpha_1, \beta) + f(\alpha_2, \beta)$

۲- $f(\alpha, c\beta_1 + \beta_2) = cf(\alpha, \beta_1) + f(\alpha, \beta_2)$

**تعریف ۷.۱.** نگاشت $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک **فرم دو خطی متقارن** روی فضای برداری $V$ گوئیم هرگاه $\mathbb{R}$-دو خطی باشد و به ازای هر $v, w \in V$ داشته باشیم : $b(v, w) = b(w, v)$.

**تعریف ۸.۱.** یک فرم دو خطی متقارن $b$ روی $V$

۱- **مثبت معین** (منفی معین) است هرگاه به ازای هر $v \neq 0$ داشته باشیم : $b(v, v) > 0$ ( $b(v, v) < 0$ ).

۲- **ناتباهیده** است هرگاه $b(v, w) = 0$ به ازای هر $w \in V$ نتیجه دهد : $v = 0$.

**تعریف ۹.۱.** اگر فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی ساخته شده باشد،نگاشت های دوخطی و متقارن مثبت معین را **ضرب داخلی** گوئیم.یعنی:

$$< \ , \ >: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

به طوریکه:

۱- $(< V, V > \geq 0 \quad , (< V, V >= 0 \Longleftrightarrow V = 0)$ (مثبت معین)

۲- $< V, W >=< W, V >$ (متقارن)

**تعریف ۱۰.۱.** فرض کنید $M$ یک خمینهٔ هموار باشد. نگاشت

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

را یک **التصاق** گوئیم هرگاه:

۱- $\nabla_V W$ نسبت به $V$، $F(M)$-خطی باشد:

$$\nabla_{fX_1+gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y \qquad \forall\, f, g \in F(M)$$

۲- $\nabla_V W$ نسبت به $W$، $\mathbb{R}$-خطی باشد:

$$\nabla_X aY_1 + bY_1 = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2 \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$$

۳- در قاعدهٔ ضرب صدق کند:

$$\nabla_V (fW) = (Vf)W + f\nabla_V W \qquad\qquad \forall\, f \in F(M)$$

$\nabla_V W$ را مشتق کواریان $W$ در امتداد $V$ نسبت به التصاق $\nabla$ گوئیم.

**تعریف ۱۱.۱.** روی خمینهٔ ریمانی $M$ یک التصاق منحصربفرد $\nabla$ چنان موجود است که

۱- $T(V, W) = [V, W] - \nabla_V W + \nabla_W V = 0$ ( تانسور تاب$\nabla$صفراست)

۲- $Zg(V, W) = g(\nabla_Z V, W) + g(V, \nabla_Z W)$ ($\nabla$ سازگار با متر ریمانی است )

در اینصورت $\nabla$ را **التصاق لوی-سیویتا**( التصاق ریمانی ) گوئیم. که از فرمولی به نام **فرمول کوزول** بدست می آید:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_Y Z, X) &= Yg(Z, X) + Zg(X, Y) - Xg(Y, Z) \\ &\quad - g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) + g(X, [Y, Z]) \end{aligned}$$

**تعریف ۱۲.۱.** فرض کنید $u^1 \cdots u^n$ مختصات طبیعی $\mathbb{R}^n$ باشند . اگر $V$ و $W = \sum W^i \partial_i$ میدان‌های برداری روی $\mathbb{R}^n$ باشند ، آنگاه میدان برداری $\nabla_V W = \sum V(W^i)\partial_i$ را **مشتق کواریان طبیعی** $W$ نسبت به $V$ گوئیم.

**تعریف ۱۳.۱.** فرض کنید $M$ یک خمینهٔ هموار باشد. میدان برداری $V$ را روی $M$ **موازی** گوئیم هرگاه به ازای هر میدان برداری $X$ روی $M$ داشته باشیم : $\nabla_X V = 0$.

**تعریف ۱۴.۱.** فرض کنید $V$و $W$ میدان های برداری هموار روی خمینهٔ هموار $M$ باشند. **براکت لی** $V$ و $W$ عبارت است از عملگر $[V,W]_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ که به صورت زیر تعریف می شود:

$$[V,W]_p f = V_p(Wf) - W_p(Vf).$$

**تعریف ۱۵.۱.** یک **کنج** روی خمینهٔ $M$در نقطه $p$ عبارت است از یک پایهٔ متعامد یکه برای فضای مماس $T_p(M)$. اگر $M$، $n$-بعدی باشد در اینصورت $n$ تا میدان برداری دو به دو متعامد یکهٔ $E_1, \cdots, E_n$ را یک **میدان کنجی** می نامیم که به هر نقطه از خمینه یک کنج اختصاص می دهد.

**تعریف ۱۶.۱.** خم مشتق پذیر $\gamma : I \longrightarrow M$ را در نظر می گیریم که در آن $I$ بازه ای باز در $\mathbb{R}$ است . در اینصورت **خم انتگرال** میدان برداری $X$ روی $M$ عبارت است از خم $\gamma$ روی $M$ به طوریکه : $\forall t \in I \ , \quad \gamma'(t) = X(\gamma(t))$

به عبارت دیگر خم انتگرال $X$ ، عبارت است از سرعت خم $\gamma$ در هر نقطه . در نتیجه در هر نقطه بر خم $\gamma$ مماس است .

**تعریف ۱۷.۱.** **شار**میدان برداری کامل $V$ روی $M$ عبارت است از نگاشت :

$$\begin{cases} \psi : M \times \mathbb{R}^1 \longrightarrow M \\ \psi(p,t) = \alpha_p(t) \end{cases}$$

که در آن $\alpha_p$ خم انتگرال ماکزیمال میدان برداری $V$ با نقطهٔ آغازی $p$ است .

**تعریف ۱۸.۱.** میدان برداری $V$ را روی $M$ **کامل** گوئیم هرگاه شار آن به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ تعریف شود .

## ۲.۱ تانسورها

**تعریف ۱۹.۱.** به ازای اعداد صحیح $r \geqslant 0$ و $s \geqslant 0$ که هر دو همزمان صفر نیستند، تابع چند خطی $A : (V^*)^r \times V^s \longrightarrow K$ را یک **تانسور از نوع** $(r,s)$ روی $V$ گوییم و با نماد $T_s^r(V)$ نمایش می‌دهیم. تانسور از نوع $(0,0)$ را یک عنصر از حلقهٔ $K$ می‌گیریم. یک **میدان تانسوری** $A$ روی خمینهٔ $M$ عبارت است از یک تانسور روی $F(M)$-مدول $\chi(M)$.

**تعریف ۲۰.۱.** میدان تانسوری همورد پادمتقارن از نوع $(0,p)$ را یك $p$ **-فرم دیفرانسیل پذیر** گوئیم.

**تعریف ۲۱.۱.** فرض کنید $M$ یک خمینهٔ هموار باشد. در اینصورت $(0,2)$ میدان تانسوری متقارنی را که در هر نقطه مثبت معین است را یک **متر ریمانی** روی $M$ گوئیم.

**تعریف ۲۲.۱.** فرض کنید $x^1, x^2, \cdots, x^n$ دستگاه مختصات روی $U \subset M$ باشد .در اینصورت **مؤلفه های تانسور متر** $g$ **روی** $U$ عبارت است از: $(1 \leq i,j \leq n) \quad , \quad g_{ij} =< \partial_i, \partial_j >$
پس برای میدانهای برداری $V, W \in \chi(M)$ که $V = \sum V^i \partial_i$ و $W = \sum W^j \partial_j$ داریم:

$$g(V,W) =< V,W >= \sum g_{ij} V^i W^j \in F(M)$$

که چون $g$ ناتباهیده است ، به ازای هر $p \in U$ ماتریس $(g_{ij}(p))$ وارونپذیر است وماتریس وارون آن را با نماد: $(g^{ij}(p))$ نشان می دهیم. حال از آنجایی که $g$ متقارن است $g_{ij} = g_{ji}$ ،در نتیجه خواهیم داشت: $(1 \leq i,j \leq n) \quad , \quad g^{ij} = g^{ji}$ پس روی $U$ تانسور متر $g$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$$

**تعریف ۲۳.۱.** یک خمینهٔ هموار همراه با یک متر ریمانی را یک **خمینهٔ ریمانی** گوییم.

**تعریف ۲۴.۱.** فرض کنید $M$و $N$ خمینه های ریمانی به ترتیب با تانسور متر های $g_M$و $g_N$باشند. یک **ایزومتری** از $M$به $N$ یک دیفئومرفیسم $\phi : M \to N$ می باشد به طوریکه حافظ متر است ؛ یعنی: $\phi^*(g_N) = g_M$ .

**تعریف ۲۵.۱.** نگاشت هموار $\phi : M \to N$ از خمینه های ریمانی را یك **ایزومتری موضعی** گوئیم هرگاه هر نگاشت دیفرانسیل $d\phi : T_pM \to T_{\phi(p)}N$ یك ایزومتری خطی باشد .

**تعریف ۲۶.۱.** $n$-فرم $\omega$ را روی خمینهٔ ریمانی $n$-بعدی $M$ یك **عنصر حجم** گوئیم هرگاه برای هر کنج$\{e_i\}$ روی $M$ داشته باشیم:

$$\omega(e_1, \cdots, e_n) = \pm 1$$

**لم ۱.۱.** خمینهٔ ریمانی $M$ عنصر حجم دارد اگر و تنها اگر $M$ جهت پذیر باشد.

**لم ۲.۱.** اگر $\omega$ یك عنصر حجم (موضعی) روی $M$ باشد ، دراینصورت خواهیم داشت:

$$L_X(\omega) = (divX)\omega.$$ [1]

(چون: $d(\omega)$ یك $(n+1)$-فرم روی یك خمینهٔ $n$ -بعدی است . )

**تعریف ۲۷.۱.** گوئیم شار هموار $\Theta$ روی $M$ **حجم را حفظ می کند** هرگاه برای هر $t \in \mathbb{R}$ و دامنهٔ فشردهٔ $D \subset M$ از انتگرال گیری( چنانکه $D$ مشمول در دامنهٔ $\Theta_t$ باشد ) ، داشته باشیم: $Vol(\Theta_t(D)) = Vol(D)$ .که در آن $Vol(D) = \int_D \omega$ است.

**تعریف ۲۸.۱.** گوئیم شار $\Theta$ دارای **حجم صعودی،حجم نزولی ،حجم غیرصعودی،حجم غیر نزولی** است هرگاه برای هر $t \in \mathbb{R}$ و دامنهٔ فشردهٔ $D \subset M$ از انتگرال گیری( چنانکه $D$ مشمول در دامنهٔ $\Theta_t$ باشد )،حجم مثبت $Vol(\Theta_t(D))$ (که تابعی از $t$ است) به ترتیب اکیداًصعودی،اکیداً نزولی،غیرصعودی یا غیر نزولی باشد.

**گزاره ۱.۱.** فرض کنید $M$ یك خمینهٔ ریمانی جهتدار، $X \in \chi(M)$ و $\Theta$ شار $X$ باشد.در اینصورت $\Theta$ :

$(I)$ حجم را حفظ می کند اگر و تنها اگر $divX \equiv 0$

$(II)$ داری حجم غیر نزولی است اگر و تنها اگر $divX \geq 0$

$(III)$داری حجم غیر صعودی است اگر و تنها اگر $divX \leq 0$

بعلاوه اگر روی $M$ داشته باشیم:$0 < divX$ ، آنگاه $\Theta$ دارای حجم صعودی است واگر $divX < 0$ ، آنگاه $\Theta$ دارای حجم نزولی است.

---

[1] $L_X(\omega) = i_X od(\omega) + doi_X(\omega) = (divX)\omega$

**تعریف ۲۹.۱.** یک **فضای متقارن ریمانی** عبارت است از یک خمینهٔ ریمانی همبند $M$ چنان که برای هر $p \in M$ یک ایزومتری یکتا مانند $\zeta_p : M \longrightarrow M$ با شرط $d\zeta_p = -id$ روی $T_p(M)$ موجود باشد.

**مثال ۱.۱.** $\mathbb{R}^n$ متقارن است. زیرا به ازای هر $p \in \mathbb{R}^n$ نگاشت $p + x \longrightarrow p - x$ یک ایزومتری می‌باشد.

**تعریف ۳۰.۱.** فرض کنید $M$ یک خمینهٔ هموار و $w$ یک $k$-فرم دیفرانسیل‌پذیر روی $M$ باشد. $w$ را روی $M$ **بسته** گوئیم هرگاه : $dw = 0$ ، همچنین $w$ را روی $M$ **دقیق** گوئیم هرگاه یک $(k-1)$-فرم دیفرانسیل‌پذیر روی $M$ وجود داشته باشد به طوریکه $w = d\eta$ باشد.
پس ۱-فرم $w$ را روی خمینهٔ هموار $M$ دقیق گوئیم هرگاه تابع $f \in F(M)$ موجود باشد به طوریکه $w = df$. در واقع $d \circ d = 0$ نتیجه می‌دهد که هر فرم دقیق بسته است.

**تعریف ۳۱.۱.** تابع $F(M)$ -خطی منحصربفردی چون $C : T_1^1(M) \longrightarrow F(M)$ با ضابطه $C(X \otimes \theta) = \theta X$ به ازای هر $X \in \chi(M)$ و $\theta \in \chi^*(M)$ وجود دارد که **انقباض** $(1,1)$ نامیده می شود.

**تعریف ۳۲.۱.** فرض کنید $A$ یك $(r,s)$ میدان تانسوری و $\theta^1, \cdots, \theta^{r-1}$ و $X_1, \cdots, X_{s-1}$ ، به ترتیب ۱ -فرم ها و میدانهای برداری باشند . در اینصورت $(1,1)$ تانسوری به شکل تابع زیرخواهیم داشت :

$$(\theta, X) \longmapsto A(\theta^1, \cdots, \theta, \cdots, \theta^{r-1}, X_1, \cdots, X, \cdots, X_{s-1})$$

که آن را می توان به صورت زیر نوشت:

$$A(\theta^1, \ldots, \overset{\text{مکان } i\text{-ام}}{\cdot}, \ldots, \theta^{r-1}, X_1, \ldots, \overset{\text{مکان } j\text{-ام}}{\cdot}, \ldots, X_{s-1})$$

به طوریکه یك $(1,1)$ انقباض روی $(1,1)$ تانسور فوق ،یك تابع حقیقی مقدارتولید می کند که آن را توسط: $(C_j^i A)(\theta^1, \cdots, \theta^{r-1}, X_1, \cdots, X_{s-1})$ نشان می دهیم به طوریکه در آن $(1 \leq i \leq r$ و $1 \leq j \leq s)$ است.
بدیهی است که $C_j^i A$ یك نگاشت $F(M)$ - چند خطی است. از اینرو یك تانسور از نوع $(r-1, s-1)$ است که **انقباض** $A$ **روی** $i, j$ نامیده می شود.

**تعریف ۳۳.۱.** برای $1 \leq a < b \leq s$ و $r$ دلخواه **انقباض متری** به صورت:
$C_{ab} : T^r_s(M) \longrightarrow T^r_{s-2}(M)$ در مختصات مفروض است به طوریکه:

$$(C_{ab}A)^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_{s-2}} = \sum_{p,q} g^{pq} A^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots p\ldots q\ldots j_{s-2}}.$$

بطور مشابه برای$1 \leq a < b \leq r$ و $s$ دلخواه انقباض متری به صورت:
$C^{ab} : T^r_s(M) \longrightarrow T^{r-2}_s(M)$ در مختصات مفروض است به طوریکه:

$$(C^{ab}A)^{i_1\ldots i_{r-2}}_{j_1\ldots j_s} = \sum_{p,q} g_{pq} A^{i_1\ldots p\ldots q\ldots i_{r-2}}_{j_1\ldots j_s}.$$

**تعریف ۳۴.۱.** یک **مشتق تانسوری** $\nabla$ روی خمینهٔ هموار $M$ عبارت است از گردایه‌ای از توابع $\mathbb{R}$-خطی مانند:

$$\nabla = \nabla^r_s := T^r_s(M) \longrightarrow T^r_s(M) \qquad r \geqslant 0, s \geqslant 0$$

به طوریکه به ازای هر دو تانسور $A$ و $B$ و انقباض $C$ داشته باشیم:

$$\nabla(A \otimes B) = \nabla A \otimes B + A \otimes \nabla B$$
$$\nabla(CA) = C(\nabla A)$$

**لم ۳.۱.** *فرض کنید $\nabla$ یک مشتق تانسوری روی $M$ باشد. اگر $A \in T^r_s(M)$ آنگاه داریم:*

$$\begin{aligned}\nabla(A(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, X_s)) &= (\nabla A)(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, X_s)\\ &+ \sum_{i=1}^{r} A(\theta^1, \cdots, \nabla\theta^i, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, X_s)\\ &+ \sum_{j=1}^{s} A(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, \nabla X_j, \cdots, X_s)\end{aligned}$$

*که این رابطه را **قاعدهٔ ضرب** می‌نامیم.*

**تعریف ۳۵.۱.** **مشتق کواریان** $(r, s)$ **تانسور** $A$ روی خمینهٔ هموار $M$ ، عبارت است از $(r, s+1)$ تانسور $\nabla A$ به طوریکه به ازای هر $V, X_i \in \chi(M)$ و $\theta^j \in \chi^*(M)$ داشته باشیم:

$$(\nabla A)(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, X_s, V) = (\nabla_V A)(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, X_s)$$

در حالتی که $r = s = 0$ مشتق کواریان تابع $f$ همان دیفرانسیل معمولی‌اش می‌باشد . زیرا :

$$(\nabla f)(V) = \nabla_V f = Vf = df(V) \qquad \forall\, V \in \chi(M).$$

**تعریف ۳۶.۱.** فرض کنید $M$ یک خمینهٔ ریمانی هموار و $X$ یک میدان برداری روی $M$ باشد . مشتق تانسوری $L_X$ به ازای هر میدان برداری $Y$ و تابع هموار $f$ روی $M$ به صورت :

$$L_X Y = [X, Y]$$

$$L_X f = Xf$$

تعریف می‌شود که $L_X$ را **مشتق لی** نسبت به میدان برداری $X$ می‌نامیم.

**تعریف ۳۷.۱.** فرض کنید $M$ یک خمینهٔ ریمانی باشد. یک **میدان برداری کیلینگ** روی $M$، یک میدان برداری مانند $X$ است که مشتق لی $g$ نسبت به میدان برداری $X$ صفر باشد . یعنی داشته باشیم : $L_X g = 0$ .

**تعریف ۳۸.۱.** فرض کنید $M$ یک خمینهٔ ریمانی با التصاق ریمانی $\nabla$ باشد. نگاشت $R : \chi^3(M) \longrightarrow \chi(M)$ با ضابطهٔ :

$$R(X,Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z \qquad (۱.۱)$$

یک $(۱,۳)$ میدان تانسوری روی $M$ می‌باشد که **تانسور خمیدگی ریمانی** نامیده می‌شود. نگاشت $R$ در روابط زیر صدق می‌کند:

(۱) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$

(۲) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ (اتحاد اول بیانچی)

(۳) $g(R(X,Y)Z, W) = -g(R(X,Y)W, Z)$

(۴) $g(R(X,Y)Z, W) = g(R(Z,W)X, Y).$

روابط بالا را **تقارن‌های تانسور خمیدگی** می‌نامیم.

**تعریف ۳۹.۱.** **تانسور خمیدگی کریستوفل** $R$ توسط رابطهٔ زیر تعریف می شود:

$$R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z, W) \quad , \qquad \forall W \in \chi(M) \qquad (۲.۱)$$

**تعریف ۴۰.۱.** خمینهٔ ریمانی $M$ را **موضعاً متقارن** گوئیم هرگاه : $\nabla R = 0$.

**لم ۴.۱.** هر فضای ریمانی متقارن، موضعاً متقارن می‌باشد.

**تعریف ۴۱.۱.** فضا را **تخت** گوئیم هرگاه تانسور خمیدگی متحد با صفر باشد. (یعنی : $R \equiv 0$ )

**تعریف ۴۲.۱.** فرض کنید $(M, g)$ یك خمینهٔ ریمانی باشد. در اینصورت $(M, g)$ را **بطور همدیس تخت** گوئیم هرگاه برای هر نقطهٔ $x \in M$ یك همسایگی $U$ از $x$ و یك تابع هموار $f$ روی $U$ چنان موجود باشند که $(U, e^{2f}g)$ خمینهٔ تخت باشد . ( یعنی : تانسور خمیدگی ریمانی $e^{2f}g$ روی $U$ صفر باشد ) .

**تعریف ۴۳.۱.** فرض کنید $M$ یک خمینهٔ هموار و $\Pi$ یک زیر فضای دو بعدی از فضای مماس $T_pM$ باشد به طوریکه $\Pi$ توسط میدان‌های برداری $X, Y$ تولید می‌شود . در اینصورت **خمیدگی برشی** $M$ نسبت به $\Pi$ در نقطه $p$ عبارت است از:

$$K(X, Y) := \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}.$$

**تعریف ۴۴.۱.** فرض کنید $M$ یک خمینهٔ ریمانی باشد. $M$ را با **خمیدگی ثابت** گوئیم هرگاه خمیدگی برشی ثابت داشته باشد.

**لم ۵.۱.** فرض کنید $M$ یک خمینهٔ ریمانی باشد. اگر خمیدگی برشی در نقطهٔ $p \in M$ مساوی صفر باشد آنگاه تانسور خمیدگی ریمانی در نقطهٔ $p$ نیز مساوی صفر خواهد شد.
اثبات: از اینکه $K = 0$ است از تعریف خمیدگی برشی به ازای هر $v, w \in T_pM$ داریم : $g(R(v, w)w, v) = 0$. به ازای هر $v, w \in T_pM$ نشان می‌دهیم $R(v, w)v = 0$. با پلاریزه کردن $R(v, w)v$ به ازای هر $x$ داریم:

$$\begin{aligned} 0 = g(R(v, w + x)v, w + x) &= g(R(v, w)v, w) + g(R(v, x)v, x) \\ &+ g(R(v, w)v, x) + g(R(v, x)v, w) \qquad (3.1) \end{aligned}$$

ولی با توجه به تقارن تانسور خمیدگی داریم:

$$g(R(v, w)v, x) = g(R(v, x)v, w).$$

لذا از( ۱.۱)به دست می‌آوریم : $g(R(v,w)v,x)=0$. حال به ازای هر $v,w,x\in T_pM$ نشان می‌دهیم $R(v,w)x=R(w,x)v$. با پلاریزه کردن $R(v,w)v$ داریم:

$$0=R(v+x,w)(v+x)=R(v,w)v+R(x,w)v+R(v,w)x+R(x,w)x$$

لذا نتیجه می‌گیریم $R(v,w)x=R(w,x)v$. حال با توجه به اتحاد اول بیانچی به ازای هر $v,w,x\in T_pM$ داریم:

$$3R(v,w)x=R(v,w)x+R(w,x)v+R(x,v)w=0$$

بنابراین در نقطهٔ $p\in M$ به دست می‌آوریم : $R=0$. □

**تعریف ۴۵.۱.** فرض کنید $M$ یک خمینهٔ ریمانی و $p\in M$باشد. در اینصورت تابع چند خطی $F$ که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} F:T_pM^4\longrightarrow\mathbb{R}\\ (v,w,x,y)\longmapsto g(R(v,w)x,y)\end{cases}$$

را یک تابع **از نوع خمیدگی** گوئیم هرگاه در تقارن‌های تانسور خمیدگی صدق کند.

**نتیجه ۱.۱.** فرض کنید $F$ تابع از نوع خمیدگی روی $T_pM$ چنان باشد که

$$K(v,w)=\frac{F(v,w,w,v)}{g(v,v)g(w,w)-g(v,w)^2}.$$

که در آن $v,w$ یک صفحه را تولید می‌کنند، در اینصورت به ازای هر $v,w,x,y\in T_pM$ داریم:

$$g(R(v,w)x,y)=F(v,w,x,y).$$

اثبات: تابع تفاضل $\triangle(v,w,x,y)=F(v,w,x,y)-g(R(v,w)x,y)$ در تقارن‌های تانسور خمیدگی صدق می‌کند لذا یک تابع از نوع خمیدگی است. از طرفی با توجه به فرض داریم: $\triangle(v,w,v,w)=0$ . در نتیجه با توجه به لم قبل نتیجه می‌گیریم : $\triangle=0$. □

**نتیجه ۲.۱.** اگر $M$ دارای خمیدگی ثابت $c$ باشد آنگاه داریم:

$$R(x,y)z=c\{g(z,y)x-g(z,x)y\}.$$