بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

پایان نامه کارشناسی ارشد

منظم آرنز بودن جبرهای باناخ به طور ضعیف دنباله ای کامل

از

جواد جوهریان

استاد راهنما

دکتر عباس سهله

شهریور ۱۳۸۹

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی(گرایش محض)

منظم آرنز بودن جبرهای باناخ به طور ضعیف دنباله ای کامل

از

جواد جوهریان

استاد راهنما

دکتر عباس سهله

شهریور ۱۳۸۹

تقدیم به

دستان زحمتکش **پدرم**

و قلب مهربان **مادرم**

که آنها تنها سرمایه های زندگی ام هستند .

تقدیر و تشکر

این نوشته اگر ارزشی در مجموعه تلاشهای تحقیقاتی داشته باشد مدیون راهنمایی ها و همدلی انسان های بسیاری است که بدون آن ها چارچوب این پژوهش شکل نمی گرفت . شمار آنان که به گونه ای سهمی در این اثر دارند آن قدر زیاد است که ذکر نامشان در این مختصر نمی گنجد اما وظیفه ی خود می دانم که در این مجال از استادان گرانقدری که شاگردی در حضورشان سبب افتخار این جانب است سپاسگزاری کنم . قبل از همه از راهنمایی ها و زحمات استاد راهنمای عزیزم آقای دکتر عباس سهله تشکر می کنم که با دقت در مراحل مختلف این پژوهش یاری ام فرمودند همچنین از آقایان دکتر اسماعیل انصاری و دکتر حسین سهله نیز که قبول زحمت فرمودند و عهده دار داوری این پایان نامه شدند کمال تشکر را دارم و در پایان از دوستان عزیزم آقایان عباس زیوری و رضا گنج بخش سپاسگزارم که در مسیر این پژوهش از تجربیات آنها نیز استفاده کردم .

چکیده

منظم آرنز بودن جبرهای باناخ به طور ضعیف دنباله ای کامل

جواد جوهریان

در این پایان نامه خواهیم دید که اگر A یک جبر باناخ غیر یکدار با یک همانی تقریبی کران دار باشد آن گاه یک زیر جبر غیر یکدار B از A با یک همانی تقریبی کران دار دنباله ای وجود دارد . هم چنین A نمی تواند هم منظم آرنز و هم به طور ضعیف دنباله ای کامل باشد .

کلید واژه :

جبر باناخ ، به طور ضعیف دنباله ای کامل ، منظم آرنز ، ضرب آرنز ، همومورفیسم ، همانی تقریبی .

فهرست

صفحه

چکیده فارسی .... ج

چکیده انگلیسی .... چ

مقدمه ۱

فصل اول : تعاریف ، قضایا و مطالب پیش نیاز ۲

۱.۱ : توپولوژی ۳

۲.۱ : جبرهای باناخ ۳

۳.۱ : توپولوژی ضعیف ۹

۴.۱ : ایده آل و مدو ل ۱۳

۵.۱ : اندازه و جبر گروه $L^{1}(G)$ ۱۵

فصل دوم : ضرب های آرنز روی جبر باناخ ۲۱

۱.۲ : بیان ضرب آرنز ۲۲

۲.۲ : همانی مرکب ۲۴

۳.۲ : تجزیه ۲۶

۴.۲ : جبر باناخ منظم آرنز ۲۹

فصل سوم : جبرهای باناخ منظم آرنز و به طور ضعیف دنباله ای کامل ۳۵

۱.۳ : جبرهای باناخ به طور ضعیف دنباله ای کامل ۳۶

۲.۳ : نقش عنصر یکه در منظم آرنز بودن جبرهای باناخ (wsc) با (BAI) ۳۹

۳.۳ : زیر جبرهای باناخ یکدار ۴۲

۴.۳ : منظم آرنز بودن جبر فوریه $A(G)$ ۴۵

فصل چهارم : همریختی پیوسته بین جبرهای باناخ منظم آرنز و به طور ضعیف دنباله ای کامل ۵۰

۱.۴ : هم ارزی جبرهای باناخ منظم آرنز و متناهی بعد ۵۱

۲.۴ : زیر جبرهای یکدار متناهی بعد و نیم ساده ۵۸

نتیجه گیری و پیشنهاد برای ادامه کار ۶۵

واژه نامه ۶۹

مراجع ۷۰

در این پایان نامه به بررسی برخی ویژگی های جبرهای باناخ منظم آرنز می پردازیم .دوگان دوم جبر باناخ A همراه با دو ضربی که از ضرب جبر A می گیرد زمینه ی جدیدی را برای تحقیق در مورد ویژگی های جبر های باناخ فراهم می کند ضرب های آرنز اولین بار توسط $RICHARD\ ARENS$ در سال ۱۹۵۱ روی دوگان دوم جبر باناخ A معرفی شدند و بدین ترتیب مسیر نوینی در مطالعه روی جبر های باناخ فراهم شد پس از او ریاضیدانانی چون $A.T.LAO\ ,P.CIVIN, B.YOOD$ در این زمینه به مطالعات زیادی پرداختند تا اینکه در سال ۱۹۹۰ ، $A.ULGER$ منظم آرنز بودن را روی جبر های باناخ به طور ضعیف دنباله ای کامل مورد بررسی قرار داد در سال ۱۹۹۱ ، $B.FORREST$ ثابت کرد که اگر G یک گروه میانگین پذیر و فشرده باشد آن گاه جبر فوریه $A(G)$ منظم آرنز است اگر وتنها اگر G متناهی باشد و سپس نشان داد که متناهی بودن G با به طور ضعیف دنباله ای کامل بودن جبر فوریه $A(G)$ هم ارز است در ادامه در سال ۱۹۹۶ ، $A.ULGER$ و $A.T.LAO$ همزمانی دو ویژگی منظم آرنز بودن و به طور ضعیف دنباله ای کامل بودن جبر باناخ A با همانی تقریبی کران دار دنباله ای را منوط به داشتن عنصر یکه دانستند و سپس در سال ۱۹۹۹،$A.ULGER$ با برداشتن شرط دنباله ای بودن از روی همانی تقریبی کران دار A همزمانی دو ویژگی بالا را روی جبر باناخ با همانی تقریبی کران دار ثابت کرد و سرانجام در سال ۲۰۰۷ ، $X.T.MIAO$ با بررسی زیر جبر های باناخ یکدار نقش تجزیه دوگان یک زیر جبر بر یکدار بودن جبرباناخ آن را مورد مطالعه قرار داد .

ساختار اصلی این پایان نامه بر اساس مرجع [۱۷] تنظیم شده است که شامل چهار فصل می باشد در فصل اول قضایا و تعاریفی بیان می شود که در فصول بعدی به آن ها نیاز مندیم و در ادامه در فصل دوم که با تعریف ضرب اول و دوم آرنز آغاز می شود مفهومی به نام تجزیه روی دوگان جبر باناخ A یعنی A^* را بررسی می کنیم در فصل سوم با تعریف جبرهای باناخ به طور ضعیف دنباله ای کامل آشنا خواهیم شد در بخش دوم این فصل تاثیر نقش یکدار بودن جبر باناخ A را در همزمانی دو ویژگی منظم آرنز بودن و به طور ضعیف دنباله ای کامل بودن خواهیم دید و در بخش سوم این فصل که براساس مرجع [۱۳] تنظیم شده است زیر جبر های باناخ یکدار را بررسی می کنیم در ادامه در بخش چهارم که براساس مرجع [۸] تنظیم شده است منظم آرنز بودن جبر فوریه $A(G)$ را خواهیم دید و نهایتاً در فصل چهارم ثابت خواهیم کرد که برای کلاس بزرگی از جبر های باناخ به طور ضعیف دنباله ای کامل ، منظم آرنز بودن و بعد متناهی از جبر های باناخ با هم هم ارزند .

تذکر :

در متن پایان نامه برای شماره گذاری مطالب عدد سمت راست بیانگر شماره فصل و عدد سمت چپ شماره بخش مورد نظر است در صورتی که هر بخش دارای زیر بخش باشد شماره هر زیر بخش در سمت چپ عدد فوق قرار می گیرد به عنوان مثال، اگر تعریفی سومین زیر بخش از بخش چهارم فصل دوم باشد به صورت ۳.۴.۲ نوشته خواهد شد .

فصل اول

تعاریف، قضایا و مطالب پیش نیاز

دراین فصل به بیان تعاریف و قضایایی می پردازیم که در فصول بعدی به آن ها نیازمندیم بیشتر مطالب این فصل را می توان در مراجع [۷] ,[۴] ,[۳] ,[۱] یافت که در پایان هر قضیه یا تعریف در صورت لزوم مراجع دیگری نیز ذکر می گردد .

۱.۱ توپولوژی

۱.۱.۱ تعریف :

فرض کنید X یک مجموعه باشد گردایه τ از زیر مجموعه های X را یک توپولوژی روی X می نامیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند :

۱. $X , \emptyset \in \tau$

۲. اجتماع هر تعداد از اعضای τ در τ باشد .

۳. اشتراک تعداد متناهی از اعضای τ در τ باشد .

۲.۱.۱ تعریف :

فرض کنید τ یک توپولوژی روی فضای برداری X باشد به طوریکه :

۱. هرتک عضوی از X بسته باشد .

۲. اعمال فضای برداری نسبت به توپولوژی τ پیوسته باشد .

در این صورت X را یک فضای برداری توپولوژیکی می نامند .

۳.۱.۱ تعریف :

فرض کنید G یک گروه باشد گروه G با توپولوژی τ را یک گروه توپولوژیک می نامند هرگاه :

۱. عمل ضرب در G یعنی تابع $(x,y) \to x.y$ از $G \times G \to G$ پیوسته باشد .

۲. عمل معکوس گیری در G یعنی تابع $x \to x^{-1}$ از $G \to G$ پیوسته باشد .

۲.۱ جبرهای باناخ

۱.۲.۱ تعریف :

اگر X و Y فضاهای برداری باشند نگاشت $\Lambda : X \to Y$ خطی نامیده می شود اگربرای هر $x,y \in X$ و اسکالرهای α و β داشته باشیم :

$$\Lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha\Lambda(x) + \beta\Lambda(y)$$

یک نگاشت خطی از یک فضای برداری به توی یک میدان اسکالر تابعک خطی نامیده می شود .

۲.۲.۱ تعریف :

فرض کنیدA یک فضای برداری باشد می گوییمA یک جبرروی میدان$\mathbb{F}$ است هرگاه نگاشت$x.\mathrm{y}$ $\rightarrow$ (x,y) ازA $A \times A \rightarrow$ به ازای هر $\mathbb{F}$ $\in$ α, A $\in$ x ,y, z در شرایط زیر صدق کند :

۱. $x(y+z)=x.y+x.z$, $(x+y)z=x.z+y.z$

۲. $x(yz)=(xy)z$

۳. $\alpha(xy)=(\alpha x)y=x(\alpha y)$

۳.۲.۱ تعریف :

فرض کنید A یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ باشد اگر تابعی مانند $A \rightarrow \mathbb{R}$: $\|.\|$موجود باشد که در شرایط زیر صدق کند $\|.\|$را یک نیم نرم روی A می نامند هرگاه به ازای هر$x,\mathrm{y}\in A$ و هر$\alpha \in \mathbb{R}$ داشته باشیم :

۱. $\| x \| \geq \circ$

۲. $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$

۳. $\| x+\mathrm{y}\| \leq \|x\| + \|\mathrm{y}\|$

نیم نرم $\|.\|$تعریف شده دربالا اگر در شرط زیر صدق کند یک نرم روی A است .

۴. $\| x \| = \circ$ اگرو تنها اگر $x = \circ$ و A را همراه با نرم$\|.\|$ را یک فضای نرم دار می نامند .

۴.۲.۱ تعریف :

فرض کنید A یک جبر و $\|.\|$ یک نرم روی جبر A باشد اگر به ازای هر $x,y \in A$ نامساوی $\|x\mathrm{y}\| \leq \|x\|.\|\mathrm{y}\|$ (خاصیت زیر ضربی نرم) برقرار باشد آن گاه $\|.\|$ یک نرم جبری روی A است و جبر A همراه با $\|.\|$ را یک جبر نرم دار می نامند.

۵.۲.۱ تعریف :

جبر نرم دار$(A,\|.\|)$ را که هر دنباله کشی در آن همگرا باشد یک جبر باناخ می نامند .(یعنی A به عنوان یک فضای نرم دار کامل است)

۶.۲.۱ تعریف :

فرض کنید A یک جبر و $e \in A$ باشد آن گاه e را یک عنصر همانی برای جبر A می نامند هرگاه برای هر $x \in A$ داشته باشیم $xe = ex = x$. اگر جبر A عنصر همانی داشته باشد A را یک جبریکدار می نامند.فرض کنید A یک جبر یکدار باشد

و$a \in A$ اگر $b \in A$ موجود باشد به طوریکه $ba = e$ آنگاه b رامعکوس چپ a می نامیم و اگر $b \in A$ موجود باشد به طوریکه $ab = e$ آنگاه b را معکوس راست a می نامیم $a \in A$ را معکوس پذیر می نامیم هرگاه a معکوس راست و چپ داشته باشد.

۷.۲.۱ تعریف :

فرض کنید A یک مجموعه باشد $(A,.)$ را یک نیم گروه می گویند هرگاه $A \neq \emptyset$ و عمل دوتایی $.$ روی A یک عمل شرکت پذیر باشد .

۸.۲.۱ تعریف :

زیر مجموعه B از نیم گروه A را یک زیر نیم گروه می گویند هرگاه به ازای هر $x,y \in B$ داشته باشیم $xy \in B$.

۹.۲.۱ تعریف :

زیر مجموعه B ازجبرA را یک زیر جبر از A می نامند هرگاه :

۱. B یک زیر فضای خطی ازA باشد یعنی به ازای هر $x,y \in B$ و هر $\beta , \alpha \in \mathbb{F}$ داشته باشیم $\alpha x + \beta y \in B$

۲. B یک زیر نیم گروه A باشد .

۱۰.۲.۱ قضیه :

اگر A یک جبرباناخ و B یک زیر جبر بسته ازA باشد، B نیز جبر باناخ است .

۱۱.۲.۱ تعریف :

فرض کنید D یک مجموعه با رابطه ترتیب جزیی $\leq$ باشد بخوانید یعنی $(D,\leq)$. حال اگر به ازای هر$\alpha, \beta \in D$ ، γ ای موجود باشد به طوریکه $\beta < \gamma$ و $\alpha < \gamma$ آن گاه D یک مجموعه مستقیم است .

۱۲.۲.۱ تعریف :

یک نت[۱] مانند $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ در فضای توپولوژیکی E نگاشتی از مجموعه مستقیم D به روی E است که می توان آن را به صورت $(x_\alpha : D \to E)$ در نظر گرفت .

۱۳.۲.۱ تعریف :

به ازای هر$x \in E$ ، نتx_α همگرا به x است هرگاه به ازای هر همسایگی U ازx , $\gamma \in D$ ای موجود باشد به طوریکه به ازای هر $\alpha \geq \gamma$, $x_\alpha \in U$ باشد و دریک فضای نرمدار$x_\alpha \to x$ هرگاه به ازای هر$\varepsilon > ۰$, $\gamma \in D$ ای موجود باشد بطوریکه

[۱] net

به ازای هر $\alpha \geq \gamma$ ، $\varepsilon > \| x_\alpha - x \|$باشد .

۱۴.۲.۱ قضیه :

اگر (X,τ) یک فضای برداری توپولوژیکی و A زیرمجموعه ی X باشد در این صورت برای$x \in X$، نت $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ درA موجود است به طوریکه $x_\alpha \to x$ اگرو تنها اگر $x \in \bar{A}$.

۱۵.۲.۱ قضیه :

هر دنباله یک نت است ولی هر نتی یک دنباله نیست و اگر یک نت همگرا باشد هر زیرنت آن نیز همگراست .

۱۶.۲.۱ تعریف :

فرض کنید A یک جبر نرم دار روی میدان $\mathbb{F}$ باشد نت $(e_\alpha)_{\alpha\in D}$ را درA یک همانی تقریبی چپ می نامند هرگاه برای هر

$$\| e_\alpha x - x \| \to \circ \qquad , x \in A$$

$(e_\alpha)_{\alpha\in D}$ را یک همانی تقریبی راست می نامند هرگاه برای هر $x \in A$ ،

$$\| x e_\alpha - x \| \to \circ$$

اگر$(e_\alpha)_{\alpha\in D}$ همانی تقریبی چپ و راست باشد$(e_\alpha)_{\alpha\in D}$ را همانی تقریبی می نامند .

۱۷.۲.۱ تعریف :

همانی تقریبی $(e_\alpha)_{\alpha\in D}$ درA کران دار است اگر$k > \circ$ ای موجود باشد به طوریکه $\| e_\alpha \| \leq k \ (k \in \mathbb{Z})$ در این صورت $(e_\alpha)_{\alpha\in D}$ را یک همانی تقریبی کران دار می نامند که اختصاراً با (BAI) نشان می دهند و اگر $(e_\alpha)_{\alpha\in D}$ یک دنباله باشد آن گاه $(e_\alpha)_{\alpha\in D}$ یک همانی تقریبی کران دار دنباله ای نامیده می شود .

۱۸.۲.۱ قضیه :

فرض کنیدA یک جبر نرم دار شامل یک مجموعه کران دار چونU باشد به طوریکه به ازای هر $x \in A$ و $\varepsilon > \circ$, $u \in U$ ای موجود باشد که $\| x - ux \| \leq \varepsilon$ ، آن گاه A یک همانی تقریبی چپ کران دار دارد .

برهان) (ر.ک. [۱,۲.۱۱.۱])

۱۹.۲.۱ تعریف : (فضای دوگان)

فرض کنیدA یک جبر باناخ باشد مجموعه تمام تابعک های مانندf از A به توی $\mathbb{C}$ که خطی و پیوسته باشد را فضای دوگانA می نامند که آن را باA^* نشان می دهند یعنی

$$A^* = \{ f : A \to \mathbb{C}, \ \text{و پیوسته} \ f\text{خطی} \}$$

فضای A^* یک فضای باناخ است زیرا ($A^* = L(A, \mathbb{C}$ و $\mathbb{C}$ یک فضای باناخ است و نرم فضای باناخ A^* به ازای هر $(f \in A^*)$

به صورت $\|f\| = sup\left\{\|f(x)\|, \|x\| \le ۱\right\}$ تعریف می شود .

۲۰.۲.۱ تعریف : (فضای دوگان دوم)

فرض کنید A یک جبر باناخ باشد مجموعه تمام تابعکهای مانند F از A^* به توی $\mathbb{C}$ که F خطی وپیوسته باشد را فضای دوگان دوم A می نامند که آن را با A^{**} نشان می دهند یعنی $A^{**} = \left\{F: A^* \to \mathbb{C}\ ,\ \text{وپیوسته خطی } F\right\}$.

فضای A^{**} نیز یک فضای باناخ است زیرا $A^{**} = L(A^*, \mathbb{C})$ و $\mathbb{C}$ یک فضای باناخ است ونرم فضای باناخ A^{**} به صورت زیر تعریف می شود : $(F \in A^{**})$, $\|F\| = sup\left\{\|F(f)\|, \|f\| \le ۱\right\}$.

۲۱.۲.۱ قضیه : (قضیه عمومی هان باناخ[۲])

فرض کنید X یک فضای برداری حقیقی یا مختلط باشد و $\|.\|$ یک نیم نرم روی X و Y زیرفضای خطی X باشد اگر f تابعکی خطی و کراندار روی Y باشد به طوریکه به ازای هر $x \in Y$,

$$|f(x)| \le \|x\|$$

آن گاه f دارای توسیعی مانند $\hat{f}$ از Y به X می باشد به طوریکه به ازای هر $x \in X$,

$$|\hat{f}(x)| \le \|x\|$$

و روی Y , $\hat{f} = f$.

برهان) فرض کنید $f(x) = u(x) - i\,u(i\,x)$ که $u: Y \to \mathbb{R}$ نگاشت خطی و حقیقی می باشد و به ازای هر $x \in Y$ $u(x) \le |u(x)| \le |f(x)| \le \|x\|$, آن گاه $U: X \to \mathbb{R}$ ای موجود است که $U(x) \le \|x\|$ روی X و روی Y داریم $u(x) = U(x)$.

آن گاه $\hat{f}: X \to \mathbb{C}$ با $\hat{f}(x) = U(x) - iU(ix)$ موجود است که $\hat{f}(x) = f(x)$ به ازای هر $x \in Y$. فرض کنید $x \in X$ و $\hat{f}(x) \neq ۰$ باشد در این صورت :

$$|\hat{f}(x)| = \frac{|\hat{f}(x)|}{\hat{f}(x)}\ \hat{f}(x) = \alpha\hat{f}(x) = \hat{f}(\alpha x) = U(\alpha x) - i\,U(i\,\alpha x)$$

$$|\hat{f}(x)| = U(\alpha x) \le \|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\| = \|x\|$$

۲۲.۲.۱ قضیه :(قضیه هان باناخ در فضای نرم دار)

فرض کنید f تابعکی خطی و کران دار روی زیر فضای خطی Y از فضای نرم دار X باشد آنگاه توسیع $\hat{f}$ از Y به X (خطی وکراندار)

---

[۲] *Hahn Banach*

وجود دارد که $\|\hat{f}\|=\|f\|$.

۲۳.۲.۱ نتیجه :

فرض کنید X یک فضای نرم دار و $x \neq 0$ عضوی از X باشد در این صورت تابعک خطی کران داری مانند $\hat{f}$ روی X وجود دارد به طوریکه $\hat{f}(x)=\|x\|$ و $\|\hat{f}\|=1$.

۲۴.۲.۱ تعریف :

نگاشت طبیعی بین A^{**} و A را به ازای هر $f \in A^*$, $a \in A$ به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\pi: A \to A^{**} \qquad , \qquad \pi(a): A^* \to \mathbb{C}$$
$$a \to \pi(a) \qquad\qquad f \to f(a)$$

۲۵.۲.۱ تبصره :

با استفاده از قضیه هان باناخ داریم $\|\pi(a)\|=\|a\|$ بنابراین $a \to \pi(a)$ از $\pi: A \to A^{**}$ تعریف شده در قبل یک نگاشت یک به یک و حافظ نرم است بنابراین می توان A را به عنوان زیر فضای A^{**} در نظر گرفت در حالتی که A یک فضای باناخ باشد می توان A را بعنوان زیر فضای بسته A^{**} در نظر گرفت که در آن نرم $\pi(a)$ به صورت زیر تعریف می شود :

$$\|\pi(a)\|=sup\left\{|\pi(a)f|, \|f\| \leq 1, f \in A^*\right\}=sup\left\{|f(a)|, \|f\| \leq 1, f \in A^*\right\}$$

۲۶.۲.۱ تعریف :

اگر A یک فضای باناخ باشد و تابع π دربالا پوشا باشد فضای A را انعکاسی می نامندکه ثابت می شود A انعکاسی است اگر و تنها اگر A^* انعکاسی باشد و اگر A یک جبر باناخ باشد در این صورت جبرباناخ A انعکاسی است و $A = A^{**}$.

۲۷.۲.۱ حکم :

هر فضای نرم دار متناهی- بعد انعکاسی است .

۲۸.۲.۱ تعریف :

فرض کنید A یک جبر باناخ باشد برای هر $f \in A^*$ و هر $x,a \in A$ تعریف می کنیم :

$$(f.a)(x)=f(ax) \qquad , \qquad (a.f)(x)=f(xa)$$
$$A.A^*=\{a.f,\ f \in A^*, a \in A\} \qquad , \qquad A^*.A=\{f.a,\ f \in A^*, a \in A\}$$

که A^*A فضای خطی تولید شده توسط $A^*.A$ و AA^* فضای خطی تولید شده توسط $A.A^*$ در نظر گرفته می شود .

۲۹.۲.۱ تعریف :(C^*- جبرها)

یک برگشت خطی روی یک فضای خطی E عبارتست از نگاشت $x \to x^*$ روی E به طوری که شرایط زیر برقرار باشد :

۱. به ازای هر $x \in E$ داشته باشیم : $(x^*)^* = x$

۲. به ازای هر $x,y \in E$,α , $\beta \in \mathbb{C}$ داشته باشیم : $(\alpha x + \beta y)^* = \bar{\alpha}\ x^* + \bar{\beta}\ y^*$

یک برگشت روی جبر A عبارتست از یک برگشت خطی روی A به طوریکه به ازای هر $a,b \in A$ $(ab)^* = b^*a^*$. جبر دارای یک برگشت را یک $*-$ جبر می نامند و اگر A یک $*-$ جبرباناخ باشد و به ازای هر $a \in A$ داشته باشیم :

$(*)$ $\| a^*a \| = \|a\|^2$ می گوییم A یک C^*- جبر است و نرمی که در خاصیت $(*)$ صدق کند یک C^*- نرم نامیده می شود . (هر C^*- جبر دارای BAI است. ر.ک . [۳])

۳.۱ توپولوژی ضعیف

۱.۳.۱ تعریف :

فرض کنید X یک مجموعه، $\{(y_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ خانواده ای از فضاهای توپولوژیک و F خانواده ای ازنگاشتهای $f_\alpha: X \to y_\alpha$ باشد گردایه اجتماع و اشتراک های متناهی از مجموعه های $f_\alpha^{-1}\ (v_\alpha)$ که $v_\alpha \subset y_\alpha$ باز است توپولوژی τ_α روی X را را تشکیل می دهد که ضعیف ترین توپولوژی روی X است که هر $f_\alpha \in F$ را پیوسته می سازد به این معنی که اگر τ_1 یک توپولوژی روی X با خاصیت مذکور باشد آن گاه $\tau_\alpha \subset \tau_1$. توپولوژی τ_α را F - توپولوژی روی X می نامیم.

۲.۳.۱ تعریف :

فضای برداری توپولوژیکی X را موضعاً محدب می نامیم هرگاه X دارای پایه موضعی در صفر باشد که اعضای آن محدب است .

۳.۳.۱ تعریف :

می گوییم A^* نقاط A را جدا می کند هرگاه به ازای هر $a,b \in A$ که $a \neq b$ است $f \in A^*$ ای موجود باشد به طوریکه $f(a) \neq f(b)$.

۴.۳.۱ تعریف :(توپولوژی ضعیف)

فرض کنید A یک فضای نرم دار باشد آن گاه ضعیف ترین توپولوژی روی A که همه عناصر A^* را پیوسته می سازد توپولوژی ضعیف (w) روی A می نامیم . برای هر فضای توپولوژیکی موضعاً محدب می توان توپولوژی ضعیف تعریف کرد .

۵.۳.۱ قضیه :

با توجه به تعریف نگاشت طبیعی $\pi(A)$ نقاط A^* را جدا می سازد .

برهان) فرض کنید مجموعه k به صورت $k = \{\pi(a), a \in A\}$ تعریف شود در این صورت k نقاط A^* را جدا می کند زیرا به ازای هر $f , g \in A^*$ داریم : $\pi(a)f = \pi(a)g \Rightarrow f(a) = g(a) \Rightarrow f = g$.

۶.۳.۱ تعریف :(توپولوژی *- ضعیف)

فرض کنید A یک فضای نرم دار باشد ضعیفترین توپولوژی روی A^* که همه عناصر A را(به عنوان زیر فضایی از A^{**}) پیوسته می سازد توپولوژی *- ضعیف (w^*) روی A^* می نامند .

۷.۳.۱ قضیه :

فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیکی باشد و X^* نقاط X را جدا کند در این صورت توپولوژی ضعیف X , τ_1 را به یک فضای موضعاً محدب تبدیل می کند که X^* فضای دوگان آن است. τ_1 ضعیفترین توپولوژی روی X است که هر $f \in X^*$ را پیوسته می سازد .

۸.۳.۱ تعریف :(همگرایی ضعیف)

فرض کنید A یک جبر باناخ باشد و $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله ای در A باشد می گوییم $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ در A به طور ضعیف به a میل می کند اگر به ازای هر $f \in A^*$ داشته باشیم : $f(a_n)\to f(a)$.

۹.۳.۱ تعریف : (همگرایی*- ضعیف)

دنباله ی $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ در A^* به طور *- ضعیف به f همگراست اگر به ازای هر $a \in A$ داشته باشیم : $f_n(a) \to f(a)$.

۱۰.۳.۱ تذکر :

توپولوژی *- ضعیف زیر مجموعه توپولوژی ضعیف و توپولوژی ضعیف زیر مجموعه توپولوژی نرم است .

۱۱.۳.۱ قضیه : (باناخ- آلاقلو[۳])

فرض کنید X یک فضای نرم دار باشد آن گاه گوی یکه بسته در X^* در توپولوژی *- ضعیف فشرده می باشد یعنی $k = \{\Lambda \in X^*, \|\Lambda\| \leq ۱\}$ در توپولوژی *- ضعیف فشرده است .

۱۲.۳.۱ قضیه :

فرض کنید A یک زیر مجموعه محدب از فضای نرم دار باشد در این صورت $\bar{A} = \bar{A}^w$ که در آن $\bar{A}^w$ بستار A نسبت به

---

[۳] $Banach - Alaoglu$

توپولوژی ضعیف است .

۱۳.۳.۱ تذکر :

روی A^* توپولوژی *- ضعیف از توپولوژی ضعیف، ضعیف تر و این دو توپولوژی زمانی که A انعکاسی است بر هم منطبقند .

۱۴.۳.۱ قضیه :(قضیه گلدشتاین)

اگر A یک جبرباناخ باشد آن گاه به ازای هر $F \in A^{**}$ نتی مانند $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ در A وجود داردبه طوریکه $\|x_\alpha\| \leq \|F\|$ و $\pi(x_\alpha)$ به طور *- ضعیف در A^{**} به F همگراست به عبارتی دیگر A در A^{**} *- ضعیف چگال است .

۱۵.۳.۱ تعریف :

فرض کنید $T \in B(X,Y)$ و S گوی یکه بسته در X باشد آن گاه عملگر T را فشرده می گوییم اگر بستار قوی TS با توپولوژی قوی روی Y فشرده باشد .

۱۶.۳.۱ تعریف :

فرض کنید T یک عملگر خطی وکراندار از فضای باناخ A به A باشد آن گاه T به طور ضعیف فشرده است هرگاه به ازای هر نت کران دار $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ در A ، $(Tx_\alpha)_{\alpha\in I}$ دارای یک زیر نت به طور ضعیف همگرا در A باشد می گوییم مجموعه $X \subset A$ به طور نسبی ضعیف فشرده است هرگاه بستارش در توپولوژی ضعیف به طور ضعیف فشرده باشد .

۱۷.۳.۱ قضیه :

فرض کنید $T^{**}: A^{**} \to A^{**}$ باشد ، عملگر خطی $T: A \to A$ به طور ضعیف فشرده است اگر و تنها اگر

$$T^{**}(A^{**}) \subseteq \pi(A)$$

۱۸.۳.۱ قضیه :

فرض کنید X یک فضای باناخ باشد آن گاه گزاره های زیر معادلند :

۱. فضای X انعکاسی است .

۲. فضای X^* انعکاسی است .

۳. گوی یکه بسته در X، در توپولوژی ضعیف فشرده است .

۴. هر دنباله کراندار در X دارای یک زیر دنباله به طور ضعیف همگراست .

۱۹.۳.۱ قضیه :

فرض کنید A یک جبر باناخ باشد در این صورت گزاره های زیر معادلند :

۱. $\pi\ (A)$ ایده آل چپ A^{**} است .

۲. برای هر $a \in A$ نگاشت $b \to ba$ از $A \to A$ به طور ضعیف فشرده است .

۳. برای هر $a \in A$ نگاشت $f \to af$ از $A^* \to A^*$ به طور ضعیف فشرده است.

برهان) (ر.ک. [۵،۳.۴])

۲۰.۳.۱ تعریف :

فرض کنید A یک جبر باناخ باشد و $a \in A$ آن گاه $a^{\tau}: A \to A$ با $x \to ax$ عمگر ضربی چپ نام دارد و خودالحاق $a^{\tau *}$ به صورت $a^{\tau *}: A^* \to A^*$ با $f \to af$ تعریف می شود که af تابعک روی A است که به صورت $af\ (x)= f(ax)$ تعریف می شود لذا مجموعه $H\ (a)= \{af, f \in A^*\}$ تصویر A^* تحت $a^{\tau *}$ است . همچنین مجموعه ی $H\ (a)$ به طورضعیف فشرده است اگر و تنها اگر a^{τ} به طور ضعیف فشرده باشد . [۱۸]

۲۱.۳.۱ تعریف :

فرض کنید A یک جبر باناخ باشد می گوییم دنباله ی $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ در A به طور ضعیف کشی است هرگاه به ازای هر همسایگی ضعیف w از صفر عدد طبیعی N موجود باشد به طوریکه به ازای هر $m,n \geq N$ داشته باشیم : $a_n - a_m \in w$ یعنی

$$\forall \varepsilon > \circ, \forall f \in A^* \ \ \exists N \in \mathbb{N}, \forall\, m,n \geq N \ \Rightarrow |f(a_n) - f(a_m)| \ < \varepsilon$$

و می گوییم دنباله ی $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ در A^* به طور ضعیف کشی است هرگاه :

$$\forall \varepsilon > \circ, \forall F \in A^{**} \ \ \exists N \in \mathbb{N}, \forall\, m,n \geq N \ \Rightarrow |F(f_n) - F(f_m)| \ < \varepsilon$$

۲۲.۳.۱ قضیه : (ابرلین_اشمولیان [۴])

فرض کنید A زیر مجموعه ای از فضای باناخ X باشد آن گاه گزاره های زیر معادلند :

۱. A به طور ضعیف فشرده دنباله ای است یعنی هر دنباله در A یک زیر دنباله دارد که ضعیف همگرا به عنصری از X است .

۲. هر زیر مجموعه ی نامتناهی شمارا از A یک نقطه حدی ضعیف در X دارد یعنی نقطه ای که هر همسایگی ضعیف آن شامل عنصری در زیر مجموعه نامتناهی است .

۳. بستار A در توپولوژی ضعیف ، ضعیف فشرده است .

۲۳.۳.۱ قضیه :(کران داری یکنواخت)

فرض کنید X یک فضای باناخ و $\mathcal{F}$ یک خانواده از عملگرهای خطی کران دار از X به یک فضای نرم دار Y باشد فرض می کنیم

[۴] $Eberlein - Smulian$