دانشگاه شهرکرد

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی- گرایش جبر

موضوع :

متمم پذیری برخی زیرگروهها و ساختار گروه متناهی

استاد راهنما :

دکتر غلامرضا رضایی‌زاده

استاد مشاور :

دکتر محمدرضا ریسمانچیان

توسط :

معصومه سجادی

اسفند ۱۳۸۶

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی گرایش جبر

معصومه سجادی

تحت عنوان

تأثیر شرایط اعمال شده بر برخی زیر گروه ها روی ساختار گروه متناهی

در تاریخ ۱۳۸۶/۱۲/۴ توسط هیات داوران زیر و با درجه عالی به تصویب نهایی رسید .

۱- استاد راهنمای پایان نامه دکتر غلامرضا رضایی زاده با مرتبه علمی استادیار امضاء

۲- استاد مشاور پایان نامه دکتر محمد رضا ریسمانچیان با مرتبه علمی استاد یار امضاء

۳- استاد داور داخل گروه دکتر علیرضا نقی پور با مرتبه علمی استاد یار امضاء

۴- استاد داور خارجی دکتر علیرضا عبدالهی با مرتبه علمی دانشیاری از دانشگاه اصفهان امضاء

۵- نماینده تحصیلات تکمیلی دکتر علی مختاری با مرتبه علمی استاد یار امضاء

دکتر محمد مردانی

معاون پژوهشی و تحصیلات تکمیلی

دانشکده علوم پایه

تقدیم به

آنان که اندیشیدن را دوست دارند

بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم

در آغاز « **الحمدلله رب العالمین** »

خدایا ! به من عطا نمودی نعمت علم‌آموزی از اساتیدی را که در عین بزرگی، خاشعانه می‌آموختند و تو را سپاسگزارم.

تو را سپاسگزارم که به بهانه انجام این طرح افتخار همراهی استاد بزرگوارم، دکتر غلامرضا رضایی‌زاده را نصیبم نمودی تا هم از علم و هم از اخلاق ایشان بیاموزم، از ایشان تشکر می‌کنم که راهنمایی من در این طرح را پذیرا شدند و به شیوه‌ای هنرمندانه مرا طوری هدایت کردند که درگیر با آنچه شوم که آینده برای آموختنش دیر بود، به خاطر همه چیزهایی که در این مدت آموختم از ایشان تشکر می‌کنم.

از اساتید بزرگوارم دکتر محمدرضا ریسمانچیان که از راهنماییهایشان هیچ‌گاه بی‌بهره نبودم، از دکتر علیرضا نقی‌پور که در طول تحصیلم همیشه و همیشه راهنما و پاسخگوی سوالات من بودند، از دکتر خدابخش حسامی به خاطر کمک و همراهی ایشان در حل مشکلاتی که داشتم و همین‌طور از بقیه عزیزان در گروه ریاضی بی‌نهایت سپاسگزارم و اما

دستان آرام جانم، **مادرم** و سایه سرم، **پدرم** را می‌بوسم

که بی وجود آنها هیچ پله‌ای را نمی‌توانستم بالا روم. پروردگارا روح بلند شهدای اسلام، آنان که رفتند تا ما آسوده خاطر زندگی کنیم و آزادانه بیندیشیم را متعالی بگردان و ما را شکرگزار نعمت هایی که به ما عطا نمودی قرار ده. در پایان

« **اهدنا الصراط المستقیم** »

آمین یا رب‌العالمین

معصومه سجادی

چکیده

در این پایان نامه همه گروهها را متناهی در نظر می‌گیریم و به بررسی تاثیر خواص برخی از زیرگروهها روی ساختار گروه متناهی می‌پردازیم.

زیرگروه H از گروه متناهی G متمم‌پذیر در G نامیده می‌شود اگر زیرگروه K از G چنان موجود باشد که $G=HK$ و $H\cap K=1$. در فصل دوم نتایجی راجع به p-پوچتوانی و فوق‌حلپذیری گروه G تحت فرض متمم‌پذیری برخی از زیرگروههای مینیمال و ماکسیمال بیان می‌کنیم.

زیرگروه K از گروه متناهی G، $\mathscr{H}$-زیرگروه نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $g\in G$ داشته باشیم $N_G(K)\cap K^g\le K$. در فصل سوم روی $\mathscr{H}$-زیرگروهها متمرکز می‌شویم و دوباره نتایجی راجع به فوق‌حلپذیری و p-پوچتوانی گروه G ارائه می‌کنیم.

فهرست مطالب

فهرست نمادها

متعلق است به	$\in$
زیرمجموعه	$\subseteq$
زیرمجموعه سره	$\subset$
وجود دارد	$\exists$
به ازای هر	$\forall$
اشتراک	$\cap$
حاصل ضرب مستقیم	$\times$, $\prod$
یکریختی	$\cong$
تهی	ϕ
بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b	(a,b)
فرم	$\mathfrak{I}$
زیرگروه	$\leq$
زیرگروه سره	$<$
زیرگروه نرمال	$\lhd$
زیرگروه زیرنرمال	$\lhd\lhd$
مجموعه p-زیرگروههای سیلوی G	$\mathrm{Syl}_p(G)$
تعداد اعضای G	$\|G\|$
مرتبه عنصر x	$\mathrm{O}(x)$
مرتبه گروه G	$\mathrm{O}(G)$

گروه خارج قسمت G/H	G/H
گروه تولید شده توسط a	$\langle a\rangle$
گروه دوری از مرتبه p	C_p
گروه جابه‌جاگر A و B	$[A,B]$
مزدوج A	$A^x = xAx^{-1}$
زیرگروه مشتق G	G'
مشتق nام G	$G^{(n)}$
شاخص H در G	$\lvert G:H\rvert$, $[G:H]$
مرکزساز زیرگروه H در گروه G	$C_G(H)$
نرمالساز زیرگروه H در گروه G	$N_G(H)$
مرکز گروه G	$Z(G)$
زیرگروه فیتینگ	$F(G)$
زیرگروه فیتینگ عمومی‌شده	$F^*(G)$
زیرگروه فراتینی	$\Phi(G)$
زیرگروه نرمال نیم‌ساده ماکسیمال	$E(G)$
H زیرگروه مشخصه از G است	H char G
مجموعه خودریختیهای G	$\mathrm{Aut}(G)$
هسته همریختی φ	$\mathrm{Ker}\varphi$
مجموعه $\mathscr{H}$-زیرگروههای G	$\mathscr{H}(G)$
مجموعه زیرگروههای ماکسیمال G	$\mathscr{M}(G)$
مجموعه زیرگروههای نرمال G	$\mathscr{N}(G)$
مجموعه زیرگروههای خودنرمالساز G	$\mathscr{SN}(G)$

پیشگفتار

از سالها پیش ریاضیدانان به بررسی تاثیر شرایط اعمال شده روی زیرگروهها بر ساختار گروه پرداخته‌اند. آنها به این نتیجه رسیدند که برخی از زیرگروهها مثل زیرگروههای مینیمال می‌توانند تاثیر به‌سزایی روی ساختار گروه داشته باشند. به عنوان مثال هال[1] در [۱۷] ثابت کرد گروه متناهی G فوق‌حلپذیر با زیرگروههای سیلوی آبلی مقدماتی است اگروتنهااگر هر زیرگروه از G متمم‌پذیر باشد و بعد در سال ۱۹۹۷ بالستر- بولینچس[2] و ژون[3] در [۵] ثابت کردند هر زیرگروه از G متمم‌پذیر است اگروتنهااگر هر زیرگروه مینیمال از G متمم‌پذیر باشد و ترکیب این دو قضیه نشان داد کلاس گروههای فوق‌حلپذیر با زیرگروههای سیلوی آبلی مقدماتی همان کلاس گروههایی است که زیرگروههای مینیمال آنها متمم‌پذیر می‌باشند. پس از آن فرضیات را خود را محدود به متمم‌پذیری دسته کوچکتری از زیرگروههای مینیمال در زیرگروهی از G، همچون $N_G(P)$ کردند و نتایجی راجع به فوق‌حلپذیری گروه G به‌دست آوردند. ما در این طرح پس از آشنایی با گروههای فوق‌حلپذیر و p-پوچتوان، برخی از این نتایج را در فصل دوم بیان می کنیم، همین‌طور راجع به متمم پذیری زیرگروههای ماکسیمال نیز قضایایی مطرح می‌کنیم که فوق حلپذیری و p-پوچتوانی گروه G را به‌دست می‌دهند. در ادامه، در فصل سوم مطالعات خود را روی دسته دیگری از زیرگروههای G یعنی $\mathscr{H}$-زیرگروهها متمرکز می‌کنیم و رابطه آنها را با فوق‌حلپذیری و p-پوچتوانی گروه G تحت شرایط خاص مورد مطالعه قرار می‌دهیم. به عنوان نمونه نشان می‌دهیم اگر P، p-زیرگروه سیلو از G باشد، آن‌گاه G، p-پوچتوان است اگروتنهااگر $N_G(P)$، p-پوچتوان باشد و هر زیرگروه ماکسیمال از P متعلق به $\mathscr{H}(G)$ باشد. همین‌طور در قضیه۳-۳-۹ نشان می‌دهیم اگر G، SSA-گروه باشد، آن‌گاه G فوق‌حلپذیراست اگروتنهااگر هر زیرگروه سیلو از G به صورت حاصل ضرب $\mathscr{H}$-زیرگروههای دوری از G نوشته شود. در پایان زیرگروه فیتینگ تعمیم‌یافته گروه G را معرفی می‌کنیم و ثابت می‌کنیم اگر هر زیرگروه ماکسیمال از هر زیرگروه سیلو از آن متعلق به $\mathscr{H}(G)$ باشد، آن‌گاه $\mathscr{H}(G)$ فوق‌حلپذیر است.

[1] Hall
[2] Ballester-Bolinches
[3] Xiuyun

فصل ۱

مقدمات و قضایای پیشنیاز

۱-۱ زیرگروههای سیلو

قضیه۱-۱-۱ (قضیه اول سیلو) فرض کنیم G گروهی از مرتبه $p^n m$ باشد که در آن $n \geq 1$، p یک عدد اول است و $(p,m)=1$. در این‌صورت به ازای هر i، $1 \leq i \leq n$، G شامل زیرگروهی از مرتبه p^i می‌باشد. به علاوه هر زیرگروه از G با مرتبه p^i ($1 \leq i \leq n$) در یک زیرگروه با مرتبه p^{i+1} نرمال است.

اثبات. ر. ک. [۲۸]، ص ۱۹۹.

قضیه۱-۱-۲ (قضیه دوم سیلو) اگر H یک p-زیرگروه از گروه متناهی G و P هر p-زیرگروه سیلو از G باشد، آن‌گاه عنصر $x \in G$ چنان موجود است که $H \leq xPx^{-1}$. به‌ویژه هر دو p-زیرگروه سیلو از G مزدوجند.

اثبات. ر. ک. [۲۸]، ص ۲۰۰.

نتیجه۱-۱-۳ فرض کنید G گروهی متناهی و $P \in Syl_p(G)$، در این‌صورت تعداد p-زیرگروههای سیلوی G برابر است با $[G:N_G(P)]$.

اثبات :

با توجه به قضیه دوم سیلو تعداد p-زیرگروههای سیلوی G برابر است با تعداد مزدوجهای P در G و تعداد مزدوجهای P برابر است با $[G:N_G(P)]$ ، لذا حکم به اثبات می‌رسد. ■

قضیه ۱-۱-٤ (قضیه سوم سیلو) فرض کنید G گروهی متناهی و p عدد اول شمارنده مرتبه G باشد. اگر n_p تعداد p-زیرگروههای سیلوی G باشد، آن‌گاه $n_p||G|$ و $n_p \equiv 1 \pmod p$.

اثبات : ر. ک. [۲۸]، ص۲۰۱. ■

قضیه ۱-۱-٥ فرض کنیم G گروه متناهی باشد، $N \lhd G$ و $N \leq M \leq G$، در این‌صورت $M/N \in \mathrm{Syl}_p(G/N)$ اگروتنهااگر $M = PN$ که در آن $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$.

اثبات : ر. ک. [۲۷]، ص۷۶. ■

قضیه ۱-۱-٦ فرض کنیم G گروهی متناهی و p عدد اول و N زیرگروه نرمالی از G باشد، در این‌صورت هر p-زیرگروه سیلو از N به صورت $P \cap N$ است طوری‌که $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$.

اثبات :

ابتدا فرض می‌کنیم P، p-زیرگروه سیلو از G باشد. در این‌صورت $P \cap N$، p-زیرگروه از N خواهد بود پس طبق قضیه دوم سیلو مشمول در p-زیرگروه سیلو از N چون P_1 می‌باشد و عنصر x از G چنان موجود است که $P_1 \leq P^x$، پس $P \cap N \leq P_1 \leq P^x$ و در نتیجه $P \cap N \leq P_1 \leq P^x \cap N = (P \cap N)^x$. از آن‌جا که $|(P \cap N)^x| = |P \cap N|$، نتیجه می‌شود که $P \cap N = P_1$، پس $P \cap N \in \mathrm{Syl}_p(N)$. برعکس، فرض کنیم $P_1 \in \mathrm{Syl}_p(N)$. اما P_1 مشمول در p-زیرگروه سیلو از G چون P می‌باشد پس $P_1 \subseteq P \cap N$ و چون طبق قسمت قبل $P \cap N \in \mathrm{Syl}_p(N)$، نتیجه می‌شود $P_1 = P \cap N$. ■

قضیه ۱-۱-۷ فرض کنیم $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ و $H \leq G$. اگر $|G:H|$ توان مثبتی از p باشد، آن‌گاه $H \cap P$ یک p-زیرگروه سیلو از H است.

اثبات : ر. ک. [۲۷]، ص۹۶. ■

قضیه ۱-۱-۸ اگر $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$، آن‌گاه $P \cap G' = \left\langle P \cap N_G(P)', P \cap P'^g \mid g \in G \right\rangle$.

اثبات : ر. ک. [۱۸]، ص۴۲۳. ■

۱-۲ زیرگروههای ماکسیمال و نرمال‌مینیمال

گزاره ۱-۲-۱ فرض کنیم $H,K \leq G$، دراین‌صورت :

۱. اگر $H \leq K$، آن‌گاه $N_K(H) = N_G(H) \cap K$.

۲. $N_G(H) \cap N_G(K) \leq N_G(H \cap K)$.

۳. $N_G(H) \cap N_G(K) \leq N_G(HK)$.

۴. به ازای هر $x \in G$، $N_G(H^x) = N_G(H)^x$.

۵. اگر $H \leq N_G(K)$، آن‌گاه $HK \leq G$.

اثبات : ر. ک. [۲۷]، ص۳۷. ■

گزاره ۱-۲-۲ اگر $H_1,...,H_n$ زیرگروههای نرمال از گروه G باشند، آن‌گاه $G/(H_1 \cap ... \cap H_n)$ با زیرگروهی از $G/H_1 \times G/H_2 ... \times G/H_n$ یکریخت است.

اثبات :

نگاشت ψ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\psi : G/(H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_n) \to G/H_1 \times G/H_2 \times ... \times G/H_n$$
$$g(H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_n) \mapsto (gH_1, gH_n, ..., gH_n)$$

واضح است که ψ همریختی است. اما یک‌به‌یک بودن :

فرض کنیم $g(H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_n) \mapsto (H_1, H_2, ..., H_n)$ در این‌صورت به ازای $1 \leq i \leq n$، $gH_i = H_i$ و در نتیجه $g \in H_i$ پس $g \in H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_n$ بنابراین :

$$g(H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_n) = H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_n$$

و این نتیجه می‌شود ψ یک‌به‌یک است. ■

گزاره۱-۲-۳ فرض کنید G گروه و A و B زیرگروههایی از G باشند، در این‌صورت :

۱. $A \subseteq C_G(B)$ اگروتنهااگر $B \subseteq C_G(A)$.

۲. اگر $A \lhd B$ و $x \in G$، آن‌گاه $A^x \lhd B^x$.

۳. $C_G(A) \cap C_G(B) = C_G(AB)$.

اثبات : به راحتی از تعریف بدست می‌آیند. ■

قضیه۱-۲-٤ (استدلال فراتینی) فرض کنیم G گروه متناهی باشد و $H \lhd G$، در این‌صورت اگر $P \in \mathrm{Syl}_p(H)$ آن‌گاه $G = N_G(P)H$.

اثبات : ر. ک. [۲۷]، ص۷۴. ■

گزاره۱-۲-۵ فرض کنید H زیرگروه از G باشد، در این‌صورت $N_G(H) \lhd C_G(H)$ و $N_G(H)/C_G(H)$ یکریخت با زیرگروهی از $\mathrm{Aut}H$ است.

اثبات :

نگاشت τ را چنین تعریف می‌کنیم :

$$\tau : N_G(H) \to \mathrm{Aut}(H)$$
$$g \mapsto \tau_g : H \to H$$
$$\tau_g(h) = g^{-1}hg$$

τ_g به وضوح متعلق به $\mathrm{Aut}(H)$ است.

اما τ همریختی است و هسته آن $C_G(H)$ می‌باشد لذا $N_G(H)/C_G(H)$ یکریخت با زیرگروهی از $\mathrm{Aut}H$ است. ■

گزاره۱-۲-٦ اگر $A \le G$ و $f \in \mathrm{Aut}(G)$، آنگاه $Z(f(A)) = f(Z(A))$.

اثبات :

$$Z(f(A)) = C_{f(A)}(f(A)) = \{ f(a) : \forall x \in A \;\; f(ax) = f(xa) \}$$
$$\Rightarrow f^{-1}(Z(f(A)) = \{ a : \forall x \in A \;\; f(ax) = f(xa) \}$$
$$= \{ a : \forall x \in A \;\; ax = xa \} = Z(A) \Rightarrow Z(f(A)) = f(Z(A))$$

■

گزاره۱-۲-۷ اگر $f \in \mathrm{Aut}(G)$، $A \le G$ و $B \lhd G$، آنگاه $\bar{f} : A/B \to f(A)/f(B)$ با ضابطه $\bar{f}(aB) = f(a)f(B)$ یک همریختی یک‌به‌یک و پوشاست.

اثبات :

ابتدا خوش‌تعریفی $\bar{f}$ را بررسی می کنیم.

$$a_1 B = a_2 B \Rightarrow a_2^{-1} a_1 \in B \Rightarrow f(a_2)^{-1} f(a_1) \in f(B) \Rightarrow f(a_1) f(B) = f(a_2) f(B)$$

یک‌به‌یک بودن و پوشا بودن $\bar{f}$ نیز واضح است. ■

تعریف۱-۲-۸ فرض کنیم m عدد طبیعی بزرگتر از یک باشد، در این‌صورت مجموعه همه اعداد طبیعی مانند n که $n < m$ و $(m,n) = 1$ را $U(m)$ می‌نامیم. $U(m)$ با عمل ضرب اعداد طبیعی به پیمانه m یک گروه آبلی تشکیل می‌دهد.

قضیه۱-۲-۹ فرض کنیم G گروهی متناهی دوری باشد. اگر مرتبه G برابر با m باشد، آن‌گاه $\mathrm{Aut}(G)$ عبارت است از همه خودریختیهای $\alpha_k : g \mapsto g^k$ طوری‌که $1 \le k \le m$ و $(k,m) = 1$. همین‌طور $\mathrm{Aut}(G) \cong U(m)$، بنابراین $\mathrm{Aut}(G)$ آبلی است و از مرتبه $\varphi(m)$ است.

اثبات :

فرض کنیم $G = \langle x \rangle$ و $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$. x^α (اثر تابع α روی عنصر x) نیز مولد G است (زیرا α یکریختی است) پس مرتبه x^α برابر m است.

$$x^\alpha \in G = \langle x \rangle \Rightarrow \exists \;\; 1 \le k \le m \;\;\; s.t \;\; x^\alpha = x^k$$

از تساوی بالا نتیجه می‌شود $O(x^k)=m$. اما $O(x^k)=m/(k,m)$ لذا $(k,m)=1$. برعکس، واضح است که برای هر عدد صحیح $1\le k\le m$ نگاشت $g\mapsto g^k$ خودریختی است.

حال نشان می‌دهیم $\mathrm{Aut}(G)\cong U(m)$. نگاشت φ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varphi:U(m)\to \mathrm{Aut}(G)$$
$$n\mapsto \alpha_n:G\to G$$
$$\alpha_n(x^k)=x^{nk}\ ,\ \forall k\in Z$$

نشان می‌دهیم:

(۱) $\alpha_n\in \mathrm{Aut}(G)$.

(۲) φ یکریختی از $U(m)$ به $\mathrm{Aut}(G)$ است.

اثبات (۱): همریختی بودن α_n واضح است. اما یک‌به‌یک بودن: فرض کنیم $x^{nk}=1$ در نتیجه $(x^k)^n=1$. از آن‌جا که $|G|=m$ و $(m,n)=1$ پس $x^k=1$. لذا α_n، یک‌به‌یک است. برای اثبات پوشا بودن α_n فرض کنیم $n\in U(m)$ و $x^t\in G$ که $t\in Z$. نشان می‌دهیم عنصر $k\in Z$ چنان موجود است که $x^{nk}=x^t$. اما:

$$x^{nk}=x^t\Leftrightarrow nk\equiv t\pmod m$$

و این معادله همنهشتی طبق یکی از قضایای نظریه اعداد { قضیه: اگر $(a,b)=1$ آن‌گاه معادله همنهشتی $ax\equiv c\pmod b$ دقیقا دارای یک جواب است } دارای جواب می‌باشد.

اثبات (۲): فرض کنیم $n_1,n_2\in U(m)$ و $x^k\in G$.

$$\alpha_{n_1}\alpha_{n_2}(x^k)=\alpha_{n_1}(x^{n_2k})=x^{n_1n_2k}=\alpha_{n_1n_2}(x^k)$$

پس $\alpha_{n_1}\alpha_{n_2}=\alpha_{n_1n_2}$ یعنی $\varphi(n_1)\varphi(n_2)=\varphi(n_1n_2)$، بنابراین φ همریختی است. پوشا بودن φ واضح است اما یک‌به‌یک بودن: فرض کنیم $\varphi(n)=Id_G$ پس به ازای هر $k\in Z$، $x^{nk}=1$. اگر قرار دهیم $k=1$ آن‌گاه $x^n=1$ و چون $(m,n)=1$ نتیجه می‌شود $n=1$. لذا φ یک‌به‌یک است و اثبات (۲) به پایان می‌رسد.

پس $\mathrm{Aut}(G)\cong U(m)$ و لذا $\mathrm{Aut}(G)$ آبلی است و از مرتبه $\varphi(m)$ است. ■

گزاره۱-۲-۱۰ فرض کنیم $H \leq G$ و $|G:H|=n$ که در آن n عدد طبیعی است، در این‌صورت G زیرگروه نرمالی مانند N دارد طوری‌که $N \leq H$ و $|G/N| \,|\, n!$.

اثبات : ر. ک. [۲۷]، ص۲۷. ■

قضیه۱-۲-۱۱ فرض کنیم G گروهی متناهی و p کوچکترین عدد اول شمارنده $|G|$ باشد. اگر H زیرگروهی از G باشد طوری‌که $|G:H|=p$، آن‌گاه $H \lhd G$.

اثبات :

با توجه به گزاره۱-۲-۱۰، G زیرگروه نرمالی مانند N دارد که $N \leq H$ و $|G/N| \,|\, p!$. بنابر فرض $|G|=p|H|$، پس $|H/N| \,|\, (p-1)!$ و از این‌جا به‌دست می‌آید $|H/N|=1$، زیرا در غیر این‌صورت $|H|$ و در نتیجه $|G|$ عامل اولی چون q دارد که بنا بر فرض باید از p ناکمتر باشد و این متناقض با $q \,|\, (p-1)!$ است. پس $H=N$ و این نتیجه می‌دهد $H \lhd G$. ■

قضیه۱-۲-۱۲ فرض کنید N زیرگروه نرمال از گروه متناهی G باشد و فرض کنیم $|N|=n$ و $|G:N|=m$ نسبت به هم اول باشند، در این‌صورت G شامل زیرگروهی از مرتبه m می‌باشد و هر دو تا از آنها در G مزدوجند.

اثبات : ر. ک. [۲۲]، ص۲۵۳. ■

تعریف۱-۲-۱۳ فرض کنید G گروه باشد. زیرگروه نرمال غیربدیهی H را ***زیرگروه نرمال‌مینیمال*** از G گوییم هرگاه H شامل زیرگروه نرمال سره از G نباشد.

قضیه۱-۲-۱٤ اگر G ، p-گروه و N زیرگروه نرمال‌مینیمال از G باشد، آن‌گاه $N \leq Z(G)$ و $|N|=p$.

اثبات : ر. ک. [۲۴]، ص۱۹۱. ■

گزاره۱-۲-۱۵ اگر G گروه ساده ناآبلی متناهی باشد و $H < G$، آن‌گاه $[G:H] \geq ۵$.

اثبات : ر. ک. [۲۸]، ص۲۱۲. ■

تعریف۱-۲-۱۶ فرض کنیم G گروهی نابدیهی و M زیرگروهی سره از G باشد. M را یک ***زیرگروه ماکسیمال*** از G می‌نامیم در صورتی‌که $M \leq H \leq G$ نتیجه شود $M = H$ یا $M = G$.

قضیه۱-۲-۱۷ فرض کنید G، p-گروه متناهی نابدیهی باشد و $H \leq G$، در این‌صورت H زیرگروه ماکسیمال است اگروتنهااگر $H \lhd G$ و $|G/H| = p$.

اثبات : ر. ک. [۲۷]، ص۷۱. ■

گزاره۱-۲-۱۸ فرض کنیم G گروه باشد. M زیرگروه نرمال ماکسیمال از G است اگروتنهااگر G/M دوری از مرتبه عدد اول باشد.

اثبات :

فرض کنیم $H/M \leq G/M$، در این‌صورت $M \leq H \leq G$ و چون M زیرگروه ماکسیمال از G است داریم $H = M$ یا $H = G$ لذا $H/M = M$ یا $H/M = G/M$، پس G/M زیرگروه سره نابدیهی ندارد و در نتیجه دوری از مرتبه عدد اول است. عکس گزاره نیز به وضوح برقرار است. ■

گزاره۱-۲-۱۹ فرض کنیم $A \leq G$ و x عضو دلخواهی از G باشد، در این‌صورت هر زیرگروه از A^x به صورت B^x می‌باشد که B زیرگروهی از G است به‌ویژه زیرگروههای مینیمال و ماکسیمال از A به ترتیب به صورت N^x و M^x می‌باشند طوری‌که N در A مینیمال و M در A ماکسیمال است.

اثبات :

اگر $B \leq A$، آن‌گاه $A^x \leq B^x$. حال فرض کنیم $C \leq A^x$، در این‌صورت اعضای C به صورت a^x هایی می‌باشند که $a \in A$. ثابت می‌کنیم $B = \{a \mid a^x \in C\}$ زیرگروهی از A است. فرض کنیم $a_1, a_2 \in B$.

$$\left(a_۱a_۲^{-۱}\right)^x = a_۱^x\left(a_۲^{-۱}\right)^x = a_۱\left(a_۲^x\right)^{-۱}$$