بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی(محض)

عنوان:

زیرحلقه های نیم جابجایی از حلقه ماتریس های بالا مثلثی

نگارنده:

رسول محمّدی

استاد راهنما:

دکترسید احمد موسوی

اسفند ۱۳۸۹

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

بسمه تعالی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه **آقای رسول محمدی** رشته **ریاضی‌محض** تحت عنوان: **«زیرحلقه‌های نیم‌جابجایی از حلقه ماتریس‌های بالامثلثی»** را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیداحمد موسوی	دانشیار	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر علی ایرانمنش	استاد	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر علی رجایی	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر سیدحمید حاج‌سیدجوادی	استادیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر علی رجایی	استادیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله ~~دکتری~~ نگارنده در رشته ریاضی محض (جبر) است که در سال ۸۹ در دانشکده ریاضی دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی ~~سرکار خانم~~/جناب آقای دکتر سید احمد موسوی ، مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب رسول محمدی دانشجوی رشته ریاضی محض (جبر) مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: رسول محمدی

تاریخ و امضا: ۹۰/۲/۲۴

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ٤- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ٥- این آیین‌نامه در ٥ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/٤/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/٤/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱٥ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب رسول مجتری دانشجوی رشته ریاضی محض (جبر) ورودی سال تحصیلی ۸۷ مقطع کارشناسی ارشد دانشکده ریاضی متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا:

تاریخ: ۹۰/۳/۲۶

تقدیم به

قلب پر مهر مادرم و روان پاک پدرم

تقدیر وتشکر

سپاس و ستایش معبود یگانه را که پرتو الطاف بی شمارش بر لحظه لحظه زندگی ام آشکار است. حمد وثنا می‌گزارم او را که فکرت و اندیشه را در بستر روحم روان ساخت.

امتنان و سپاس می‌گزارم تلاش ها، زحمات و راهنمایی های ظریف، ارزشمند و بی شائبه استاد فرزانه و گران مایه‌ام، جناب آقای **دکتر سید احمد موسوی** که با حمیت و جدیت، مرا به دقت، اندیشه، درک و تعمق واداشتند.

از اساتید محترم، جناب آقای **دکتر علی ایرانمنش** و جناب آقای **دکترعلی رجایی** و جناب آقای **دکتر سید حمید حاج سید جوادی** که زحمت داوری این پایان نامه را متقبل شدند، کمال تشکر و قدردانی را دارم. از خدای متعال برای همه این عزیزان، سلامتی و موفقیت روزافزون آرزومندم.

درپایان، بی نهایت ترین سپاس را

به پر بهاترین گنج گیتی، مادرم

ابراز می‌نمایم هر چند این سپاس‌گزاری در مقایسه با انبوه مهربانی ها و

فداکاری هایشان بسیار ناچیز است.

چکیده

در سراسر این پایان نامه فرض شده است که R حلقه‌ای شرکت‌پذیر و یکدارو α یک درون‌ریختی و δ یک α-عملگرمشتق از حلقه R باشد. به این معنی که δ یک نگاشت جمعی است و برای هر $a, b \in R$، $\delta(ab) = \delta(a)b + \alpha(a)\delta(b)$. در این پایان نامه مقالات زیر را مورد بررسی و مطالعه قرار می‌دهیم:

(1) Wang, Wenkang, 'Maximal Semicommutative Subrings of Upper Triangular Matrix Rings', Communications in Algebra, (2008) 36: 177 — 81

(2) Z. Liu and R. Zhao, On weak Armendariz rings, Comm. Algebra 34 (2006), no. **7,** 2607–2616.

هیرانو[1] [۲۱] ادعا کرد که اگر R نیم جابجایی باشد آنگاه $R[X]$ نیز نیم جابجایی می باشد. ما با ارایه مثال نقضی در فصل ۲ ثابت کردیم این ادعا نادرست می باشد. در فصل ۳ از[۱۲] رفع اشکال کرده ثابت می کنیم حلقه های مک کوی ضعیف، موریتا پایا نبوده و هرحلقه ای که نیم اول نباشد، مک کوی ضعیف است. در فصل۴ مفهوم جدیدی را تحت عنوان پوچ- نیم جابجایی معرفی می کنیم که تعمیمی از حلقه های نیم جابجایی است و شرط نیم جابجایی مقالات [۳۸]و [۴۷]و [۴۸] را ضعیف کرده و به حلقه‌های پوچ- نیم جابجایی انتقال می دهیم. درفصل **۵** حلقه‌های پوچ- (α,δ)-سازگار که تعمیمی ازحلقه‌های (α,δ)-سازگار و کاهشی است را معرفی می کنیم. و حلقه های زیپ ضعیف و توسیع‌های آن مورد مطالعه و بررسی قرار داده و شرط‌های (α,δ)-سازگار و برگشت پذیر مقالهٔ [۴۶] را با پوچ- (α,δ)-سازگار و شبه IFP- جایگزین می‌کنیم.

کلمات کلیدی: زیپ ضعیف، (α,δ)-سازگار، پوچ- (α,δ)-سازگار ، کاهشی، جابجایی، نیم‌جابجایی، پوچ -نیم‌جابجایی ، شبه IFP-، آرمنداریز، پوچ- آرمنداریز ، آرمنداریز ضعیف، مک کوی، مک کوی ضعیف.

[1] Hirano

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

در سال ۱۹۹۷ مفهوم حلقه‌های آرمنداریز توسط رگه و چاوچاریا[1] معرفی شد. اما نـام آرمنـداریز از آنجـایی انتخاب شد که آرمنداریز ثابت کرد حلقه‌های کاهشی در این شرایط صدق می کنند و حلقه‌های کاهشی ردهٔ بزرگی از حلقه‌های آرمنداریز را تشکیل می دهند. در سال ۲۰۰۶ لیو[2] و زاوو[3] مفهوم حلقـه‌هـای آرمنـداریز ضعیف را به عنوان تعمیمی ازحلقه‌های آرمنداریز معرفی کردند.

لمبک[4]حلقهٔ R را متقارن نامید هرگاه برای هر $a, b, c \in R$ اگر $abc = 0$ آنگاه $acb = 0$. هبِب[5]حلقـهٔ R را صـفر جابجـایی نامیـد هرگـاه بـرای هـر $a, b \in R$ اگـر $ab = 0$ آنگـاه $ab = 0$، در حـالی کـه کوهن[6]اصطلاح برگشت پذیر را برای چنین حلقه‌هایی استفاده نمود. تعمیمـی از حلقـه‌هـای برگشـت پـذیر حلقه‌های نیم جابجایی است. حلقهٔ R نیم جابجایی است هرگـاه بـرای هـر $a, b \in R$ اگـر $ab = 0$ آنگـاه $aRb = 0$. از نظر تاریخی برخی نتایج به دست آمده از حلقه‌های نیم جابجایی به شین[7] نسـبت داده مـی شود. او ثابت کرد:

حلقهٔ R نیم جابجایی است هرگاه $r_R(a)$ ایده آلی از R باشد. همچنین هـر حلقـهٔ کاهشـی متقـارن و هـر حلقهٔ متقارن، نیم جابجایی است ولی عکس این موارد صحیح نیست. در سال ۱۹۹۳ بیرکنمییـر[8]حلقـهٔ R را ۲-اولیه نامید هرگاه $nil(R) = nil_*(R)$، که در آن $nil_*(R)$ برابر اشتراک ایده آلهـای اول R اسـت. همچنین او ثابت کرد که حلقه های نیم جابجایی در این شرایط صدق می کنند. در ادامـه مـا [۴۱] مفهـوم

[1] Rege, Chhawchharia
[2] Liu
[3] Zhao
[4] Lambek
[5] Habeb
[6] Kohn
[7] Shin
[8] Birkenmeier

حلقه های پوچ- نیم جابجایی را معرفی کرده وثابت می کنیم حلقه ای میانی بین ۲-اولیه و نیم جابجایی است و نتایجی از[۳۸] [۴۷] [۴۸] را به این حلقه تعمیم می‌دهیم.

بنابر فِیث[1][۱۴]، حلقهٔ R زیپ راست (چپ) نامیده می‌شود هرگاه برای هر زیرمجموعه $X \subseteq R$ که $r_R(X) = 0$ ($l_R(X) = 0$) زیرمجموعه متناهی $Y \subseteq X$ موجود باشد به طوری‌که $r_R(Y) = 0$ ($l_R(Y) = 0$). حلقه R زیپ است هرگاه زیپ چپ و راست باشد. مفهوم حلقه‌های زیپ توسط زلمانوویچ[2] بیان شد. زلمانوویچ[۵۹] ، ثابت کرد هر حلقه‌ای که در شرط زنجیرهای کاهشی روی پوچ‌سازهای راست صدق کند، زیپ راست است؛ اما عکس آن لزوماً برقرار نیست.

توسیع‌های حلقه‌های زیپ توسط چند تن از نویسندگان مطالعه شده است. بچی[3] و بلر[4][۵] نشان دادند اگر اگر R جابجایی و زیپ باشد، آن‌گاه حلقه چندجمله‌ای‌های $R[x]$ روی R زیپ است.

در سال ۲۰۰۷ اویانگ[5] حلقه‌های زیپ ضعیف را معرفی کرد و نشان داد R زیپ ضعیف راست است اگر و تنها اگر حلقه ماتریس‌های بالا مثلثی$n \times n$ روی R زیپ ضعیف راست باشد. فرض کنیم α یک درون‌ریختی و δ یک α-عملگر مشتق از حلقه R است. هرگاه R برگشت‌پذیر و (α,δ)-سازگار باشد، در این‌صورت R زیپ ضعیف راست است اگر و تنها اگر حلقه چندجمله‌ای های $R[x;\alpha,\delta]$ زیپ ضعیف راست باشد. در این پایان نامه پس از ارایهٔ تعاریف و قضایای مقدماتی در فصل اول، به معرفی حلقه‌های نیم جابجایی در فصل دوم می‌پردازیم و سپس زیر حلقه‌های نیم جابجایی از حلقه ماتریس های بالا مثلثی را مشخص کرده و در انتها با ارایهٔ مثالی نشان می دهیم اگرR نیم جابجایی باشد لزوما حلقهٔ $R[x]$ نیم جابجایی نمی باشد، و این مثال،[۲۱] را نقض می کند که ادعا کرده بود:

Corollary .3.5. Let R be a semi-commutative ring. Then R is Armendariz if and only if R is quasi-Armendariz.

[1] Faith
[2] Zelmanowiz
[3] Beachy
[4] Blair
[5] Ouyang

Proof . **<u>Since R is semi-commutative, R[x] is semi-commutative as well</u>**. Hence our assertion is clear.

در ادامه ثابت می کنیم وقتی R جابجایی یا آرمنداریز باشد آنگاه R نیم جابجایی است اگر وتنها اگر $R[x]$ باشد. در فصل سوم، مفهوم حلقه‌های آرمنداریز ضعیف را به عنوان تعمیم مشترکی از حلقه‌های نیم جابجایی و آرمنداریز بیان می‌کنیم و نشان می‌دهیم R آرمنداریز ضعیف است اگر وتنها اگر $T_n(R)$ آرمنداریز ضعیف باشد. در ادامه از [۱۲]که در آن ادعا شده بود:

Example 2.4. Let R be a reduced ring, then R is weak McCoy ring. Let $S=\mathrm{M}_2(\mathrm{R})$, $f(x)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}x$,$g(x)=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\-1&-1\end{pmatrix}x$

Be polynomials in $S[x]$. Then $f(x)g(x)=0$ but if $P\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\in nil(R)$

and $P\begin{pmatrix}0&0\\-1&-1\end{pmatrix}\in nil(S)$ for some $P\in S\setminus\{0\}$ then it is obvious that $P=0$

Thus S is not weak McCoy.

رفع اشکال کرده و با فرض $P=\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}$ به راحتی می توان نشان داد $f(x)P\ ,Pg(x)\in nil(S)$. همچنین بعد از تصحیح این مطلب، ثابت می کنیم حلقه های مک کوی ضعیف، موریتا پایا نبوده و هرحلقه ای که نیم اول نباشد، مک کوی ضعیف بوده و اگر حلقهٔ R مک کوی ضعیف نباشد آنگاه $M_n(R)$ نیز مک کوی ضعیف نیست.

در فصل چهارم مفهوم جدیدی را تحت عنوان پوچ- نیم جابجایی معرفی می کنیم که تعمیمی از حلقه های نیم جابجایی است و شرط نیم جابجایی مقالات[۳۸] و[۴۷]و[۴۸] را ضعیف کرده و به حلقه‌های پوچ- نیم جابجایی انتقال می دهیم. در[۳۲]، کرمپا[1] حلقه α-صلب را به این صورت زیر تعریف کرد که درون- ریختی α از حلقه R را صلب نامیم هرگاه برای هر $a\in R$ از $a\alpha(a)=0$ نتیجه شود $a=0$. حلقه R را α-صلب نامیم هرگاه یک نگاشت صلب α از R موجود باشد. همچنین او ثابت کرد این حلقه‌ها کاهشی است.

[1]Krempa

دکتر موسوی و دکتر هاشمی [۱۸]حلقه‌های(α,δ)-سازگار را که تعمیمی از حلقه‌های α -صلب بود معرفی کرده، ثابت نمودند:

حلقهٔ R α-صلب است اگر وتنها اگر کاهشی و (α,δ)-سازگار باشد. در فصل چهارم [۳۹] پس از معرفی حلقه‌های پوچ-(α,δ)-سازگار، که تعمیم حلقه‌های کاهشی و (α,δ)-سازگاراست، شرطهای (α,δ)-سازگار تمام نتایج [۴۶]و[۴۸] را با شرط قوی تر پوچ-(α,δ)-سازگار جایگزین می نماییم.

فصل اول

تعاریف ومفاهیم مقدماتی

بخش ۱-۱. مقدمه

در این فصل، ابتدا مفاهیم مورد نیاز پایان نامه را بیان می‌کنیم و تقریباً تمامی تعاریف و قضایای مهمی که پیش نیاز فصل‌های بعد می‌باشد ذکر می‌نماییم. همچنین در پایان اهداف و ساختار پایان نامه را مشخص می‌کنیم.

در سراسر این پایان‌نامه R حلقه‌ای تعویض‌پذیر و یکدار، α یک درون‌ریختی و δ یک α-عملگرمشتق از حلقه R فرض می‌شوند. به این معنی که δ یک نگاشت جمعی است و برای هر $a, b \in R$، $\delta(ab) = \delta(a)b + \alpha(a)\delta(b)$.

بخش ۱-۲. تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در [۳۲]، کرمپا[1] حلقه α-صلب را به صورت زیر تعریف کرد:

تعریف۱-۲-۱. درون‌ریختی α از حلقه R را صلب نامیم هرگاه برای هر $a \in R$ از $a\alpha(a) = 0$ نتیجه شود $a = 0$. حلقه R را α-صلب نامیم هرگاه یک نگاشت صلب α از R موجود باشد.

تعریف۱-۲-۲. فرض کنیم α یک درون‌ریختی و δ یک α-عملگرمشتق از حلقه R باشد.

- حلقه R، α-سازگار نامیده می‌شود هرگاه برای هر $a, b \in R$، $ab = 0$ اگر وتنها اگر $a\alpha(b) = 0$.
- حلقه R، δ-سازگار نامیده می‌شود هرگاه برای هر $a, b \in R$، اگر $ab = 0$ آن‌گاه نتیجه شود $a\delta(b) = 0$.

حلقه ای که α-سازگار و δ-سازگار باشد، (α, δ)-سازگار نامیده می‌شود.

تعریف۱-۲-۳. فرض کنیم α یک درون‌ریختی و δ یک α-عملگرمشتق از حلقه R باشد.

- حلقه R، پوچ- α-سازگار می نامیم هرگاه برای هر $a, b \in nil(R)$، $ab = 0$ اگر وتنها اگر $a\alpha(b) = 0$.
- حلقه R، پوچ- δ-سازگارمی نامیم هرگاه برای هر $a, b \in nil(R)$ و $ab = 0$ آنگاه $a\delta(b) = 0$.

حلقه ای که پوچ- α-سازگار وپوچ- δ-سازگار باشد، پوچ- (α, δ)-سازگار نامیده می‌شود.

---
[1] Krempa

تعریف۱-۲-۴ حلقه R، α - ضعیفا صلب را به این صورت تعریف می‌کنیم که اگر $\alpha^n(a) \in nil(R)$ آنگاه لزوما $a \in nil(R)$، برای هر عدد صحیح مثبت n.

تعریف۱-۲-۵. فرض کنیم R یک حلقه و M یک (R,R)- دو مدول باشد. توسیع بدیهی R به وسیله M حلقه $T(R,M) = R \oplus M$ است. جمع آن جمع معمولی وضرب آن از قاعده زیر پیروی می‌کند$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + m_2 r_1)$.

تعریف ۱-۲-۶. عنصر e از حلقه R را خودتوان گوییم هرگاه $e^2 = e$.

تعریف۱-۲-۷. حلقه R را کاهشی می‌نامیم هرگاه فاقد عنصر پوچ‌توان ناصفر باشد.

تعریف ۱-۲-۸. یک حلقه آبلی نامیده می‌شود هرگاه هر خودتوان آن مرکزی باشد.

تعریف۱-۲-۹. حلقه R را آرمنداریز می‌نامیم هرگاه برای چندجمله‌ای های $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ و $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ از $R[x]$ ، اگر $f(x)g(x) = 0$ آنگاه $a_i b_j = 0$، برای هر $0 \le i \le n, 0 \le j \le m$.

تعریف۱-۲-۱۰. حلقهٔ R را آرمنداریز ضعیف می‌نامیم هرگاه برای چندجمله‌ای های $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ و $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ از $R[x]$ ، اگر $f(x)g(x) = 0$ آنگاه $a_i b_j = nil(R)$ برای هر $0 \le i \le n, 0 \le j \le m$.

تعریف۱-۲-۱۱. حلقه R را مک کوی راست(چپ) می‌نامیم هرگاه برای چندجمله‌ای های $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ و $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ از $R[x]$ ، اگر $f(x)g(x) = 0$ آنگاه $0 \ne c$ $(0 \ne d)$ متعلق به R وجود داشته باشد به $a_i c = 0$ $(d b_j = 0)$ برای هر $0 \le i \le n, 0 \le j \le m$.

تعریف۱-۲-۱۲. حلقه R را مک کوی راست(چپ) ضعیف نامیم هرگاه برای چندجمله‌ای های $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ و $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ از $R[x]$ ، اگر $f(x)g(x) = 0$ آنگاه $c \neq 0$ $(d \neq 0)$ متعلق به R وجود داشته باشد به $a_ic \in nil(R)$ $\left(db_j \in nil(R)\right)$ برای هر $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m$.

تعریف ۱-۲-۱۳. حلقه R را متقارن نامیم، هرگاه برای هر $a, b, c \in R$ اگر $abc = 0$ آن‌گاه $acb = 0$.

تعریف ۱-۲-۱۴. حلقه R را برگشت‌پذیر نامیم هرگاه برای هر $a, b \in R$، اگر $ab = 0$ داشته باشیم $ba = 0$.

تعریف ۱-۲-۱۵. حلقه R را نیم‌جابجایی نامیم، هرگاه برای هر $a, b \in R$ از $ab = 0$ نتیجه شود $aRb = 0$.

تعریف ۱-۲-۱۶. حلقه R را پوچ- نیم‌جابجایی نامیم، هرگاه برای هر $a, b \in nil(R)$ از $ab = 0$ نتیجه شود $aRb = 0$.

تعریف ۱-۲-۱۷. حلقه R را ۲-اولیه نامیم، هرگاه $nil_*(R) = nil(R)$. که در آن $nil_*(R)$ برابر اشتراک ایده آلهای اول R و $nil(R)$ مجموعه عناصر پوچ توان R است.

لم ۱-۲-۱۸. هر حلقه جابجایی، نیم‌جابجایی است.

لم ۱-۲-۱۹. هر حلقه کاهشی نیم‌جابجایی است.

در واقع داریم:

۲– اولیه $\Rightarrow$ نیم جابجایی پوچ $\Rightarrow$ نیم‌جابجایی $\Rightarrow$ برگشت‌پذیر $\Rightarrow$ متقارن $\Rightarrow$ کاهشی

تعریف ۱–۲–۲۰. حلقهٔ R نیم اول است هرگاه $aRa = 0$ آنگاه $a = 0$.

لم ۱–۲–۲۱. هر حلقه کاهشی نیم‌اول است.

لم ۱–۲–۲۲. حلقه R نیم‌اول است، هرگاه $nil_*(R) = 0$

لم ۱–۲–۲۳. اگر R نیم‌اول و ۲-اولیه باشد آنگاه کاهشی است.

تعریف ۱–۲–۲۴. فرض کنیم α یک درون‌ریختی از حلقه R و $\delta: R \rightarrow R$ یک نگاشت جمعی از R باشد. عملگر δ یک α-عملگر مشتق نامیده می شود هرگاه $\delta(ab) = \delta(a)b + \alpha(a)\delta(b)$. توسیع اُر $S = R[x; \alpha, \delta]$ مجموعه همه چندجمله‌ای های $\sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ با جمع معمولی و ضرب $xa = \alpha(a)x + \delta(a)$ می‌باشد.

تعریف ۱–۲–۲۵. فرض کنیم R یک حلقه باشد، پوچ ساز راست زیرمجموعه $X \subseteq R$ را به صورت $r_{\mathrm{R}}(\mathrm{X}) = \{a \in R : xa = 0 ; \forall x \in X\}$ و پوچ ساز چپ آن را به صورت $l_{\mathrm{R}}(\mathrm{X}) = \{a \in R : ax = 0 ; \forall x \in X\}$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱–۲–۲۶. فرض کنیم R یک حلقه باشد دراینصورت حلقهٔ $S_n^k(R)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\left\{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & a_k & a_{1,k+1} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_1 & \ddots & \ddots & a_{k-1} & a_{2,k+1} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_{k-1,k+1} & \cdots & \cdots & a_{k-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & \overline{a_2} & \cdots & \overline{a_{n-k}} & \overline{a_{n-k+1}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & a_1 & \ddots & \ddots & \overline{a_{n-k}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \overline{a_2} & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 & \overline{a_2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \end{bmatrix} \middle| a_h, a_g, a_{ij} \in R \right\}$$

تعریف ۱-۲-۲۷. حلقهٔ R را منظم فان نیو من گوییم اگر برای هر $a \in R$، $x \in R$ وجود داشته باشد به طوریکه داشته باشیم $a = axa$.