دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی محض ، گرایش توپولوژی

عنوان

حلقه‌ی توابع پیوسته‌ای که در بینهایت صفر می‌شوند و ایدآل‌های مرتبط با آن

استادان راهنما

دکتر فریبرز آذرپناه و دکتر محمدعلی سیاوشی

پژوهشگر

هاشم هاشمی مقدم

۱۳۹۴

نام خانوادگی دانشجو: هاشمی مقدم   نام: هاشم   شماره دانشجویی: ۹۱۲۵۱۱۴

عنوان: حلقه‌ی توابع پیوسته‌ای که در بینهایت صفر می‌شوند و ایدآل‌های مرتبط با آن

استادان راهنما: دکتر فریبرز آذرپناه و دکتر محمدعلی سیاوشی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد   رشته: ریاضی محض   گرایش: توپولوژی

دانشگاه: شهید چمران اهواز   دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۴   تعداد صفحات: ۱۰۱

واژگان کلیدی: $C_\infty(X)$،$C_K(X)$، zــ ایدآل، ایدآل آزاد ، ایدآل ثابت، ایدآل ماکسیمال ثابت، فضای ψــ فشرده، فضای σــ فشرده،فضای μــ فشرده،فضای η ــ فشرده.

چکیده

در این پایان نامه، فضاهایی که در مورد آنها کوچکترین zــ ایدآل‌های شامل $C_\infty(X)$ اولند، مشخص می‌کنیم. در اینجا ثابت می‌شود که $C_\infty(X)$ در $C(X)$ یک zــ ایدآل است اگر و تنها اگر هر صفرــ مجموعه در یک مجموعه σــ فشرده و فشرده‌ی موضعی، فشرده باشد. بعضی از ایدآل‌ها در رابطه با $C_\infty(X)$ معرفی می‌شوند. و مطابق با رابطه‌ی این ایدآل‌ها و $C_\infty(X)$، فضاهای توپولوژیکی X مشخص می‌شوند. بعضی از مفاهیم فشردگی برحسب ایدآل‌های در ارتباط با $C_\infty(X)$ بیان می‌شوند و سرانجام نشان می‌دهیم که فضای σــ فشرده بئر است اگر و تنها اگر هر ایدآل شامل $C_\infty(X)$ اساسی باشد.

تقدیم به همسر عزیزم

همراه و دوست من تا به امروز

که دلگرمی من بودند برای حرکت و تلاش

و تقدیم به

دو دختر گلم فاطمه و شهرزاد

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

---

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس گزاری...

با تشکر از افرادی که در راستای کسب علم و ادب مرا یاری کردند. از اساتید راهنمای خود، جناب آقای دکتر فریبرز آذرپناه و جناب آقای دکتر محمدعلی سیاوشی صمیمانه تشکر و قدردانی می‌کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده آنان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. از تمامی اساتید مهربانم که در تمامی طول تحصیل با کمک‌های بی شائبه‌ی خود مرا مورد لطف و عنایت قرار داده‌اند صمیمانه سپاس‌گذاری می‌کنم.همچنین در پایان از همسر عزیزم به خاطر محبت‌های بی انتهای ایشان کمال تشکر و سپاس‌گذاری را دارم.

هاشم هاشمی مقدم
۱۳۹۴

فهرست مطالب

پیش‌گفتار ۱

۱ مباحث مقدماتی ۳

۱.۱ توپولوژی ۳

۲.۱ زیر فضاهای Cـ نشانده و C^*ـ نشانده ۶

۳.۱ zـ پالایه‌ها و zـ ایدال‌ها ۱۰

۴.۱ فضاهای فشرده وموضعاً فشرده ۱۲

۵.۱ توابع پیوسته باپشتیبان فشرده ۱۵

۶.۱ ایدآل آزاد وایدآل ثابت ۱۷

۷.۱ ایدآل محدب ـ ایدآل مطلقا محدب ـ حلقه ی جزئامرتب ۱۸

۸.۱ فضای فشرده‌ی حقیقی و فضای لیندلوف ۲۳

۲ ایدآل‌های ماکسیمال درحلقه‌ی توابع پیوسته ۲۷

۱.۲ حلقه‌ی توابع پیوسته، صفرـ مجموعه ۲۸

۲.۲ ایدآل‌های ماکسیمال ۲۹

۳.۲ قضیه‌ی گلفاند ـ کولموگورف ۳۲

۴.۲ $C_\infty(X)$ ایدآلی در $C(X)$ ۳۷

۵.۲ $C_\infty(X)$ وایدآلهای مرتبط با آن در$C(X)$ ۴۲

۶.۲ ایدآل‌های O_p و O^p ۴۸

۳ ایدآل‌های مرتبط با توابع پیوسته‌ای که دربینهایت صفر می‌شوند ۵۴

۱.۳ ایدآلهای دیگر از $C(X)$ ۵۵

۲.۳ فضای نرمال ـ فضای تماماًنرمال ۷۵

۳.۳ فضای بئر ۷۶
۴.۳ ایدآلهای اساسی ۸۰

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۸۴

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۹۱

مراجع ۹۸

پیش‌گفتار

یکی از زیباترین پیوندهای جبر و توپولوژی در ساختار $C(X)$ ظاهر می‌شود که متشکل است از تمام توابع پیوسته حقیقی_ مقدار روی فضای توپولوژی X. این ساختار، با دو عمل معمولی جمع و ضرب توابع، تشکیل یک حلقه می‌دهد که به حلقه‌ی توابع پیوسته معروف است. در مبحث حلقه‌ی توابع پیوسته، هدف اصلی، بررسی ارتباط خواص توپولوژیکی X و خواص جبری $C(X)$ است. مطالعه‌ی این حلقه، مانند ان دسته از مباحثی که در محل تلاقی دو شاخه از ریاضیات واقع هستند، زیبا وجذاب است.
صفر_ مجموعه‌ها که نخستین بار در [۱۰] مطالعه شدند، نه‌تنها به‌عنوان پایه‌ی مجموعه‌های بسته‌ی فضاهای کاملاً منظم مطرح بودند بلکه این ابزار توپولوژیکی مبنای پیدایش اشیأ جبری به نام z_ ایدآل شدند که به‌تدریج نقش شگفت‌انگیزی در مطالعه $C(X)$ ایفا کردند. در حقیقت اگر بخواهیم در راستای هدف اصلی در مطالعه‌ی $C(X)$ گام برداریم، ناچاریم تا آنجا که امکان دارد مفاهیم جبری را با کمک ابزار توپولوژیکی ویا برخی ویژگی‌های توپولوژیکی را با کمک اشیاء جبری بیان کنیم. به‌ویژه وقتی بتوانیم نوعی از ایدآل‌ها را هم به‌صورت جبری وهم به‌صورت توپولوژیکی تعریف کنیم، پل‌های ارتباطی مستحکمی میان X و $C(X)$ بنا می‌شود.

اشتراک ایدآل‌های ماکسیمال آزاد و یا اشتراک همه‌ی ایدآل‌های آزاد $C(X)$ نیز اشتراکی از ایدآل‌های اساسی $C(X)$ است و از این رو، ایدآل‌های $C_K(X)$ و $C_\infty(X)$ نیز اشتراک‌هایی از این دست هستند. این ایدآل‌ها ابتدا در [۱۲] و [۱۳] معرفی شدند. $C_K(X)$ عبارت

است از اشتراک همه‌ی ایدآل‌های آزاد $C(X)$ و همین طور اشتراک همه‌ی ایدآل‌های آزاد $C^*(X)$ و $C_\infty(X)$ برابر با اشتراک همه‌ی ایدآل‌های ماکسیمال در $C^*(X)$ است. در این مراجع ، این دو ایدآل به‌طور توپولوژیکی به صورت زیر شناسایی شده‌اند:

$$C_K(X) = \{f \in C(X) : \text{فشرده است} \ cl_X(X \setminus z(f))\},$$

$$C_\infty(X) = \{f \in C(X) : \text{فشرده است} \ n \in \mathbb{N} \ \text{برای هر} \ \{x \in X : |f(x)| \geq \tfrac{1}{n}\}\}.$$

از این تعریف‌ها چنین بر می‌آید که $C_K(X) \subseteq C_\infty(X)$ و $C_K(X)$ هم ایدآلی در $C(X)$ و هم ایدآلی در $C^*(X)$ است، حال آن‌که $C_\infty(X)$ ایدآلی در $C^*(X)$ است و لزوماً ایدآل $C(X)$ نیست. این که چه موقع $C_\infty(X)$ ایدآلی در $C(X)$ هم هست، در [۶] مورد بررسی قرار گرفته است. در واقع، $C_\infty(X)$ یک ایدآل $C(X)$ است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعه‌ی موضعاً فشرده X کراندار باشد، به این معنا که هر $f \in C(X)$ روی آن مجموعه کراندار باشد. درحالت خاص وقتی فضای X گسسته است، $C_K(X)$ برابر با اشتراک ایدآل‌های ماکسیمال آزاد $C(X)$ است. این موضوع در [۱۲] و [۱۳] نشان داده شده واین پرسش را در پی داشته است که آیا این برابری در حالت کلی نیز برقرار است؟ در [۹] ثابت شده است که این برابری به‌ازای فضاهای فشرده‌ی حقیقی درست است وبا یک مثال دیده می‌شود که در حالت کلی درست نیست.

زمانی که به این ایدآل‌ها از دیدگاه اشتراک ایدآل‌های اساسی بنگریم، پرسش‌های دیگری نیز مطرح می‌شود. مثلاً چه موقع ایدآل‌های $C_K(X)$ و $C_\infty(X)$ به ترتیب در $C(X)$ و $C^*(X)$ اساسی هستند؟ در [۵] ثابت شده است که اساسی بودن هر کدام از این ایدآل‌ها معادل است با اینکه فضای X تقریباً فشرده باشد، یعنی فضای هاسدورفی که هر زیرمجموعه‌ی ناتهی و باز آن شامل یک مجموعه‌ی باز ناتهی با بستار فشرده است.

فصل ۱
مباحث مقدماتی

مقدمه

در این فصل ، هر آنچه که برای فهم بهتر این پایان نامه مورد نیاز است از مفاهیم گرفته تا قضایا و غیره آورده شده است.

۱.۱ توپولوژی

تعریف ۱.۱.۱ . فضای توپولوژی X را هاسدروف یا T_2 می‌گوییم، هرگاه برای هر دو نقطه‌ی متمایز $x,y \in X$، دو مجموعه‌ی باز و مجزای G و H در X وجود داشته باشند، که $x \in H, x \in G$. به عبارت دیگر، X یک فضای هاسدروف است، هرگاه هر دونقطه‌ی متمایز در آن را بتوان با دو مجموعه‌ی باز مجزا از هم جدا کرد. بدیهی است که هر فضای هاسدورف همواره T_1 است.

تعریف ۲.۱.۱. فضای توپولوژی X را T_1 گوییم، هرگاه به ازای دو نقطه متمایز $x,y \in X$ دو مجموعه باز مانند G و H، به ترتیب شامل x و y موجود باشد به‌طوری‌که $y \notin G$ و $x \notin H$.

تعریف ۳.۱.۱. فضای توپولوژی X را کاملاً منظم می‌نامیم، هرگاه برای هر مجموعه‌ی

بسته‌ی F در X و هر $x \notin F$ تابع پیوسته‌ی $f : X \to [0,1]$ وجود داشته باشد، که $f(F) = \{0\}$ و $f(x) = 1$.

در تعریف بالا می‌توان هر تابع حقیقی پیوسته روی X به جای یک تابع پیوسته با برد $[0,1]$ در نظر گرفت به‌طوری‌که $f(F) = \{a\}$، $f(x) = \{b\}$. زیرا کافی است تابع $g : X \to [a,b]$ را با ضابطه‌ی $g(n) = \frac{f(n)-a}{b-a}$ تعریف کنیم. در این صورت به روشنی داریم؛ $g(F) = \{0\}$، $g(x) = 1$.

تعریف ۴.۱.۱. دو مجموعه‌ی A و B در فضای توپولوژی X را کاملاً مجزا گوییم هرگاه تابعی پیوسته مانند $f : X \to \{0,1\}$ موجود باشد که $f(A) = \{0\}$ و $f(B) = \{1\}$.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژی باشد. مجموعه‌ی $A \subseteq X$ را یک G_δـ مجموعه (یا از نوع G_δ)می‌نامیم، هرگاه به صورت اشتراک شمارایی از مجموعه‌های باز باشد، یعنی ، $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ که برای هر $n \in \mathbb{N}$، G_n یک مجموعه باز X است.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژی باشد. مجموعه‌ی $A \subseteq X$ را یک F_σـ مجموعه (یا از نوع F_σ)می‌نامیم، هرگاه به صورت اجتماع شمارش‌پذیری از مجموعه‌های بسته باشد، یعنی ، $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ که برای هر $n \in \mathbb{N}$، G_n یک مجموعه بسته X است.

تعریف ۷.۱.۱. هرگاه (X,τ) یک فضای توپولوژی باشد، آنگاه $x \in X$ رانقطه‌ی منفرد گوییم هرگاه $\{x\} \in \tau$.

تعریف ۸.۱.۱. فضای (X,τ) را σـ فشرده می‌نامیم، هرگاه X به صورت اجتماع شمارایی از زیرمجموعه‌های فشرده‌ی X نوشته شود.

تعریف ۹.۱.۱. اشتراک همه‌ی ایدآل‌های ماکسیمال آزاد $C(X)$ را با $I(X)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۱.۱. گردایه‌ی تمام توابع پیوسته روی X که پشتیبان شبه‌فشرده دارند را با $C_\psi(X)$ نمایش می‌دهیم و گردایه‌ی تمام توابع پیوسته روی X که پشتیبان فشرده دارند را با $C_K(X)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۱.۱. وقتی که $C_\psi(X) = I(X)$، آنگاه X را یک فضای ηــ فشرده گوییم.

تعریف ۱۲.۱.۱. وقتی که $C_K(X) = I(X)$ آنگاه گوییم X، یک فضای μــ فشرده است.

تعریف ۱۳.۱.۱. فضای X فضایی ψــ فشرده است، هرگاه هر پشتیبان شبه‌فشرده در X فشرده باشد.

تعریف ۱۴.۱.۱. فضای $(X,\ \tau)$ که در هر نقطه $x \in X$ یک پایه‌ی موضعی شمارا داشته باشد، فضای شمارای نوع اول نامیده می‌شود.

تعریف ۱۵.۱.۱. یک مجموعه را هیچ‌جا چگال گوییم هرگاه درون بستار آن تهی باشد.

تعریف ۱۶.۱.۱. فضایی که پایه‌ی شمارا داشته باشد، فضای شمارای نوع دوم نامیده می‌شود. به عبارت دیگر، هرگاه توپولوژی فضای X دارای پایه‌ای شمارا باشد، گوییم X در دومین اصل شمارایی صدق می کند.

تعریف ۱۷.۱.۱. حلقه‌ی جابجایی R را منظم گوییم هرگاه برای هر $a \in R$ عنصری مانند $x \in R$ موجود باشد به طوری که $a = a^۲x$.

تعریف ۱۸.۱.۱. به مجموعه‌ی Y در X کراندار گفته می‌شود، هرگاه برای هر $f \in C(X)$، $f(Y)$ یک مجموعه‌ی کراندار در $\mathbb{R}$ باشد.

۲.۱ زیر فضاهای Cـ نشانده و C^*ـ نشانده

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم S یک زیرفضای X باشد. S را یک زیرفضای Cـ نشانده‌ی [1] X می‌نامیم هرگاه، هر تابع $C(S)$ قابل توسیع به یک تابع از $C(X)$ باشد. به طور مشابه S را یک C^*ـ نشانده‌ی [2] X می‌نامیم، هرگاه هر تابع $C^*(S)$ قابل توسیع به تابعی از $C^*(X)$ باشد.

تعریف ۲.۲.۱. همسایگی صفرـ مجموعه‌ای: $Z \in Z(X)$ را یک همسایگی صفرـ مجموعه‌ای از $x \in X$ گوییم هرگاه $x \in intZ$.

قضیه ۳.۲.۱. *دو مجموعه کاملاً مجزا هستند اگر وتنها اگر در دو صفرـ مجموعه‌ی مجزا قرار گیرند.*

برهان. فرض کنیم که A و B کاملا مجزا باشند، بنابراین $f \in C^*(X)$ موجود است که $f(A) = \{۱\}, f(B) = \{۰\}$. قرار می‌دهیم؛

$$A^* = \{x \in X : f(x) \geq \frac{۲}{۳}\} \quad و \quad B^* = \{x \in X : f(x) \leq \frac{۱}{۳}\}$$

واضح است که A^* وB^* دو صفرـ مجموعه‌ی مجزا هستند وداریم، $A \subseteq intA^* \subseteq A^*$ و $B \subseteq intB^* \subseteq B^*$. به عکس، فرض کنیم که A و B در صفر مجموعه‌های مجزای $Z_۱$ و $Z_۲$ قرار دارند. همچنین فرض کنیم که،

$$Z_۱ = Z(g_۱) \quad , Z_۲ = Z(g_۲) \quad , \quad A \subseteq Z_۱ \quad , \quad B \subseteq Z_۲$$

قرارمی‌دهیم $h = \frac{{g_۱}^۲}{{g_۱}^۲ + {g_۲}^۲}$، بدیهی است که $h \in C^*(X)$ و $h(A) = \{۰\}, h(B) = \{۱\}$. $\square$

[1] $C - Embeded$
[2] $C^* - Embeded$

نتیجه ۴.۲.۱. *از قسمت اول قضیه‌ی ۳.۲.۱ ، نتیجه می‌شود که مجموعه‌های کاملاً مجزا دارای همسایگی‌های صفرـ مجموعه‌ای مجزا هستند.*

نتیجه ۵.۲.۱. *هر دو صفر مجموعه‌ی مجزا، کاملاً مجزا هستند.*

قضیه ۶.۲.۱. قضیه‌ی توسیع یوریسون: [۳] *زیر فضای S ازفضای X در X ، C^* ـ نشانده است اگر وتنها اگر هردو مجموعه‌ی کاملاً مجزا در S، در X نیز کاملاً مجزا باشند.*

برهان. به صفحه‌ی ۱۸ مرجع [۹] مراجعه شود. □

قضیه ۷.۲.۱. *یک زیرمجموعه‌ی C^*ـ نشانده، Cـ نشانده است اگر و تنها اگر با هر صفرـ مجموعه‌ی مجزا با خود، کاملاً مجزا باشد.*

برهان. فرض کنیم که زیرمجموعه‌ی S در X، یک C^*ـ نشانده باشد. همچنین فرض می‌کنیم که $Z(h)$ صفرـ مجموعه‌ای است که با S مجزا باشد و نشان می‌دهیم که $Z(h)$ و S کاملاً مجزا هستند.

تابع $f : S \to \mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی $f(S) = \frac{1}{h(S)}$ تعریف می‌کنیم. چون S و $Z(h)$ مجزا هستند، این تابع پیوسته است. بنا به فرض ، $g \in C(X)$ موجود است که $g|_S = f$. تابع gh متعلق به $C(X)$ است و واضح است که $gh(Z(h)) = \{0\}$ و $gh(S) = \{1\}$، درنتیجه $Z(h)$ و S کاملاً مجزا هستند.

به عکس، فرض می‌کنیم که S با هر صفرـ مجموعه‌ی مجزا با خود کاملاً مجزا است، نشان می‌دهیم که Cـ نشانده است. گیریم که $f : S \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد، واضح است که $tan^{-1} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ تابعی در $C^*(\mathbb{R})$ است. در نتیجه $tan^{-1}of$ تابعی در $C^*(S)$ خواهد بود وطبق فرض دارای توسیعی مانند g در $C^*(X)$ است.

[۳] Urysohn's Extension Theorem

مجموعه‌ی $Z = \{x \in X : |g(x)| \geq \frac{\pi}{2}\}$، صفرـ مجموعه‌ای در $Z(X)$ است که با X مجزا است. بنابه فرض ، S و Z کاملاً مجزا هستند. در نتیجه تابعی پیوسته مانند $h : X \to [0, 1]$ موجود است که $h(S) = \{1\}, h(Z) = \{0\}$.

حال نشان می‌دهیم $tano(gh)$ که تابعی پیوسته است، توسیع f روی X می‌باشد.

$$\forall t \in S, tano(gh)(t) = tan(g(t).h(t)) = tan(g(t)) = tan(tan^{-1}of(t)) = f(t)$$ $\square$

نتیجه ۸.۲.۱. *اگر (X, d) یک فضای متریک باشد، آنگاه هر مجموعه‌ی بسته‌ی E در آن یک صفرـ مجموعه است.*

برهان. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک و E زیرمجموعه‌ی بسته‌ی آن باشد. تابع $f : X \to \mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی $f(x) = d(x, E) = inf\{d(x, a) : a \in E\}$ در نظر می‌گیریم، به‌وضوح f پیوسته است ؛ یعنی $f \in C(X)$ و بنابراین،

$$x \in Z(f) \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow d(x, E) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{E} = E$$

$\square$

نتیجه ۹.۲.۱. *هر مجموعه‌ی بسته در یک فضای متریک C^*ـ نشانده است.*

برهان. فرض کنیم که S یک مجموعه‌ی بسته در فضای متریک X، و مجموعه های E وF در S کاملاً مجزا باشند. $cl_S E$ و $cl_S F$ در S بسته اند وبدلیل بسته بودن S ، در X نیز بسته اند. چون E و F کاملا مجزا هستند بنابراین $cl_S F \bigcap cl_S E = \varnothing$.

حال چون X یک فضای متریک است ، $cl_S E$ و $cl_S F$ دو صفرـ مجموعه هستند. بنا به نتیجه‌ی ۵.۲.۱، در X کاملاً مجزا می باشند. درنتیجه E و F در X کاملاً مجزا هستند وبنا به قضیه‌ی ۶.۲.۱، اثبات تمام است. $\square$

نتیجه ۱۰.۲.۱. *هر مجموعه‌ی بسته در $\mathbb{R}$ ، Cـ نشانده است.*

برهان. گیریم مجموعه‌ی S در $\mathbb{R}$ بسته باشد. بنا به نتیجه‌ی ۹.۲.۱، مجموعه‌ی S، Cـ نشانده است. حال فرض کنیم که Z یک صفر ـ مجموعه‌ی مجزا با S باشد. بنا به گزاره‌ی ۸.۲.۱،S یک صفرـ مجموعه است. در نتیجه Z و F دو صفرـ مجموعه‌ی مجزا هستند وبنا به نتیجه‌ی ۵.۲.۱، کاملاً مجزا می‌باشند. حال بنابه قضیه‌ی ۷.۲.۱، S در $\mathbb{R}$، Cـ نشانده است. □

قضیه ۱۱.۲.۱. *فرض کنیم که S زیرمجموعه‌ای از فضای توپولوژی X باشد. اگر تابعی مانند $h \in C(X)$ یافت شود که S را همریخت وار به زیرمجموعه‌ای بسته از R تصویر کند، آنگاه S در X ، Cـ نشانده خواهد بود.*

برهان. قرار می دهیم $\theta = (h|_S)^{-1}$، واضح است که θ تابعی پوشا از $H = h(S)$ به S است و برای هر $t \in S$ داریم $(\theta \circ H) = t$ حال اگر $f : S \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد، آنگاه $(f \circ \theta) \in C(H)$. چون H در $\mathbb{R}$ بسته است بنا به نتیجه‌ی ۱۰.۲.۱، Cـ نشانده می باشد. فرض کنیم که $g \in C(\mathbb{R})$ توسیع $f \circ \theta$ باشد. $g \circ h$ تابعی در $C(X)$ است و $(g \circ h)|_S = f$ زیرا،

$$\forall t \in S \ , \ (g \circ h)(t) = g(h(t)) = (f \circ \theta)(h(t)) = f((\theta \circ h)(t)) = f(t)$$

. □

نتیجه ۱۲.۲.۱. *هرگاه $E \subseteq X$ و $h \in C(X)$ موجود باشد که تابع h روی E بی‌کران باشد، آنگاه E شامل نسخه‌ای از $\mathbb{N}$ است که آن نسخه در X یک Cـ نشانده است.*

برهان. برای $i \in \mathbb{N}$، عنصر $x_1 \in E$ موجود است که $|h(x_1)| \geq 1$ فرض کنیم $h(x_1) = r_1$، باز هم عنصر $x_2 \in E$ وجود دارد که $|h(x_1)| \geq r_1$، گیریم $h(x_2) = r_2$، با استقرا فرض کنیم $h(x_n) = r_n$ در این صورت $x_{n+1} \in E$ وجود دارد که $|h(x_{n+1})| > r_n$

قرار می‌دهیم $h(x_{n+1}) = r_{n+1}, \dots$

قرار می‌دهیم $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ و $h^{-1}(-\infty, r_2) \bigcap S = \{x_1\}$ و $\{x_1\}$ باز در S و $h^{-1}(-\infty, r_2)$ باز در X و $h(r_1, r_3) \bigcap S = \{x_2\}$ و $\dots$

چون $\mathbb{N}$ در $\mathbb{R}$ بسته است و S توسط یکی از عناصر $C(X)$ همریخت وار به $\mathbb{N}$ تصویر می‌شود، پس S بنا به قضیه ی ۱.۲.۱۱ یک Cــ نشانده است. □

۳.۱ zــ پالایه‌ها و zــ ایدال‌ها

تعریف ۱.۳.۱ . یک زیرمجموعه ناتهی از $Z(X)$ مانند $\mathcal{F}$ را یک zــ پالایه روی X می‌گوییم، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

(۱) $\phi \notin \mathcal{F}$

(۲) اگر Z_1 و Z_2 در $\mathcal{F}$ باشند، آن‌گاه $Z_1 \cap Z_2$ نیز متعلق به $\mathcal{F}$ باشد.

(۳) اگر $Z \in \mathcal{F}$ و $Z' \in Z(X)$ به‌طوری‌که $Z \subseteq Z'$، آن‌گاه $Z' \in \mathcal{F}$.

تعریف ۲.۳.۱ . zــ پالایه $\mathcal{F}$ را یک zــ ابر پالایه روی X می‌نامیم هرگاه بین تمام zــ پالایه های X، ماکسیمال باشد.

قضیه ۳.۳.۱. (۱) *فرض کنیم M یک ایدال $C(X)$ باشد. اگر صفرــ مجموعه‌ی $Z(f)$ تمام عناصر $Z[M]$ را قطع کند آن‌گاه $f \in M$.*

(۲) فرض کنیم $\mathcal{F}$ ، یک zــ ابر پالایه باشد.اگر صفرــ مجموعه‌ی Z_0 تمام عناصر $\mathcal{F}$ را قطع کند، آن‌گاه $Z_0 \in \mathcal{F}$.

برهان. به قضیه‌ی (۶ − ۲) مرجع [۹] مرجعه کنید. □

تعریف ۴.۳.۱. ایدآل سره‌ی I از حلقه‌ی R را ایدآل اول می‌گوییم، هرگاه به ازای هر $a,b \in R$، اگر $ab \in I$ آنگاه $a \in I$ یا $b \in I$، به عبارت دیگر، به ازای هر دوایدآل A و B از R ، اگر $AB \subseteq I$ آنگاه $A \subseteq I$ یا $B \subseteq I$.

تعریف ۵.۳.۱. ایدآل I در $C(X)$ را zـ ایدآل گوییم هرگاه $Z(f) \in Z[I]$ ایجاب کند که $f \in I$

قضیه‌ی زیر بیان می کندکه هر zـایدآل شامل یک ایدآل اول، خود اول است.

قضیه ۶.۳.۱. *برای هر zـ ایدآل در $C(X)$ گزاره‌های زیر با هم معادلند.*

۱) *I اول است.*

۲) *I شامل ایدآلی اول است.*

۳) *اگر g, f متعلق به $C(X)$ باشند و داشته باشیم $fg = \circ$ آنگاه $f \in I$ یا $g \in I$.*

۴) *برای هر $h \in C(X)$، تابع $f \in I$ موجود است به‌طوری‌که h روی $Z(f)$ تغییر علامت ندهد(نامنفی و یا نامثبت است).*

برهان. (۱) $\Leftarrow$ (۲) بدیهی است .

(۲) $\Leftarrow$ (۳) اگر P ایدآلی اول باشد و $P \subseteq I$ آنگاه $fg = \circ \in P$ و در نتیجه $f \in P \subseteq I$ یا $g \in P \subseteq I$ بنابراین $f \in I$ یا $g \in I$.

(۳) $\Leftarrow$ (۴) توجه می‌کنیم که برای هر $h \in C(X)$ داریم، $(h+|h|)(h-|h|) = \circ$ بنابه (۳) حداقل یکی از دو تابع $h+|h|$ و $h-|h|$ در I قراردارد. واضح است که h روی $Z(h)+|h|)$ نامثبت و روی $Z(h-|h|)$ نامنفی است.

(۴) $\Leftarrow$ (۱) فرض کنیم $fg \in I$. باید نشان دهیم که حداقل یکی از دو تابع f,g در I قراردارد. تابع $|f|-|g|$ را در نظر می‌گیریم بنا به (۴)، تابع $h \in I$ موجود است که $|f|-|g|$ روی $Z(h)$ نامنفی و یا روی آن نامثبت است. اگر $|f|-|g|$ روی $Z(h)$ نامنفی

باشد، آنگاه $g((Z(f)\bigcap Z(h)) = \{0\}$ در نتیجه $Z(g)$ شامل $Z(f)\bigcap Z(h)$ است و بنابراین می‌توان نوشت، $Z(h)\bigcap((Z(f)\bigcap Z(h)) \subseteq Z(g)$. اما با توجه به اینکه،

$$Z(f^2g^2+h^2) = Z(h)\bigcap(Z(f)\cup Z(g))$$

و چون $f^2g^2+h^2 \in I$ درنتیجه $Z(g) \in Z[I]$. حال zـ ایدآل بودن I ایجاب می‌کند که $g \in I$. در صورتی که $|f|-|g|$ روی $Z(h)$ نامثبت باشد، به روش مشابه داریم، $f \in I$ □

۴.۱ فضاهای فشرده وموضعاً فشرده

تعریف ۱.۴.۱. فضای توپولوژی X را فشرده می‌گوییم، هرگاه هر پوشش باز X، دارای یک زیرپوشش متناهی باشد، یا به طور معادل ، هرگاه اشتراک هر خانواده از زیرمجموعه‌های بسته X با خاصیت اشتراک متناهی، ناتهی باشد.

قضیه ۲.۴.۱. *هر مجموعه‌ی بسته در یک فضای فشرده، فشرده است.*

برهان. فضای X را فشرده و $A \subseteq X$ را در X بسته می‌گیریم. پوشش باز $\mathcal{C}$ را برای A در نظر می‌گیریم ومجموعه‌ی باز $X\setminus A$ را به این پوشش اضافه می‌کنیم. در این صورت $\mathcal{C}\bigcup\{X\setminus A\}$ یک پوشش باز برای X است؛ در واقع، $X = (X\setminus A)\bigcup A = (X\setminus A)\bigcup(\bigcup_{G\in\mathcal{C}} G)$. از آنجا که X فشرده است، پس $\mathcal{C}\bigcup\{X\setminus A\}$ دارای یک زیرپوشش متناهی، مثلا $\{G_1, G_2, ..., G_n\}$ برای X است؛ یعنی $X = \bigcup^n{}_{i=1} G_i$. اگر $X\setminus A$ را از این پوشش برداریم(در صورتی که متعلق به این زیر پوشش باشد)،آنگاه مابقی که از عناصر $\mathcal{C}$ هستند مجموعه‌ی A را می‌پوشانند؛ یعنی، $\mathcal{C}$ دارای یک زیرپوشش متناهی برای A است و بنابراین A فشرده است. □

قضیه ۳.۴.۱. *اگر X و Y دو فضای توپولوژی، $f: X \to Y$ یک تابع پیوسته و $A \subseteq X$ در X فشرده باشد، آنگاه $f(A)$ نیز در Y فشرده است.*

برهان. $\mathcal{C} = \{H_\alpha : \alpha \in S\}$ را یک پوشش باز در Y برای $f(A)$ در نظر می‌گیریم، پس $f(A) \subseteq \cup_{\alpha\in S} H_\alpha$. چون f پیوسته است، برای هر $\alpha \in S$، $f^{-۱}(H_\alpha)$ در X باز است و اگر $x \in A$، آنگاه $f(x) \in f(A)$ و در نتیجه $\alpha \in S$ وجود دارد که $f(x) \in H_\alpha$. از این رو $x \in f^{-۱}(H_\alpha)$ و بنابراین $A \subseteq \cup_{\alpha\in S} f^{-۱}(H_\alpha)$؛ یعنی، $\{f^{-۱}(H_\alpha) : \alpha \in S\}$ یک پوشش باز برای A است. چون A فشرده است، این پوشش دارای یک زیرپوشش متناهی برای A است، مثلاً فرض کنیم $A \subseteq \cup_{i=۱}^{n} f^{-۱}(H_\alpha)$. اکنون به سادگی نتیجه می‌شود که $f(A) \subseteq \cup_{i=۱}^{n} H_{\alpha_i}$ و بنابراین $\{H_{\alpha_i} : i = ۱, ۲. \ldots, n\}$ یک زیرپوشش متناهی از $\mathcal{C}$ برای $f(A)$ می باشد؛ یعنی، $f(A)$ فشرده است. $\square$

گزاره ۴.۴.۱. *اگر X فضایی فشرده و $f : X \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد، آنگاه f کراندار است.*

برهان. از آنجا که $f(X) \subseteq \mathbb{R}$، می نوان نوشت $f(X) \subseteq \cup_{n\in N}(-n, n)$.لذا

$$X \subseteq f^{-۱}(f(X)) \subseteq f^{-۱}(\cup_{n\in N}(-n, n)) = \cup_{n\in N} f^{-۱}(-n, n)$$

با توجه به پیوستگی تابع f، خانواده‌ی $\{f^{-۱}(-n, n)\}_{n\in N}$ یک پوشش باز X بوده، از آنجا که X فشرده است، یک زیر پوشش متناهی، مانند $\{f^{-۱}(-n, n)\}_{n=۱}^{k}$ دارد. بنابراین

$$X = \cup_{n=۱}^{k} f^{-۱}(-n, n) = f^{-۱}(\cup_{n=۱}^{k}(-n, n)) = f^{-۱}(-k, k)$$

و در نتیجه $f(X) \subseteq (-k, k)$، پس f کراندار است. $\square$

تعریف ۵.۴.۱. فضای X را شبه‌فشرده گوییم هرگاه هر تابع در $C(X)$، کراندار باشد. به عبارت دیگر هرگاه داشته باشیم $C(X) = C^*(X)$

لم ۶.۴.۱. *هر فضای فشرده، شبه فشرده است.*