بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

نمایش هندسی جبرهای خوشه‌ای از نوع متناهی

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

زکیه حاجیلو

استاد راهنما: **دکتر اسماعیل اسدی**

استاد مشاور: **دکتر عباس نصرالله نژاد**

مهر ۱۳۹۲

ای نام تو بهترین سرآغاز بی نام تو نامه کی کنم باز

ای بر ورق تو درس ایام ز آغاز رسیده تا به انجام

حرفی به غلط رها نکردی یک نکته در او خطا نکردی

در عالم، عالم آفریدن به زین نتوان رقم کشیدن

سپاس خدایی که انسان را آفرید و او را به زینت علم آراست و این چنین او را اشرف مخلوقات قرار داد.

خدایی که خود علم کامل و دانای تمام نهانهاست و بی خواست و اراده او ذره ای نمی جنبد و هیچ چیز بی اذن او قرار نمی گیرد.

خدایا، الهی، ربنا

امروز خود را بیش از هر روز دیگری در سایه الطاف بی کران تو می بینم و از اینکه یارم کردی امروز در این جایگاه باشم تو را سپاس می گویم که اگر خواست تو و نظر لطف و عنایت خاصه ات نبود هرگز در این جایگاه نبودم.

هر چند انسان هر چه بیشتر بیاموزد داند که هیچ نمی داند و تنها اوست که دانای نهان و آشکار است.

نفسهایت تبسم خدا بود و چشم هایت آینه‌ای که هر روز خدا را در آن می دیدم.

نگاه معصوم و کودکانه‌ات تمام دل خوشیم بود و چه حیف!

هرگز نمی دانستم تا پایان این مجموعه با من نمی‌مانی و برای همیشه تبرک نفسهای پاکت

را از من دریغ می کنی. حالا دیگر در آغوش مهربان خدا آرام باش.

تقدیم به محمد مهدی

آرزویی که محال شد

تشکر و قدردانی

پدر و مادر عزیزم: خداوندان عشق و محبت، اسطوره‌های صبر و شکیبایی.

آنها که در آغوش پر مهرشان و سایه حمایت‌های بی دریغشان ذره ذره قد کشیده و در مسیر زندگی پیش رفته‌ام و اکنون که به این مرحله رسیده‌ام یقین دارم که اگر وجود نازنین ایشان نبود من هرگز در این جایگاه نبودم و بی شک نخواهم توانست جوابگوی لحظه لحظه‌ی عمری که به پای من ریخته‌اند باشم.

بر خود فرض می‌دانم در نهایت تواضع و فروتنی مراتب تشکر و قدردانی خود را از اساتید عزیز و بزرگوار اعلام بنمایم. بزرگوارانی که در این مسیر با زحمات بسیار و تلاش پیگیر و راهنمایی‌های عالمانه در همه مسائل راهگشا بوده‌اند و مرا در به ثمر رساندن این مجموعه پشتیبانی کرده‌اند و میدانم که هرگز واژه‌ها قادر به ادای حق مطلب نخواهند بود چنان که علی (علیه السلام) فرمودند: هر کس به من کلمه‌ای بیاموزد مرا بنده خویش ساخته.

جا دارد اینجا از استاد راهنمای عزیزم دکتر اسماعیل اسدی و دکتر عباس نصراله نژاد که مشاوره پایان نامه اینجانب را بر عهده داشت و همچنین داوران عزیز دکتر رشید زارع نهندی و دکتر منوچهر ذاکر و دکتر پرویز احمدی نهایت تشکر و قدر دانی را بنمایم.

همچنین از دوستان عزیزم که در این مدت با دوستی‌ها و مهربانی‌هایشان در کنارم بودند و این مسیر را با همراهی خود دوستداشتنی‌تر و لذت بخش‌تر کردند تشکر می‌کنم و برای همه آنها موفقیت‌های روزافزون و فرداهای بهتر را آرزو دارم.

چکیده

کارتان و کلینگ، جبرهای لی مختلط نیم ساده متناهی بعد و سیستم‌های ریشه‌ای وابسته را با استفاده از ماتریس‌های کارتان و نمودارهای دینکین رده‌بندی کردند. فومین-زلوینسکی در سال ۲۰۰۳ جبرهای خوشه‌ای را معرفی کردند که به طور خلاصه شامل یک درخت منظم است که به هر رأس یک خوشه و یک ماتریس نسبت داده می‌شود. این رأس‌ها توسط عملی با عنوان تحول با هم مرتبط می‌شوند. همچنین آنها جبرهای خوشه‌ای هندسی را که تعمیمی از حلقه مختصاتی گرسمنین‌ها است معرفی کردند. بعلاوه آنها جبرهای خوشه‌ای هندسی از نوع متناهی را با عمل تحول به درخت‌های دوری متناظر کردند که در حقیقت این تناظر دقیقا رده‌بندی کارتان کلینگ است. در این پایان نامه ابتدا رده‌بندی کارتان و کلینگ و جبرهای خوشه‌ای را مطالعه کرده و سپس قضیه $F-Z$ که جبرهای خوشه‌ای از نوع متناهی را بیان می‌کند مورد بررسی قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: *ماتریس کارتان، نمودارهای دینکین، جبرهای خوشه‌ای ،تحول*

فهرست

پیش‌گفتار

جبرهای لی نیم ساده روی اعداد مختلط اولین بار توسط ویلحلم کلینگ (۹۰-۱۸۸۸) رده‌بندی شد علارقم این که اثبات او دقت کافی را نداشت. اثبات کلینگ توسط الی کارتان (۱۸۹۴) در پایان نامه دکتری که جبرهای لی حقیقی نیم ساده را رده‌بندی کرده بود، دقیقتر شد. سپس این اثبات تصحیح شد و رده‌بندی موجود توسط نمودارهای دینکین ایجین دینکین ۲۲-ساله در سال ۱۹۴۷ ارائه شد.

جبرهای خوشه‌ای، کلاسی از حلقه‌های جابجایی هستند که توسط فومین و زلوینسکی (۲۰۰۲،۲۰۰۳،۲۰۰۷) معرفی شدند. یک جبر خوشه‌ای از مرتبه n دامنه صحیحی مانند A می‌باشد همراه با زیر مجموعه‌هایی با اندازه n به نام خوشه‌ها که اجتماع آنها جبر A را تولید کرده و در شرایط مختلفی صدق می‌کند.

نتیجه اصلی این پایان نامه (قضایای (۱۷.۶.۳) و (۱۸.۶.۳)) فراهم کردن رده‌بندی کاملی از جبرهای خوشه‌ای از نوع متناهی است. این رده‌بندی مشابه رده‌بندی کارتان و کلینگ از جبرهای لی نیم ساده و سیستم‌های ریشه‌ای متناهی است.

یکی از گام‌های اصلی در اثبات قضیه‌های رده‌بندی، در نظر گرفتن ویژگی ترکیبی جدیدی از نمودارهای دینکین است. در بخش (۱.۳) رابطه‌ای مبادله‌ای، با عنوان هم‌ارزی تحولی، معرفی می‌شود. این رابطه را می‌توانیم روی گراف‌های جهت‌دار متناهی با یال‌های وزن‌دار نیز به کار ببریم. در ادامه اثبات می‌کنیم که یک گراف همبند با یک نمودار دینکین جهت‌دار شده هم‌ارز تحولی است اگر وتنها اگر هر گراف هم‌ارز تحولی با آن یال‌هایی با وزن‌های کمتر از ۳ داشته باشد.

در دو فصل آغازین این پایان نامه رده‌بندی سیستم‌های ریشه‌ای را با یک روند دو مرحله‌ای بررسی می‌کنیم، ابتدا با انتخاب یک زیر جبر کارتان، از جبرلی به سیستم‌های ریشه‌ای مجرد تقلیل یافته می‌رسیم سپس با انتخاب یک ترتیب، از سیستم ریشه‌ای وارد ماتریس‌های کارتان مجرد و نمودارهای دینکین مجرد می‌شویم. اگر یک ترتیب مناسب روی فضای برداری زمینه از یک سیستم ریشه‌ای مجرد قرار دهیم، ابتدا به ریشه‌های ساده می‌رسیم که ریشه‌های مثبتی هستند که نمی‌توان آنها را به صورت مجموع ریشه‌های مثبت دیگر نوشت. ریشه‌های ساده پایه مناسبی را برای فضای برداری زمینه تشکیل می‌دهند و ماتریس کارتان و نمودار دینکین با در نظر گرفتن این شرایط تعریف می‌شوند. تعاریف ماتریس کارتان مجرد و نمودار دینکین مجرد به ترتیب معرف ماتریس و نمودار بدست آمده از سیستم ریشه‌ای هستند.

این پایان نامه در سه فصل با عنوان‌های جبرهای لی نیم ساده مختلط، نظریه سیستم‌های ریشه‌ای و جبرهای خوشه‌ای جمع بندی شده است. در فصل اول بیشترین تمرکز روی معرفی مفاهیم بنیادی می‌باشد. که در حقیقت مقدماتی برای فصل‌های بعدی است. این فصل از مراجع [۱] و [۶] گرفته شده است.

در فصل دوم، ابتدا ماتریس‌های کارتان و نمودارهای دینکین معرفی می‌شوند. این دو، اساسی‌ترین ابزارها در رده‌بندی سیستم‌های ریشه‌ای از نوع متناهی هستند. به این ترتیب که هر نمودار دینکین بدست آمده معرف دقیقا یک سیستم ریشه‌ای متناهی است. این فصل از مراجع [۱] و [۶] گرفته شده است.

در فصل سوم جبرهای خوشه‌ای معرفی می‌شود و با مثال‌هایی تفاوت میان جبرهای خوشه‌ای متناهی و نا متناهی مشخص می‌شوند. بعد از معرفی این مفاهیم به بیان و اثبات دو قضیه اصلی که به نوعی هدف این پایان نامه است، می‌پردازیم. این فصل از مراجع [۲] ، [۳] و [۴] گرفته شده است.

فصل اول

جبرهای لی نیم ساده مختلط و ساختار ریشه‌های آنها

۱.۱ مقدمات و تعاریف جبرهای لی

جبر $\mathfrak{g}$ یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ با یک عمل دوتایی $[.,.]$ است که روی هر یک از متغیرها، خطی می‌باشد. اگر جبر $\mathfrak{g}$ (که لزوما شرکت پذیر نیست) در دو شرط زیر صدق کند آنرا *جبرلی*[۱] گوییم

۱. $[X, X] = \circ$ برای هر $X \in \mathfrak{g}$ (در نتیجه $[X, Y] = -[Y, X]$) و

۲. *اتحاد ژاکوبی*[۲] برقرار باشد

$$[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = \circ.$$

مثال ۱.۱.۱. فرض می‌کنیم $\mathfrak{g} = End_{\mathbb{K}}V$ فضای برداری متشکل از تمام ماتریس‌های $n \times n$ باشد که درآیه‌های آن اعضایی از میدان $\mathbb{C}$ هستند. ضرب کروشه‌ای را به صورت $[X, Y] = XY - YX$ تعریف می‌کنیم. در این صورت برای $X, Y \in End_{\mathbb{K}}V$ داریم

$$[X, X] = XX - XX = \circ$$

و نیز از شرکت پذیری ضرب ماتریسی نتیجه می‌گیریم که اتحاد ژاکوبی

$$[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = \circ$$

برقرار است. لذا $\mathfrak{g}$ جبرلی است.

---

۱ Lie algebra

۲ Jacobi identity

■

تعریف ۲.۱.۱. برای هر جبر $\mathfrak{g}$ می‌توانیم نگاشت خطی $ad : \mathfrak{g} \longrightarrow End_{\mathbb{K}}\,\mathfrak{g}$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$(adX)(Y) = [X, Y]$$

که آن را *نمایش الحاقی* $\mathfrak{g}$ روی $\mathfrak{g}$ می‌نامند.

تعریف ۳.۱.۱. جبرلی $\mathfrak{g}$ و زیر مجموعه $\mathfrak{h}$ از $\mathfrak{g}$ را در نظر بگیرید. $\mathfrak{h}$ را یک *ایده‌آل*[۱] از $\mathfrak{g}$ می‌گوییم هرگاه داشته باشیم $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{h}$ که در اینجا $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] = span\{[s_۱, s_۲] | s_۱ \in \mathfrak{h}, s_۲ \in \mathfrak{g}\}$.

تعریف ۴.۱.۱. جبرلی $\mathfrak{g}$ و زیر مجموعه $\mathfrak{h}$ از $\mathfrak{g}$ را در نظر بگیرید. $\mathfrak{h}$ را یک *زیرجبرلی*[۲] $\mathfrak{g}$ گوییم هرگاه داشته باشیم $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$.

مثال ۵.۱.۱. مجموعه زیر که مرکز $\mathfrak{g}$ نامیده می‌شود، یک ایدآل و یک زیر جبرلی $\mathfrak{g}$ است

$$Z_{\mathfrak{g}} = \{X \in \mathfrak{g} | [X, Y] = ۰, \text{برای هر } Y \in \mathfrak{g}\}.$$

■

گزاره ۶.۱.۱. [۶، گزاره (۱.۷.۰)] اگر $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ ایده‌آل‌هایی در یک جبرلی باشند، آنگاه $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}, \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ و $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ نیز ایده‌آل هستند.

تعریف ۷.۱.۱. ۱. فرض کنید $\mathfrak{g}$ یک جبرلی از نوع متناهی باشد. به طور بازگشتی تعریف می‌کنیم

$$\mathfrak{g}^۰ = \mathfrak{g}, \qquad \mathfrak{g}^۱ = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \qquad \mathfrak{g}^{j+۱} = [\mathfrak{g}^j, \mathfrak{g}^j].$$

دنباله نزولی

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^۰ \supseteq \mathfrak{g}^۱ \supseteq \mathfrak{g}^۲ \supseteq \dots$$

را *سری جابجاگر*[۳] $\mathfrak{g}$ می‌نامیم. هر $\mathfrak{g}^j$ یک ایده‌آل در $\mathfrak{g}$ است.

۲. جبرلی $\mathfrak{g}$ را *حل‌پذیر*[۴] می‌گوییم هرگاه برای $j \geq ۰$ داشته باشیم $\mathfrak{g}^j = ۰$.

تعریف ۸.۱.۱. ۱. به طور بازگشتی تعریف می‌کنیم

$$\mathfrak{g}_۰ = \mathfrak{g}, \qquad \mathfrak{g}_۱ = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \qquad \mathfrak{g}_{j+۱} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_j].$$

---

[۱] Ideal

[۲] Lie subalgebra

[۳] Commutator series

[۴] Solvable

دنباله نزولی

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supseteq \mathfrak{g}_1 \supseteq \mathfrak{g}_2 \supseteq \ldots$$

را *سری مرکزی پایینی*[۱] $\mathfrak{g}$ می‌نامیم. هر $\mathfrak{g}_j$ یک ایده‌آل در $\mathfrak{g}$ است.

۲. جبرلی $\mathfrak{g}$ را *پوچ‌توان*[۲] می‌گوییم هرگاه برای یک j داشته باشیم $\mathfrak{g}_j = 0$.

مثال ۹.۱.۱. ۱. جبرلی حقیقی

$$\mathfrak{g} = \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

را در نظر بگیرید. اگر عمل دوتایی زیر را در نظر بگیریم

$$[X, Y] = XY - YX$$

آنگاه $\mathfrak{g}$ حلپذیر خواهد بود.

۲. جبرلی حقیقی

$$\mathfrak{g} = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

را در نظر بگیرید. با در نظر گرفتن

$$[X, Y] = XY - YX$$

$\mathfrak{g}$ پوچ‌توان خواهد بود.

■

گزاره ۱۰.۱.۱. [۶، گزاره(۱.۱۲.۲)] اگر $\mathfrak{g}$ یک جبرلی متناهی بعد باشد، آنگاه یک ایده‌آل حلپذیر منحصر بفرد مانند $\mathfrak{t}$ وجود دارد که شامل همه ایده‌آل‌های حلپذیر در $\mathfrak{g}$ است.

تعریف ۱۱.۱.۱. ایده‌آل حلپذیری را که شامل همه ایده‌آل‌های حلپذیر $\mathfrak{g}$ باشد، با $rad\,\mathfrak{g}$ نمایش می‌دهیم و آن را *رادیکال*[۳] $\mathfrak{g}$ می‌نامیم.

تعریف ۱۲.۱.۱. یک جبرلی از بعد متناهی مانند $\mathfrak{g}$ را *ساده*[۴] گوییم هرگاه $\mathfrak{g}$ دارای دو ویژگی زیر باشد

۱. جابجایی نباشد

[۱] Lower central series

[۲] Nilpotent

[۳] Radical

[۴] Simple

۲. شامل ایده‌آل سره غیر بدیهی نباشد.

تعریف ۱.۱.۱۳. جبرلی متناهی بعد $\mathfrak{g}$ را *نیم‌ساده*[۱] می‌نامیم هرگاه ایده‌آل حلپذیر غیر صفر نداشته باشد. یعنی، $rad\, g = 0$.

تعریف ۱.۱.۱۴. فرض کنید $\mathfrak{g}$ یک جبرلی متناهی بعد روی $\mathbb{C}$ باشد. اگر X و Y دو عضو از $\mathfrak{g}$ باشند، آنگاه $ad\, X\, ad\, Y$ یک تبدیل خطی از $\mathfrak{g}$ به $\mathfrak{g}$ است و لذا اثر آن معنادار است. قرار می‌دهیم

$$B(X,Y) = Tr(ad\, X\, ad\, Y)$$

واضح است B یک فرم دوخطی متقارن روی $\mathfrak{g}$ است. B را *فرم کیلینگ*[۲] $\mathfrak{g}$ می‌نامیم.

تعریف ۱.۱.۱۵. فرض کنید V یک فضای برداری روی $\mathbb{K}$ و $\mathfrak{g}$ یک جبرلی باشد. یک *نمایش*[۳] از $\mathfrak{g}$ در V، یک همریختی از جبرهای لی، مانند

$$\pi : \mathfrak{g} \to End_{\mathbb{K}} V$$

است. از شرایطی که برای π صادق است عبارت است از

۱. π، $\mathbb{K}$ خطی است و

۲. در تساوی زیر صدق می‌کند

$$\pi([X,Y]) = \pi(X)\pi(Y) - \pi(Y)\pi(X).$$

مثال ۱.۱.۱۶. اگر فرض کنیم $V = \mathfrak{g}$ آنگاه نمایش الحاقی

$$ad : \mathfrak{g} \to End_{\mathbb{K}} \mathfrak{g}$$

را در نظر بگیرید، با این فرض داریم

$$ad(kX) = k\, ad(X)$$

و

$$ad([X,Y])(Z) = [[X,Y],Z]$$

لذا $ad : \mathfrak{g} \to End_{\mathbb{K}} \mathfrak{g}$ یک نمایش از $\mathfrak{g}$ در $\mathfrak{g}$ است. ■

[۱] Semisimple
[۲] Killing form
[۳] Representation

۲.۱ ساختار ریشه‌ای جبرهای نیم ساده مختلط

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید $\mathfrak{h}$ یک جبرلی متناهی بعد روی $\mathbb{C}$ و π یک نمایش از $\mathfrak{h}$ در فضای برداری مختلط V باشد. اگر α عضوی از دوگان $\mathfrak{h}^*$ باشد و تعریف کنیم

$$V_\alpha = \{v \in V | \forall H \in \mathfrak{h}, \quad \exists n, \quad n = n(H,v), \quad (\pi(H) - \alpha(H)۱)^n v = ۰\} \tag{۱.۱}$$

آنگاه

۱. اگر $V_\alpha \neq ۰$، V_α را *فضای وزن‌دار تعمیم یافته*[۱] می‌نامیم.

۲. α را *وزن*[۲] می‌نامیم.

۳. اعضای V_α را *بردارهای وزن‌دار تعمیم یافته*[۳] می‌نامیم.

گزاره ۲.۲.۱. [۶، گزاره(۲.۵.۰)] اگر $\mathfrak{g}$ جبرلی متناهی بعد روی $\mathbb{C}$ و $\mathfrak{h}$ یک زیر جبرلی پوچ‌توان باشد. آنگاه فضاهای وزن‌دار تعمیم یافته $\mathfrak{g}$ نسبت به نمایش $ad_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{h} \to End_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h})$ در شرایط زیر صدق می‌کنند

۱. $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_\alpha$، که

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} | \forall H \in \mathfrak{h}, \quad \exists n, \quad n = n(H,X), \quad (ad\, H - \alpha(H)۱)^n X = ۰\},$$

۲. $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}_۰$.

تعریف ۳.۲.۱. زیر جبرلی پوچ‌توان $\mathfrak{h}$ از یک جبرلی مختلط متناهی بعد $\mathfrak{g}$ را *زیرجبر کارتان*[۴] می‌نامیم اگر $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_۰$.

مثال ۴.۲.۱. جبرلی مختلط

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \,|\, Tr\, X = ۰\}$$

را در نظر بگیرید. فرض کنید

$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$ تمام ماتریس‌های قطری.

ماتریس E_{ij} را ماتریس معرفی می‌کنیم که درآیه (i,j) -ام آن ۱ و بقیه عناصر صفر باشند و e_j را عنصری از فضای

۱ Generalized weight space

۲ Weight

۳ Generalized weight vectors

۴ Cartan subalgebra

دوگان $\mathfrak{h}^*$ معرفی می‌کنیم که به ترتیب زیر عمل می‌کند

$$e_j\begin{pmatrix} h_1 & & \\ & \ddots & \\ & & h_n \end{pmatrix} = h_j$$

برای هر $H \in \mathfrak{h}$ داریم

$$(ad\, H)E_{ij} = [H, E_{ij}] = (e_i(H) - e_j(H))E_ij.$$

به این ترتیب داریم

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{i\neq j} \mathfrak{g}_{e_i - e_j}$$

که اینجا

$$\mathfrak{g}_{e_i-e_j} = \{X \in \mathfrak{g} \,|\, \forall H \in \mathfrak{h}, \quad (ad\, H)X = (e_i - e_j)(H)X\}$$

اینجا $\mathfrak{h}$ همان زیر جبر کارتان است. ■

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید $\mathfrak{g}$ یک جبرلی مختلط نیم ساده و $\mathfrak{h}$ زیر جبر کارتان $\mathfrak{g}$, باشد. وزن‌های تعمیم یافته غیرصفر α که به ازای آنها $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$، *ریشه‌های*[۱] $\mathfrak{g}$ نسبت به $\mathfrak{h}$ نامیده می‌شوند. مجموعه همه ریشه‌ها را با $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۶.۲.۱. در مثال (۴.۲.۱) $(e_i - e_j)$ -ها برای $i \neq j$، ریشه‌های جبرلی $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ هستند. ■

گزاره ۷.۲.۱. [۶، گزاره(۲.۱۷.)]

۱. اگر α و β عضوی از $\Delta \cup \{0\}$ باشند و $\alpha + \beta \neq 0$، آنگاه $B(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$.

۲. اگر α عضوی از $\Delta \cup \{0\}$ باشد آنگاه B روی $\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}$ ناتباه است.

۳. اگر α عضوی از Δ باشد آنگاه $-\alpha$ نیز عضوی از Δ است.

۴. $B|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ ناتباه است؛ به این معنا که به هر ریشه α، یک H_α منحصر بفرد در $\mathfrak{h}$ نسبت داده می‌شود که از $\alpha(H) = B(H, H_\alpha)$ برای هر $H \in \mathfrak{h}$ بدست می‌آید.

۵. Δ، $\mathfrak{h}^*$ را تولید می‌کند.

نتیجه ۸.۲.۱. [۶، نتیجه(۲.۲۴.)] روی $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ داریم:

$$B(H, H^{'}) = \sum \alpha(H)\alpha(H^{'}).$$

---
[۱] Roots

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنید α عضو Δ و β عضوی از $\Delta \cup \{\circ\}$ باشد. α*رشته‌ی شامل* β[۱] مجموعه ی همه ی اعضایی از $\Delta \cup \{\circ\}$ است که به فرم $\beta + n\alpha$ هستند و در آن $n \in \mathbb{Z}$.

تعریف ۱۰.۲.۱. ضرب داخلی $\langle .,. \rangle$ روی $\mathfrak{h}^*$ موجود است که به صورت زیر معرفی می‌شود

$$\langle \alpha, \beta \rangle = B(H_\alpha, H_\beta) = \alpha(H_\beta) = \beta(H_\alpha), \qquad \alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*.$$

گزاره ۱۱.۲.۱. [۶، گزاره(۲.۲۹.)] فرض کنید α عضو Δ و β عضوی از $\Delta \cup \{\circ\}$ باشد.

α رشته شامل β، به فرم $\beta + n\alpha$، برای $-p \leqslant n \leqslant q$ با $p \geqslant \circ, q \geqslant \circ$ بدون شکاف است. بعلاوه

$$p - q = \frac{۲\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

و

$$\frac{۲\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{Z}.$$

تعریف ۱۲.۲.۱. فرض کنید $|.|^۲$ مربع نرم وابسته به ضرب داخلی $\langle .,. \rangle$ روی $\mathfrak{h}_\circ^* \times \mathfrak{h}_\circ^*$ ($\mathfrak{h}_\circ$ فرم حقیقی $\mathfrak{h}$ است) باشد. α را یک ریشه در نظر بگیرید. نسبت به ضرب داخلی تعریف می‌کنیم

$$s_\alpha : \mathfrak{h}_\circ^* \longrightarrow \mathfrak{h}_\circ^*$$

$$s_\alpha(\varphi) = \varphi - \frac{۲\langle \varphi, \alpha \rangle}{|\alpha|^۲}\alpha \quad , \quad \varphi \in \mathfrak{h}^*$$

به $s_\alpha(\varphi)$ *انعکاس ریشه‌ای*[۲] گویند که دارای خواص زیر است

۱. s_α تبدیل متعامد است.

۲. $s_\alpha|_{\mathbb{R}\alpha} = -I$,

۳. $s_\alpha|_{\alpha^\perp} = I$ که در آن $\alpha^\perp = \{\varphi \in \mathfrak{h}_\circ^* | \langle \varphi, \alpha \rangle = \circ\}$

گزاره ۱۳.۲.۱. [۶، گزاره(۲.۴۱.)] انعکاس ریشه ای s_α هر عضو Δ را به خودش می‌نگارد یعنی $s_\alpha(\Delta) \subseteq \Delta$.

تعریف ۱۴.۲.۱. فضای برداری حقیقی متناهی بعد V، با ضرب داخلی $\langle .,. \rangle$ و مربع نرم $|.|^۲$ و مجموعه متناهی Δ با عناصر غیر صفر از V که در شرایط زیر صدق می کند را در نظر بگیرید

۱. V توسط Δ تولید شود.

۲. انعکاس ریشه ای $s_\alpha(\varphi) = \varphi - \frac{۲\langle \beta, \alpha \rangle}{|\alpha|^۲}\alpha$ برای $\alpha \in \Delta$, Δ را به Δ می‌نگارد.

---

[۱] α string containing β

[۲] root reflection

۳. $\frac{۲\langle\beta,\alpha\rangle}{|\alpha|^۲}$ برای هر α و β از Δ عددی صحیح است.

(a) (V, Δ) با شرایط بالا را یک **سیستم ریشه‌ای مجرد**[۱] گویند.

(b) یک سیستم ریشه ای مجرد را **تقلیل یافته**[۲] گوییم هرگاه $\alpha \in \Delta$ ایجاب کند که $۲\alpha \notin \Delta$.

(c) اگر α ریشه باشد ولی $\frac{۱}{۲}\alpha$ ریشه نباشد آنگاه α را تقلیل یافته گویند.

تعریف ۱۵.۲.۱. سیستم ریشه‌ای مجرد Δ را **تحویل‌پذیر**[۳] گویند اگر بتوان نوشت $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$ که Δ' و Δ'' نسبت به هم متمایز و متعامد هستند. در غیر این صورت آن را **تحویل‌ناپذیر**[۴] گویند.

گزاره ۱۶.۲.۱. [۶، گزاره(۲.۴۸.)] فرض کنید Δ یک سیستم ریشه ای مجرد در فضای ضرب داخلی V باشد.

۱. اگر α عضوی از Δ باشد آنگاه $-\alpha$ هم عضوی از Δ است.

۲. اگر α عضوی از Δ و تقلیل یافته باشد آنگاه تنها مضاربی از α که عضوی از $\Delta \cup \{۰\}$ هستند عبارت اند از ۰ یا $\pm\alpha$ یا $\pm ۲\alpha$. توجه کنید که اگر Δ تقلیل یافته باشد آنگاه $\pm ۲\alpha$ نمی تواند عضوی از $\Delta \cup \{۰\}$ باشد.

۳. اگر α عضوی از Δ و β عضوی از $\Delta \cup \{۰\}$ باشد آنگاه

$$\frac{۲\langle\beta,\alpha\rangle}{|\alpha|^۲} = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \pm ۳, \text{یا } \pm ۴$$

و ± ۴ فقط زمانی رخ می دهد که Δ تقلیل یافته نباشد و $\beta = \pm ۲\alpha$.

۴. اگر α, β اعضای Δ باشند که مضربی از هم نیستند طوری که $|\beta| \leqslant |\alpha|$، آنگاه

$$\frac{۲\langle\beta,\alpha\rangle}{|\alpha|^۲} = ۰,\ ۱\ , -۱$$

۵. اگر α, β اعضای Δ با $\langle\alpha,\beta\rangle > ۰$ باشند آنگاه $\alpha - \beta$ عضوی از $\Delta \cup \{۰\}$ است. اگر α, β اعضای Δ با $\langle\alpha,\beta\rangle < ۰$ باشند آنگاه $\alpha + \beta$ عضوی از $\Delta \cup \{۰\}$ است.

۶. اگر α, β اعضای Δ باشند ولی هیچ یک از $\alpha + \beta$ و $\alpha - \beta$ ریشه یا صفر نباشند آنگاه $\langle\alpha,\beta\rangle = ۰$.

۷. اگر α عضوی از Δ و β عضوی از $\Delta \cup \{۰\}$ باشد در اینصورت α رشته ی شامل β ،به فرم $\beta + n\alpha$ ، برای $-p \leqslant n \leqslant q$ با $p \geqslant ۰$ و $q \geqslant ۰$ حداکثر ۴ ریشه دارد.

تعریف ۱۷.۲.۱. مولدهای $\varphi_۱, ..., \varphi_m$ از فضای برداری متناهی بعد V را ثابت در نظر می‌گیریم. عنصر φ را مثبت گوییم اگر اندیس k -ای موجود باشد طوری که برای $۱ \leq i \leq k - ۱$ داشته باشیم $\langle\varphi,\varphi_i\rangle = ۰$ و $\langle\varphi,\varphi_k\rangle > ۰$.

---

[۱] abstract root system

[۲] reduced

[۳] reducible

[۴] irreducible

اگر φ عنصری مثبت باشد می‌نویسیم $\varphi > ۰$. ویژگی‌های مثبت بودن عبارت است از

۱. برای هر عنصر غیر صفر $\varphi \in V$ دقیقا یکی از $-\varphi$ و φ مثبت باشد،

۲. جمع دو عنصر مثبت، مثبت و مضرب مثبت از یک عنصر مثبت نیز مثبت باشد.

تعریف ۱۸.۲.۱. فرض کنید مفهوم مثبت بودن و ترتیب برای V مشخص باشد. ریشه α را *ساده* گوییم اگر

۱. α مثبت باشد

۲. نتوان α را به صورت مجموع $\alpha = \beta_۱ + \beta_۲$ نوشت که در آن $\beta_۱$ و $\beta_۲$ هر دو مثبت هستند.

گزاره ۱۹.۲.۱. [۶، گزاره(۲.۴۹.)] اگر $dimV = l$ آنگاه l تا ریشه ساده $\alpha_۱, \ldots, \alpha_l$ وجود دارند که مستقل خطی هستند. اگر ریشه β به صورت $\beta = x_۱\alpha_۱ + \ldots + x_l\alpha_l$ نوشته شود در این صورت تمام x_i ها مقادیر صحیح و هم‌علامت خواهند بود.

تعریف ۲۰.۲.۱. هر ریشه مثبت α را می‌توان به صورت

$$\alpha = \sum_{i=۱}^{l} n_i\alpha_i$$

نوشت که n_i عدد صحیح مثبت است. مقدار صحیح

$$\sum_{i=۱}^{l} n_i$$

را *سطح*[۱] α می‌نامند.

لم ۲۱.۲.۱. اگر α و β دو ریشه ساده متفاوت باشند، آنگاه $\alpha - \beta$ ریشه نیست. بنابر این $\langle\alpha, \beta\rangle \leqslant ۰$.

اثبات. فرض کنیم $\alpha - \beta$ ریشه باشد. اگر $\alpha - \beta$ مثبت باشد آنگاه می‌توان نوشت $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$. اگر $\alpha - \beta$ منفی باشد داریم $\beta = (\beta - \alpha) + \alpha$. در هر دو صورت مشاهده می‌شود که توانستیم α و β را به صورت مجموع دو ریشه مثبت بنویسیم که تناقض است. لذا $\alpha - \beta$ نمی‌تواند ریشه باشد و از گزاره (۱۶.۲.۱) داریم $\langle\alpha, \beta\rangle \leq ۰$. □

[۱] level

فصل دوم

نظریه‌ی سیستمهای ریشه‌ای

۱.۲ ماتریس کارتان

در این بخش یک سیستم ریشه‌ای مجرد مانند Δ را ثابت در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که Δ تقلیل یافته باشد. همچنین ترتیب حاصل از مفهوم مثبت بودن در بخش پیش نیازها را نیز ثابت فرض می‌کنیم و Π را مجموعه ریشه‌های ساده در نظر می‌گیریم. به سیستم Π یک "ماتریس کارتان" نسبت می‌دهیم و ویژگی‌های این ماتریس‌ها را مطالعه می‌کنیم. یک "ماتریس کارتان مجرد" ماتریس مربعی خواهد بود که این ویژگی‌ها را دارد. کار کردن با این ماتریس‌ها زمانی آسان‌تر می‌شود که به هر ماتریس یک گراف شناخته شده با عنوان "نمودار دینکین مجرد" نسبت داده شود.

مجموعه همه ریشه های ساده را با $\Pi = \{\alpha_۱, \dots, \alpha_l\}$ نمایش می‌دهیم. بخاطر داریم که تعداد ریشه‌های ساده حداکثر برابر با بعد فضای ضرب داخلی است.

تعریف ۱.۱.۲. ماتریس $l \times l$ ، A را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$A = (A_{ij}) \qquad , \qquad A_{ij} = \frac{۲\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{|\alpha_i|^۲}$$

که در آن α_i ها ریشه‌های ساده هستند. ماتریس A را *ماتریس کارتان* [۱] Δ و Π می‌نامند.

گزاره ۲.۱.۲. ماتریس کارتان $A = (A_{ij})$ Δ وابسته به مجموعه ریشه‌های ساده Π دارای خواص زیر است:

۱. برای هر i و j , A_{ij} عضوی از $\mathbb{Z}$ است.

۲. برای هر i , $A_{ii} = ۲$.

۳. برای هر $i \neq j$, $A_{ij} \leqslant ۰$.

۴. $A_{ij} = ۰$ اگر و تنها اگر $A_{ji} = ۰$.

[۱] Cartan matrix

۵. یک ماتریس قطری D با عناصر قطری مثبت وجود دارد طوری که $DAD^{-۱}$ مثبت معین متقارن است.

اثبات. ۱. از گزاره (۱۱.۲.۱) نتیجه شد $A_{ij} = \frac{۲\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{|\alpha_i|^۲}$ مقداری صحیح است.

۲.

$$A_{ii} = \frac{۲\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}{|\alpha_i|^۲} = \frac{۲|\alpha_i|^۲}{|\alpha_i|^۲} = ۲$$

۳. چون α_i و α_j دو ریشه ساده متمایز هستند و $\alpha_i - \alpha_j$ بنابر (۲۱.۲.۱) ریشه نیست لذا بنابر گزاره (۱۶.۲.۱) قسمت (۵) داریم $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \leqslant ۰$ بنابرین

$$A_{ij} = \frac{۲\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{|\alpha_i|^۲} \leqslant ۰$$

۴. از $A_{ij} = ۰$ داریم $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = ۰$ و از متقارن بودن ضرب داخلی داریم

$$\frac{۲\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle}{|\alpha_j|^۲} = ۰$$

لذا $A_{ji} = ۰$.

۵. قرار دهید

$$D = diag(|\alpha_۱|, \dots, |\alpha_l|)$$

ماتریس $(DAD^{-۱})_{ij} = DAD^{-۱}$ برای

$$D^{-۱} = diag(|\alpha_۱|^{-۱}, \dots, |\alpha_l|^{-۱})$$

به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
(DAD^{-۱})_{ij} &= \sum_{k=۱}^{l} (DA)_{ik} D^{-۱}_{kj} \\
&= (DA)_{ij} |\alpha_j|^{-۱} \\
&= \sum_{n=۱}^{l} D_{in} A_{nj} |\alpha_j|^{-۱} \\
&= D_{ii} A_{ij} |\alpha_j|^{-۱} \\
&= |\alpha_i| A_{ij} |\alpha_j|^{-۱} \\
&= |\alpha_i| \frac{۲\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{|\alpha_i|^۲} |\alpha_j|^{-۱}
\end{aligned}$$