بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت معلم

دانشکده علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

پایان نامه جهت اخـــذ درجه کارشناســـی ارشد

رشته ریاضی محض (شاخهٔ جبر)

عنوان :

مـــدولهـــای بـــا جمـــع یکتـــا

استاد راهنما :

دکتر عبد الجواد طاهری زاده

دانشجو :

عرفان رفعت

بهمن ۱۳۸۶

بسمه تعالی

تاریخ ....

شماره ....

پیوست ....

واحد ....

دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

دانشگاه تربیت معلم

صورتجلسه‌ی دفاع از پایان‌نامه‌ی کارشناسی‌ارشد

جلسه‌ی دفاع از پایان‌نامه‌ی آقای عرفان رفعت دانشجوی دوره‌ی کارشناسی‌ارشد رشته‌ی ریاضی محض تحت عنوان:

مدولهای با جمع یکتا

در روز دوشنبه مورخ ۸۶/۱۱/۱۵ در دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر تشکیل گردید و نتیجه‌ی آزمون به شرح زیر تعیین می‌گردد. نمره‌ی این آزمون (۱۸/۲۵) هیجده و بیست و پنج صدم) می‌باشد.

۱ـ عالی ☒

۲ـ بسیار خوب ☐

۳ـ خوب ☐

۴ـ قابل قبول ☐

۵ـ غیرقابل قبول ☐

۱۳۸۷/۲/۱۱

استاد راهنما	داور خارجی	داور داخلی
دکتر عبدالجواد طاهری‌زاده	دکتر سیداحمد موسوی	دکتر حسین ذاکری

جواد لاآلی

رئیس دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

تهران، خیابان طالقانی بین بهار و شریعتی، پلاک ۵۹۹ کدپستی ۱۵۶۱۸ تلفن۷۵۰۷۷۷۲ فاکس ۷۶۲۹۸۸

فهرست مطالب

تشکر و قدردانی

از زحمات استاد گرامی جناب آقای دکتر طاهری‌زاده که بانهایت درایت و ریزبینی مرا در این راه یاری نمودند کمال تشکر را دارم. همچنین از جناب آقای دکتر ذاکری و دکتر موسوی که زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند سپاسگزارم.

از پدر و مادر عزیزم به خاطر تمام زحماتی که در تمام دوران تحصیل برای من بر عهده داشتند ممنونم. همچنین از همسر مهربانم که وجود پرمهرش یاری رسان من در این مدت بود قدردانی می‌نمایم.

چکیده

بحث اصلی ما در این پایان‌نامه مدول‌های با جمع یکتاست. در واقع یک Rـ مدول V را یک مدول با جمع یکتا می‌نامیم در صورتی که امکان تغییر جمع بر V بدون تغییر عمل R بر V نباشد.

همچنین مجموعه‌های قویاً Rـ محض و Rـ بسته و مؤلفه از یک مدول را مورد مطالعه قرار خواهیم داد و این که در صورتی که R یک حوزه صحیح و V، یک R ـ مدول باشد و ۱ تنها یکال در R نباشد، نشان می‌دهیم که V یک Rـ مدول بدون تاب با جمع یکتاست اگر و تنها اگر V از رتبه یک باشد (یا اگر $V = \{0\}$). همچنین مدول‌های با جمع یکتای متناهی مولد را بر روی حلقه‌های جابه جایی نوتری طبقه‌بندی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: مدول با جمع یکتا، بدون تاب، قویاً Rـ محض، Rـ بسته، مؤلفه.

مقدمه

فرض کنیم V، Rـ مدول و Y یک زیرمجموعه غیر تهی آن باشد. Y را R بسته می‌گوئیم در صورتی که برای هر $r \in R$ و $y \in Y$، $ry \in Y$. Rـ مدول‌های W, V و $Y \subseteq V$ را که Rـ بسته است در نظر می‌گیریم. نگاشت $f : Y \longrightarrow W$ را Rـ همگن می‌نامیم در صورتی که برای همه $v \in Y, r \in R$، $f(rv) = rf(v)$.

مجموعه همه نگاشت‌های Rـ همگن از Y به W را با $M_R(Y, W)$، و در حالتی‌که $Y = V = W$، برای سادگی با $M_R(V)$ نمایش می‌دهیم.

در فصل اول تعاریف و قضایای مقدماتی که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است؛ آورده شده است.

در فصل دوم نتایجی کلی در مدول‌های با جمع یکتا و نگاشت‌های همگن را اثبات می‌کنیم. به ویژه در نتیجه (۴.۲) مشاهده می‌شود که Rـ مدول V با جمع یکتاست اگر و تنها اگر همه نگاشت‌های معکوس‌پذیر در $M_R(V, W)$ برای همه Rـ مدول‌های W خطی باشند. با توجه به این نتایج، ملاحظه می‌کنیم که مدول‌های با جمع یکتا انگیزه‌ای برای مطالعه روی نگاشت‌های همگن فراهم می‌کند.

در فصل سوم مدول‌های بدون تاب با جمع یکتا را روی حوزه‌های صحیح بررسی خواهیم کرد. در ادامه این فصل به بررسی این مطلب خواهیم پرداخت که یک مدول بدون تاب هنگامی که R حوزه صحیح و یا حوزه ایده‌آل اصلی باشد تحت چه شرایطی یک مدول با جمع یکتا خواهد بود.

در فصل چهارم یک سری تعاریف و قضایای مقدماتی در حلقه‌های نوتری و آرتینی و ایده‌آل‌های اول وابسته را مطرح خواهیم کرد و در ادامه نشان می‌دهیم که یک مدول متناهی مولد روی یک حلقه نوتری جابه‌جایی در چه صورتی با جمع یکتاست.

در پایان امید است که این پایان‌نامه برای کسانی که مبحث مدول‌های با جمع یکتا را دنبال می‌کنند

مفید واقع گردد.

مرجع اصلی این پایان‌نامه مقاله

Brink Van der Merwe, Unique Addition Modules, Communications in Algebra, 27(9),4103-4115 (1999).

می‌باشد که مورد بررسی قرار گرفته است.

فصل اول

تعاریف و قضایای مقدماتی مورد نیاز

۱.۱ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه و I ایده‌آلی از R و N مجموعه اعداد طبیعی باشد. در این صورت

$$\sqrt{I} := \{r \in R : r^n \in I \text{ که } \text{باشد داشته وجود } N \text{ به متعلق } n\}$$

ایده‌آلی از R که شامل I است و رادیکال I نامیده می‌شود.

۲.۱ تعریف. فرض کنیم P ایده‌آلی در حلقه جابه‌جایی R باشد. P را ایده‌آل اول از R می‌نامیم هرگاه

(a) $P \subset R$، یعنی P ایده‌آلی سره از R باشد و

(b) هرگاه $a \cdot b \in R$ و $a, b \in P$ در آن صورت $a \in P$ یا $b \in P$.

۳.۱ لم ([۷]،۴۷.۳). فرض کنیم R یک حلقه و P یک ایده‌آل اول حلقه R باشد. در این صورت

(a) $\sqrt{P} = P$،

(b) برای هر $n \in N$، $\sqrt{P^n} = P$.

۴.۱ تعریف. ایده‌آل M از حلقه جابه‌جایی R را ماکسیمال می‌نامیم هرگاه

(a) $M \subset R$، یعنی M ایده‌آلی سره از حلقه R باشد و

(b) ایده‌آلی مانند I از R موجود نباشد به طوری که $M \subset I \subset R$.

۵.۱ تعریف. فرض کنیم R یک حوزه صحیح و M یک Rـ مدول باشد. عنصر $x \in M$ را عنصرتابی از M می‌نامیم هرگاه $\operatorname{Ann}(x) \neq ۰$. هرگاه

$$T(M) = \{x \in M | \operatorname{Ann}(x) \neq ۰\}$$

صفر باشد، در این صورت M بدون تاب نامیده می‌شود.

۶.۱ تعریف. فرض کنیم I ایده‌آلی از حلقه R باشد. I را تحویل‌ناپذیر می‌نامیم هرگاه ایده‌آل‌های L, K از R که به طور سره I را شامل می‌شوند وجود نداشته باشند به طوری که $K \cap L = I$.

۷.۱ قضیه ([۷]،۳۴.۴). فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی نوتری باشد در این صورت

(a) هر ایده‌آل از R اشتراکی از ایده‌آل‌های تحویل‌ناپذیر است.

(b) هر ایده‌آل تحویل‌ناپذیر اولیه است.

۸.۱ تعریف. فرض کنیم M یک Rـ مدول باشد. M را متلاشی نشدنی گوئیم اگر جمعوندهای مستقیم آن فقط $M, ۰$ باشند.

۹.۱ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه و S یک Rـ مدول باشد. در این صورت Rـ مدول M توسیع اساسی از S نامیده می‌شود هرگاه $S \subset M$ و برای هر زیرمدول T از M، $S \cap T = 0$ نتیجه بدهد $T = 0$.

۱۰.۱ تعریف. فرض کنیم M، Rـ مدول باشد. Rـ مدولی مثل E را یک توسیع اساسی ماکسیمال M می‌نامیم هرگاه E توسیع اساسی باشد و اگر $M \leq E \lneqq K$ در آن صورت K توسیع اساسی M نباشد.

۱۱.۱ تعریف. Rـ مدول انژکتیو E را یک توسیع انژکتیو می‌نیمال M می‌نامیم هرگاه E توسیع M باشد و اگر $M \leq K \lneqq E$ در آن صورت K انژکتیو نباشد.

۱۲.۱ قضیه([۸]،۲۱.۲). فرض کنیم M، Rـ مدول و E توسیعی از M باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:

(a) E توسیعی اساسی انژکتیو M است.

(b) E توسیع اساسی ماکسیمال M است.

(c) E توسیع انژکتیو می‌نیمال M است.

۱۳.۱ تعریف. فرض کنیم M، Rـ مدول باشد. Rـ مدولی که دریکی از شرایط قضیه قبل صدق کند پوش انژکتیو M نامیده می‌شود و آن را با $E(M)$ نشان می‌دهیم.

۱۴.۱ قضیه([۸]،۱۵.۲). فرض کنیم E یک Rـ مدول باشد. در این صورت عبارات زیر هم‌ارزند:

(a) E انژکتیو است

(b) E جمعوند مستقیم از هر توسیع‌اش است.

۱۵.۱ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه باشد. زیرمجموعه S از R را یک زیر مجموعه بسته ضربی می‌نامیم هرگاه

(a) $1 \in S$

(b) به ازای هر $a, b \in S$، $ab \in S$.

۱۶.۱ تعریف. فرض کنیم S یک زیرمجموعه بسته ضربی از R باشد در مجموعه $R \times X$ نسبت $\sim$ را چنین تعریف می‌کنیم:

برای هر $(b,t), (a,s) \in R \times S$ می‌نویسیم $(a,s) \sim (b,t)$ اگر وفقط اگر s' از S موجود باشد به طوری که $s'(at - bs) = 0$. قرار می‌دهیم

$$S^{-1}R = \{\frac{a}{s} : a \in R, s \in S\}$$

$$\frac{a}{s} = \{(b,t) \in R \times S : (b,t) \sim (a,s)\},$$

در $S^{-1}R$ اعمال جمع و ضرب را چنین تعریف می‌کنیم:

برای هر $a, b \in R$ و $s, t \in S$ تعریف می‌کنیم

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{ta + sb}{st} \qquad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

این جمع و ضرب خوش‌تعریف هستند و به علاوه $S^{-1}R$ با این اعمال جمع و ضرب تشکیل یک حلقه جابه‌جایی و یکدار می‌دهد. $S^{-1}R$ را حلقه کسرهای R نسبت به S می‌نامند.

فصل دوم

نتایجی کلی در مدول‌های با جمع یکتا

در این فصل ابتدا به تعریف مدول‌های دارای جمع یکتا می‌پردازیم و با استفاده از قضایایی که گفته خواهد شد شرایطی را که یک مدول یا حلقه با جمع یکتاست را بررسی خواهیم کرد. در ادامه یک رابطه هم‌ارزی را بر Rـ مدول V، تعریف می‌کنیم و خواص هم‌ارزی دو عضو از Rـ مدول V را در حالت‌هایی که مدول یکنوا یا Rـ همبند یا Rـ محض و . . .باشد را بررسی خواهیم کرد.

۱.۲ تعریف. گوئیم R- مدول V یک مدول با جمع یکتاست در صورتی که امکان تغییر جمع V بدون تغییر عمل R بر V وجود نداشته باشد.

۲.۲ تعریف. گوئیم حلقه R، یک حلقه با جمع یکتاست در صورتی که امکان تعریف یک جمع جدید بر R بدون تغییر حاصل‌ضرب بر R وجود نداشته باشد.

۳.۲ قضیه. فرض کنیم W, V دو R- مدول باشد. اگر $f \in M_R(V, W)$ که در آن

$$M_R(V, W) = \{\alpha : V \longrightarrow W | \alpha(rv) = r\alpha(v)\ r \in R, v \in V\} \quad \text{برای همه}$$

یک نگاشت دوسویی باشد می‌توانیم f^+ را بر V به صورت زیر تعریف کنیم (عمل R بر V را ثابت نگه می‌داریم)

$$v_1 +_f v_2 = f^{-1}(f(v_1) + f(v_2))$$

علاوه بر این اگر عمل R را بر V ثابت نگه داریم آن گاه همه جمع‌ها بر V به این روش تعریف می‌شوند.

برهان. واضح است که اگر f^+ را به صورتی که در بالا گفته شد تعریف کنیم و عمل R را بر V ثابت نگه داریم، آنگاه f^+ یک جمع بر V می‌باشد. اگر $+_1$ عمل جمعی بر V باشد و نگاشت g را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم.

$$g : (V, +) \longrightarrow (V, +_1)$$

$$v \longrightarrow v$$

آنگاه

$$v_1 +_1 v_2 = g^{-1}(g(v_1) + g(v_2))$$

اینک فرض کنیم $f \in M_R(V,W)$ یک تناظر دوسویی باشد در این صورت $f:(V,+_f) \longrightarrow W$ یک یکریختی است، زیرا

$$f(v_1 +_f v_2) = f(f^{-1}(f(v_1) + f(v_2))$$

$$= f(v_1) + f(v_2)$$

$$, f \in M_R(V,W) \Longrightarrow f(rv) = rf(v)$$

و از آنجا که f دوسویی است لذا یک یکریختی از مدول‌های حلقه می‌باشد.

۴.۲ نتیجه. Rـ مدول V یک مدول با جمع یکتا است اگر و تنها اگر برای هر Rـ مدول W همه نگاشت‌های دوسویی در $M_R(V,W)$ هومومورفیسم باشند.

برهان. فرض کنیم $+_g$ و $+_f$ دو جمع متمایز بر V باشند و عمل R بر V را ثابت می‌گیریم، طبق قضیه (۳.۲) همهٔ جمع‌هایی که بر V تعریف می‌شوند به صورت زیر می‌باشد.

$$v_1 +_f v_2 = f^{-1}(f(v_1) + f(v_2))$$

$$v_1 +_g v_2 = g^{-1}(g(v_1) + g(v_2))$$

در نتیجه بنابه هومورفیسم بودن g^{-1}, f^{-1} داریم

$$v_1 +_f v_2 = f^{-1}(f(v_1)) + f^{-1}(f(v_2)) = v_1 + v_2$$

$$v_1 +_g v_2 = g^{-1}(g(v_1)) + g^{-1}(g(v_2)) = v_1 + v_2$$

در نتیجه داریم

$$v_1 +_f v_2 = v_1 +_g v_2$$

برعکس: فرض کنیم V یک UAM باشد در آن صورت طبق قضیه (۳.۲) همه جمع‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$v_1 +_f v_2 = f^{-1}(f(v_1) + f(v_2))$$

$$\Longrightarrow f(v_1 +_f v_2) = f(f^{-1}(f(v_1) +_f (v_2)) = f(v_1) + f(v_2)$$

و چون $f \in M_R(V, W)$ لذا $f(rv) = rf(v)$. در نتیجه f یک هومورفیسم می‌باشد.

۵.۲ قضیه. شرایط زیر روی حلقه R را در نظر می‌گیریم:

(a) برای هر Rـ مدول V، $M_R(V) = End_R(V)$

(b) برای هر Rـ مدول V، V UAM می‌باشد

(c) برای هر Rـ مدول آزاد V، V UAM می‌باشد

(d) R، UAR می‌باشد.

برهان. $a \Longrightarrow b$: فرض کنیم V، UAM نباشد و $+$، $+_1$ دو جمع متمایز بر V باشند. همچنین فرض کنیم $W = (V, +) \oplus (V, +_1)$ و تعریف می‌کنیم

به طوری که $f : W \longrightarrow W$

$$f(a, b) = (0, a)$$

در این صورت $f \in M_R(W) \backslash End_R(W)$ زیرا

$$f(r(a, b)) = f(ra, rb) = (0, ra) = r(0, a) = rf(a, b)$$

و $f \notin End_R(W)$ زیرا

$$f((a_1, b_1) + (a_2, b_2)) = f(a_1 + a_2, b_1 +_1 b_1)$$

$$(0, a_1 + a_2) \neq f(a_1, b_1) + f(a_2, b_2)$$

اگر $f((a_1, b_1) + (a_2, b_2)) = f(a_1, b_1) + f(a_2, b_2)$

آنگاه $((0, a_1 + a_2) = (0, a_1 +_1 a_2) \Longrightarrow a_1 + a_2 = a +_1 a_2$

در صورتی که $+$، $+_1$ دو جمع متمایز می‌باشند که تناقض است.

$b) \Longrightarrow c)$: واضح است.

$c) \Longrightarrow d)$: فرض کنیم $+$، $+_1$ دو جمع متمایز بر R باشند در آن صورت قرار می‌دهیم

$$W = (R, +) \oplus (R, +_1)$$

تعریف می‌کنیم

$$f : W \longrightarrow W$$

به طوری که

$$f(a, b) = (a, a +_1 b)$$

در این صورت $f \in M_R(W) \backslash End_R(W)$؛ زیرا $f \in M_R(W)$

$$f(r(a, b)) = f(ra, rb)) = (ra, ra +_1 rb)$$

$$= (ra, r(a +_1 b)) = r(a, a +_1 b) = rf(a, b)$$