بسم الله الرحمن الرحيم

باسمه تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

تعهد نامه اصالت اثر

اینجانب **رضا غلامزاده** متعهد می‌شوم که مطالب مندرج در این پایان‌نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این پژوهش از آن‌ها استفاده شده، مطابق مقررات ارجاع و در فهرست منابع و مأخذ ذکر گردیده است. این پایان‌نامه/ رساله قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم‌سطح یا بالاتر ارایه نشده است. در صورت اثبات تخلف (در هر زمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد. کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی می‌باشد.

نام و نام‌خانوادگی دانشجو
امضاء

تهران- لویزان- کد پستی ۱۶۷۸۸- صندوق پستی ۱۶۳- ۱۶۷۸۵ تلفن ۰۶۰-۲۲۹۷۰۰۶۰-۹ (داخلی ۲۳۴۷)
نمابر ۲۲۹۷۰۰۱۱ پست الکترونیکی sru@sru.ac.ir

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

دانشکده علوم پایه

تعمیم‌هایی از قضیه شارکوفسکی

نگارش

رضا غلامزاده

استاد راهنما: خانم دکتر منیره اکبری

استاد مشاور: خانم دکتر فرح بخش کمالی

پایان‌نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی محض

شهریور ۱۳۹۱

شماره: ۱۰۴۳۶/۱۴
تاریخ: ۹۱/۱۲/۲۷
پیوست:

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

صورتجلسهٔ دفاع پایان‌نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد آقای رضا غلام‌زاده رشتهٔ **ریاضی محض** تحت عنوان **تعمیم‌هایی از قضیه شارکوفسکی**،که در تاریخ: **۹۱/۷/۱۶** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی برگزار گردید و نتیجه به شرح زیر می باشد.

☑ قبول (بادرجه ...عالی......... امتیاز ....۱۹............) ☐ دفاع مجدد ☐مردود

۱ ـعالی (۲۰ – ۱۹)

۲ ـ بسیار خوب (۱۸/۹۹ – ۱۸)

۳ ـ خوب (۱۷/۹۹ – ۱۶)

۴ ـ قابل قبول (۱۵/۹۹ – ۱۴)

۵- غیرقابل قبول (کمتر از ۱۴)

اعضاء	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
استاد راهنما	دکتر منیره اکبری	استادیار	
استاد مشاور	دکتر فرحبخش کمالی خمسه	استادیار	
استاد داور داخلی	دکتر فرزانه نوروزی‌لرکی	استادیار	
استاد داور خارجی	دکتر محمد جلودار ممقانی	استاد	
نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر مجتبی قربانی	استادیار	

دکتر ایوب اسماعیل پور
رئیس دانشکده علوم پایه
از طرف مهدی ...

تهران، لویزان، کد پستی:۱۶۷۸۸-۱۵۸۱۱
صندوق پستی: ۱۶۳-۱۶۷۸۵
تلفن: ۹-۲۲۹۷۰۰۶۰ فکس: ۲۲۹۷۰۰۳۳
Email:sru@sru.ac.ir
www.srttu.edu

چکیده

یکی از جالب‌ترین نتایج در سیستم‌های دینامیکی یک‌بعدی قضیه‌ی شارکوفسکی است که به دلیل مفروضات ساده و نتایج قوی، از اهمیت خاصی در سیستم‌های دینامیکی برخوردار است. این قضیه بیان می‌کند که اگر $f : I \to I$ یک نگاشت پیوسته باشد، که دارای یک نقطه‌ی تناوبی از دوره‌ی تناوب k است، آنگاه f دارای یک نقطه‌ی تناوبی با دوره‌ی تناوب n نیز می‌باشد که $k \rhd n$ در ترتیب شارکوفسکی است.

در اینجا صورت دقیق قضیه‌ی شارکوفسکی بیان و اثبات می‌شود و سپس تعمیمی از این قضیه روی M-نگاشت‌ها بررسی می‌شود و نشان داده می‌شود که حکم این قضیه روی M-نگاشت‌ها برقرار است با این تفاوت که حداکثر ممکن است دو استثناء در طول مدار داشته باشد. برای تشریح بیشتر این موضوع، مثلاً ۳-مدار از یک M-نگاشت وجود تمام k-مدارها برای هر $k \in \mathbb{N}$ را ثابت می‌کند. استثنای ممکن برای $k \in \{۴, ۶\}$ می‌باشد. یعنی ممکن است ۴-مدار و ۶-مدار را نداشته باشد.

کلید واژه‌ها: قضیه‌ی شارکوفسکی، ترتیب شارکوفسکی، نسخه‌ی چندمقداری، فضای مرتب شده‌ی خطی، مدار تناوبی، M-نگاشت

فهرست مطالب

فصل ۱

قضیه‌ی شارکوفسکی

۱.۱ مقدمه

هدف اصلی در اینجا پیدا کردن محدودیت‌های قضیه‌ی شارکوفسکی برای نگاشت‌های چندمقداری روی یک فضای خطی، پیوسته می‌باشد.
صورت استاندارد قضیه‌ی شارکوفسکی [۴] با در نظر گرفتن ترتیب زیر از اعداد صحیح مثبت بنا شده است.

$$\begin{aligned} &3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd \cdots \rhd 2\cdot 3 \rhd 2\cdot 5 \rhd \cdots \rhd 2^2\cdot 3 \rhd 2^2\cdot 5 \rhd \cdots \rhd \\ &2^n\cdot 3 \rhd 2^n\cdot 5 \rhd \cdots \rhd 2^{n+1}\cdot 5 \rhd \cdots \rhd 2^n \rhd 2^{n-1} \rhd \cdots \rhd 2^2 \rhd 2 \rhd 1 \end{aligned} \tag{1.1}$$

که هرگاه $m \rhd n$ گوئیم m کمتر از n در ترتیب شارکوفسکی است.
قضیه‌ی شارکوفسکی چنین بیان می‌شود:
اگر یک تابع پیوسته‌ی $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک نقطه‌ی تناوبی از دوره‌ی تناوب n که $n \rhd k$ را داشته باشد، آنگاه حتماً نقطه‌ای از دوره‌ی تناوب k نیز دارد. بنابراین برای $n = 3$ برای هر $k \in \mathbb{N}$ یک نقطه‌ی تناوبی از دوره‌ی تناوب k وجود دارد [۵] که اثبات این قضیه، در اینجا به طور کامل شرح داده خواهد شد. اغلب فضای $\mathbb{R}$ یا یک بازه در این قضیه را می‌توان با یک فضای مناسب دیگر جایگزین نمود که لازم است ترتیبی جدید روی اعضای مجموعه بنا نمود. نشان داده می‌شود [۸] که با همان ترتیب شارکوفسکی از اعداد صحیح مثبت می‌توان $\mathbb{R}$ را با یک فضای توپولوژیک خطی مرتب شده‌ی همبند جایگزین کرد. قضیه‌ی شارکوفسکی کاملاً یک‌بعدی است و در ابعاد بالاتر نیاز به مفروضات به مراتب قوی‌تری می‌باشد که روی نگاشت‌ها گذاشته شود [۶].
ما در اینجا یک نسخه‌ی چندمقداری از نگاشت‌ها را بنا کرده‌ایم که قضیه‌ی شارکوفسکی در این نگاشت‌ها برقرار است [۱] و تنها حداکثر دو استثناء ممکن است وجود داشته باشد. هدف دیگر ما در این پایان‌نامه، بررسی، برقراری و یا عدم برقراری عکس قضیه‌ی شارکوفسکی روی توابع چندمقداری می‌باشد [۹][۸][۷].

Sharkovskii

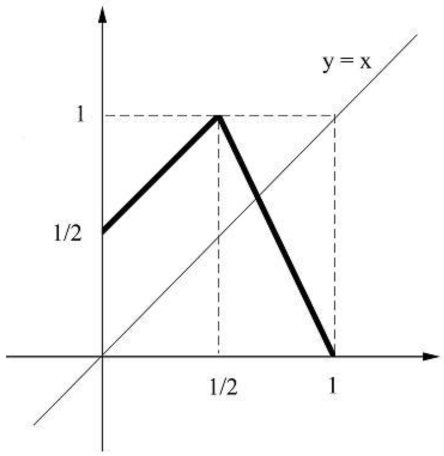
۲.۱ برخی از قضایای مهم و کاربردی

در این قسمت به بیان و اثبات برخی از قضایای مهم و کاربردی در اثبات قضیه‌ی شارکوفسکی می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱ *فرض کنید $f : A \longrightarrow A$ یک تابع و $x_{\circ} \in A$، اگر $f^n(x_{\circ}) = x_{\circ}$ به طوری که $f^k(x_{\circ}) \neq x_{\circ}$ به ازای $k = ۱, ۲, \cdots, n-۱$؛ آنگاه $x_{\circ}$ یک نقطه‌ی تناوبی از دوره‌ی تناوب n نامیده می‌شود. یک نقطه‌ی تناوبی از دوره‌ی تناوب یک، نقطه‌ی ثابت نامیده می‌شود.*

اگر $x_{\circ}$ یک نقطه‌ی تناوبی از دوره‌ی تناوب n برای f باشد آنگاه $x_{\circ}, f(x_{\circ}), \cdots, f^{n-۱}(x_{\circ})$، متمایز هستند و مجموعه‌ی $\{x_{\circ}, f(x_{\circ}), \cdots, f^{n-۱}(x_{\circ})\}$ یک مدار تناوبی از دوره‌ی تناوب n برای f می‌باشد.
اگر f یک نقطه از دوره‌ی تناوب n داشته باشد، گوییم f دارای دوره‌ی تناوب n است. وجود یک نقطه‌ی ثابت برای یک تابع به راحتی با رسم نمودار آن قابل رویت است اما وجود نقاط تناوبی با دوره‌ی تناوب n، حتی برای nهای کوچک، به راحتی قابل مشاهده و تشخیص از روی نمودار آن نمی‌باشد. به مثال زیر توجه کنید.
نمودار تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$\psi(x) = \begin{cases} x + \frac{۱}{۲} & , \quad \circ \leq x \leq \frac{۱}{۲} \\ ۲ - ۲x & , \quad \frac{۱}{۲} < x \leq ۱ \end{cases} \tag{۲.۱}$$



شکل ۱.۱

همانطور که ملاحظه می‌کنید $\psi(\circ) = \frac{۱}{۲}$ و $\psi(\frac{۱}{۲}) = \psi^۲(\circ) = ۱$ و $\psi^۳(\circ) = \psi^۲(\frac{۱}{۲}) = \psi(۱) = \circ$ بنابراین صفر یک نقطه تناوبی از دوره‌ی تناوب ۳ برای ψ است. آیا یک نقطه‌ی

تناوبی از دوره‌ی تناوب ۵ یا ۷ برای ψ وجود دارد؟ همانطور که دیدید تشخیص نقاط تناوبی یک تابع از روی نمودار آن کار به مراتب دشواری است و نیاز به محاسبات عددی بیشتری دارد.

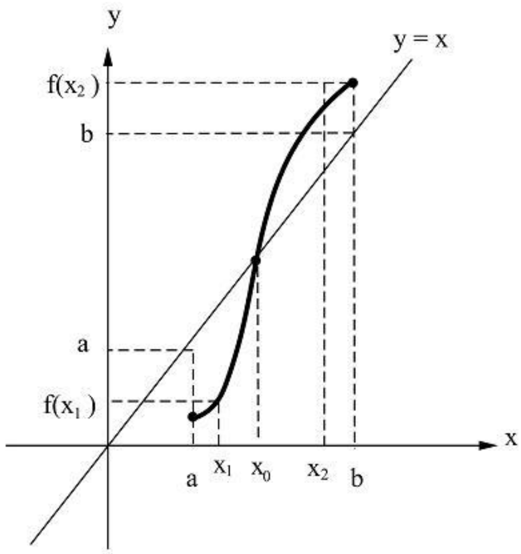
قضیه ۱.۱ (*قضیه مقدار میانی*) [۲]

فرض کنید تابع حقیقی f روی $[a,b]$ پیوسته باشد و c نقطه‌ای بین $f(a)$ و $f(b)$ در این صورت حداقل یک $x_\cdot \in [a,b]$ وجود دارد که $f(x_\cdot) = c$.

گزاره ۱.۱ *فرض کنید f روی $[a,b]$ پیوسته باشد. اگر برد f شامل $[a,b]$ باشد آنگاه f، لااقل یک نقطه‌ی ثابت در $[a,b]$ دارد. یعنی*

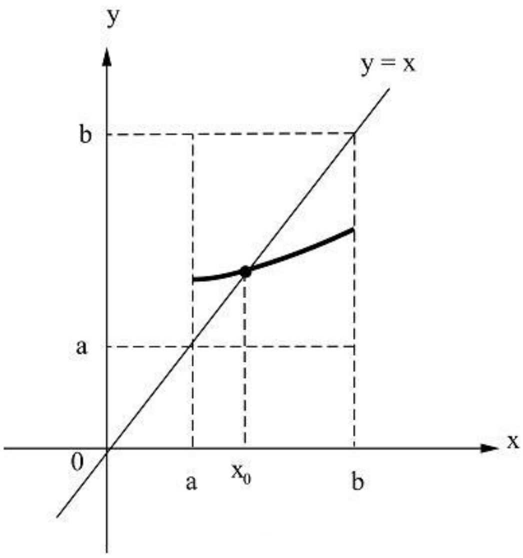
$$\exists x_\cdot \in [a,b] \;\; s.t \;\; f(x_\cdot) = x_\cdot$$

اثبات: چون برد f شامل $[a,b]$ است پس $x_۱, x_۲ \in [a,b]$ وجود دارند که $f(x_۱) \leq a \leq x_۱$ و $f(x_۲) \geq b \geq x_۲$.



شکل ۲.۱

قرار دهید $g(x) = f(x) - x$. نتیجه با به کار بردن قضیه مقدار میانی با $c = ۰$ حاصل می‌شود. □
می‌توان فرض گزاره‌ی بالا را با اینکه اگر برد f مشمول $[a,b]$ باشد نیز جایگزین کرد در حالی که حکم قضیه بدون تغییر می‌ماند و f دارای یک نقطه ثابت در $[a,b]$ می‌باشد.



شکل ۳.۱

قضیه ۲.۱ (*توسیع قضیه‌ی مقدار میانی*) *فرض کنید تابع حقیقی f روی $[a,b]$ پیوسته باشد. همچنین $I_0, I_1, \dots, I_{n-1}$ زیربازه‌های بسته‌ای از $[a,b]$ باشند اگر $I_{k+1} \subseteq f(I_k)$ ، $k = 0, 1, 2, \dots, n-2$ و $I_0 \subseteq f(I_{n-1})$ باشد، آنگاه رابطه‌ی $f^n(x) = x$ حداقل یک جواب $x = x_0 \in I_0$ دارد که $f^k(x_0) \in I_k$ ، $k = 0, 1, \dots, n-1$. توجه کنید در اینجا $I_{k+1} \subseteq f(I_k)$، یعنی تصویر f روی I شامل I_{k+1} است.*

$I_j \subseteq f(I_i)$ را به صورت $I_i \longrightarrow I_j$ یا $I_j \longleftarrow I_i$ نمایش می‌دهیم و می‌گوئیم $f(I_i)$، I_j را می‌پوشاند. بنابراین در قضیه‌ی فوق داریم:

$$I_0 \to I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_0$$

از لحاظ هندسی به این معنی است که نقطه‌ی x_0 به تمامی بازه‌های $I_0, I_1, \dots, I_{n-1}$ نگاشته می‌شود و سرانجام به جایگاه اولیه‌ی خود بازمی‌گردد.

اثبات: فرض کنید $I_1 \longrightarrow I_2$ در این صورت زیربازه‌ای $I_1^* \subseteq I_1$ وجود دارد که $f(I_1^*) = I_2$ زیرا اگر $I_2 = [c,d]$، x_1 و x_2 در I_1 وجود دارند که $f(x_1) = c$ و $f(x_2) = d$. با فرض $x_1 < x_2$ تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x_1^* &= \sup\{x \in [x_1, x_2] : f(x) = c\} \\ x_2^* &= \inf\{x \in [x_1^*, x_2] : f(x) = d\} \end{aligned}$$

و در اینصورت قرار می‌دهیم $I_1^* = [x_1^*, x_2^*]$. بنابراین $I_1^* \subseteq I_1$ و با توجه به قضیه مقدار میانی $f(I_1^*) = I_2$. نتیجه می‌شود که $I_{n-1}^* \subseteq I_{n-1}$ چنان وجود دارد که $f(I_{n-1}^*) = I_0$ و وجود

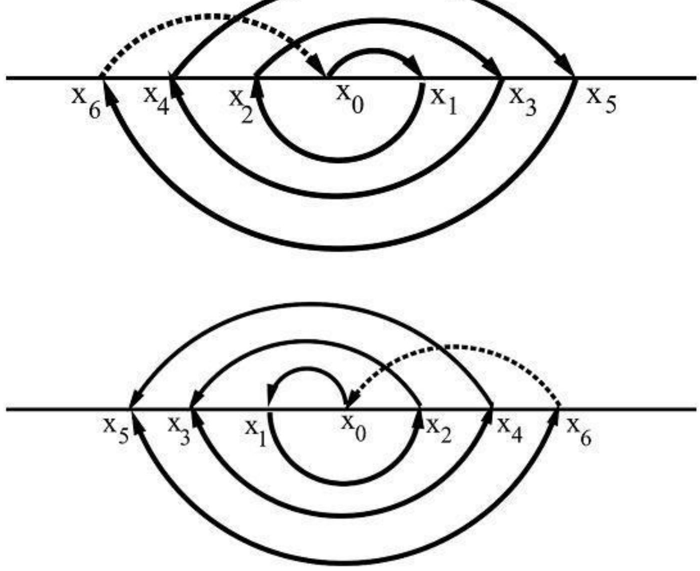
دارد $I^*_{n-2} \subseteq I_{n-2}$ که $f(I^*_{n-2}) = I_{n-1}$ و به همین ترتیب، وجود دارد $I^*_0 \subseteq I_0$ به طوری که $f(I^*_0) = I_1$. بنابراین $I^*_k \subseteq I_k$ چنان وجود دارد که $f(I^*_k) = I_{k+1} \supset I^*_{k+1}$ به ازای هر $k = 0, 1, \cdots, n-2$ و $I^*_0 \supseteq I_0$.$f(I^*_{n-1}) = I_0 \supseteq I^*_0$. حال با توجه به آنچه که در بالا بیان شد، $f^k(I^*_0) = I^*_k$ برای هر $k = 0, 1, \cdots, n-2$ و $f^n(I^*_0) \supset I^*_0$. بنابراین با توجه به گزاره‌ی فوق، $x_0 \in I^*_0 \subset I_0$ وجود دارد که $f^k(x_0) \in I_k$ و $f^n(x_0) = x_0$. □

گزاره ۲.۱ *(گزاره‌ی ۲.۳، [۲]) فرض کنید $f : I \to I$ پیوسته باشد و دارای یک مدار تناوبی از دوره‌ی تناوب $2n+1$ باشد ولی دارای مدار تناوبی از دوره‌ی تناوب $2m+1$ به ازاء $1 \leq m < n$ نباشد. فرض کنید x_0 وسط x_iها باشد. در این صورت یکی از ۲ حالت زیر اتفاق می‌افتد:*

i) $x_{2n} < x_{2n-2} < \cdots < x_2 < x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n-3} < x_{2n-1}$

ii) $x_{2n-1} < x_{2n-3} < \cdots < x_1 < x_0 < x_2 < \cdots < x_{2n-2} < x_{2n}$

مثلاً برای $n = 3$، شکل زیر را داریم:



شکل ۴.۱

۳.۱ قضیه لی-یورک

در اینجا قضیه‌ی لی-یورک را بیان و اثبات می‌کنیم. این قضیه یک حالت خاص از قضیه‌ی شارکوفسکی است که نشان می‌دهد اگر تابع پیوسته‌ی $f : I \longrightarrow I$ یک نقطه‌ی تناوبی از دوره‌ی

Li-Yorke

تناوب ۳ داشته باشد آنگاه، همه‌ی نقاط تناوبی از دوره‌ی تناوب k، که $k \in \mathbb{N}$ می‌باشد را دارا است.

قضیه ۳.۱ (*قضیه لی- یورک*)

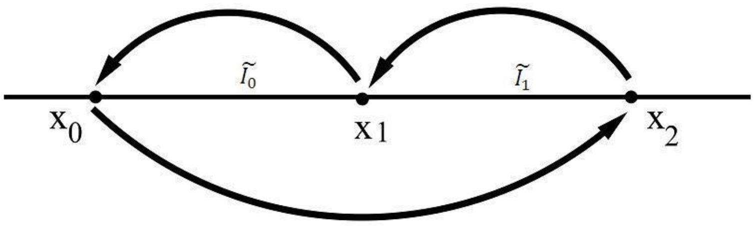
فرض کنید $f : [a,b] \to [a,b]$ تابعی پیوسته باشد. اگر f یک نقطه‌ی تناوبی از دوره‌ی تناوب ۳ داشته باشد، در این صورت به ازای هر عدد صحیح مثبت n، f دارای نقطه‌ای تناوبی از دوره‌ی تناوب n است.

اثبات: فرض کنید $x_0 < x_1 < x_2$ یک مدار تناوبی از دوره‌ی تناوب ۳ باشد. بدون خلل به کلیت مسأله فرض کنید $f(x_1) = x_0$ و $f(x_0) = x_2$ و $f(x_2) = x_1$. فرض کنید $\tilde{I}_0 = [x_0, x_1]$ و $\tilde{I}_1 = [x_1, x_2]$ داریم

$$f(\tilde{I}_1) \supseteq \tilde{I}_0 \quad , \quad f(\tilde{I}_0) \supset \tilde{I}_0 \cup \tilde{I}_1$$

یعنی

$$\circlearrowleft \tilde{I}_0 \rightleftharpoons \tilde{I}_1$$



شکل ۵.۱

فرض کنید $I_0 = I_1 = \cdots = I_{n-2} = \tilde{I}_0$ و $I_{n-1} = \tilde{I}_1$. با توجه به قضیه‌ی **۲.۱**، $x_0^* \in \tilde{I}_0$ وجود دارد که $f^n(x_0^*) = x_0^*$ و $f^k(x_0^*) \in \tilde{I}_0$، $k = 0, 1, \cdots, n-2$ و $f^{n-1}(x_0^*) \in \tilde{I}_1$.
فرض کنید $x_0^*, f(x_0^*), \cdots, f^{n-1}(x_0^*)$ تناوبی از دوره‌ی تناوب n نباشد. بنابراین $f^{n-1}(x_0^*)$ باید یکی از $f^k(x_0^*)$ به ازای $k = 0, 1, \cdots, n-2$ باشد. پس $f^{n-1}(x_0^*) \in \tilde{I}_0 \cap \tilde{I}_1 = x_1$. حال از طرفین f می‌گیریم

$$x_0^* = f(f^{n-1}(x_0^*)) = f^n(x_0^*) = f(x_1) = x_0 \qquad (۳.۱)$$

پس $x_0^* = x_0$. بنابراین $f(x_0^*) = f(x_0) = x_2 \notin \tilde{I}_0$.

و این تناقض دارد با $f(x_0^*) \in \tilde{I}_0$. $\square$

۴.۱ قضیه شارکوفسکی

حال به بیان و اثبات دقیق قضیه‌ی شارکوفسکی می‌پردازیم.

قضیه ۴.۱ *فرض کنید $f : I \to I$ پیوسته باشد و f دارای نقطه‌ای تناوبی از دوره‌ی تناوب l باشد. اگر $l \rhd m$، آنگاه f نقطه‌ای از دوره‌ی تناوب m نیز دارد.*

قبل از پرداختن به اثبات این قضیه لازم است به چند نکته توجه شود:

۱) اگر f دارای نقطه‌ی تناوبی باشد که توانی از ۲ نیست آنگاه f دارای بیشمار نقطه‌ی تناوبی خواهد بود. برعکس اگر f تنها تعداد محدودی نقطه‌ی تناوبی داشته باشد آنگاه هریک از نقاط تناوبی، دوره‌ی تناوبی از توان ۲ دارند. توجه شود که یک نیز همان 2^0 است.

۲) دوره‌ی تناوب ۳ کوچکترین دوره در ترتیب شارکوفسکی است. بنابراین وجود تمام نقاط تناوبی از هر دوره‌ای را نتیجه می‌دهد که در قضیه‌ی قبل نشان داده شد.

۳) عکس قضیه‌ی شارکوفسکی نیز برقرار است. یعنی تابعی وجود دارد که دارای نقطه‌ای از دوره‌ی تناوب p باشد ولی دارای نقاط تناوبی از دوره‌های تناوبی کمتر از p در ترتیب شارکوفسکی نباشد.

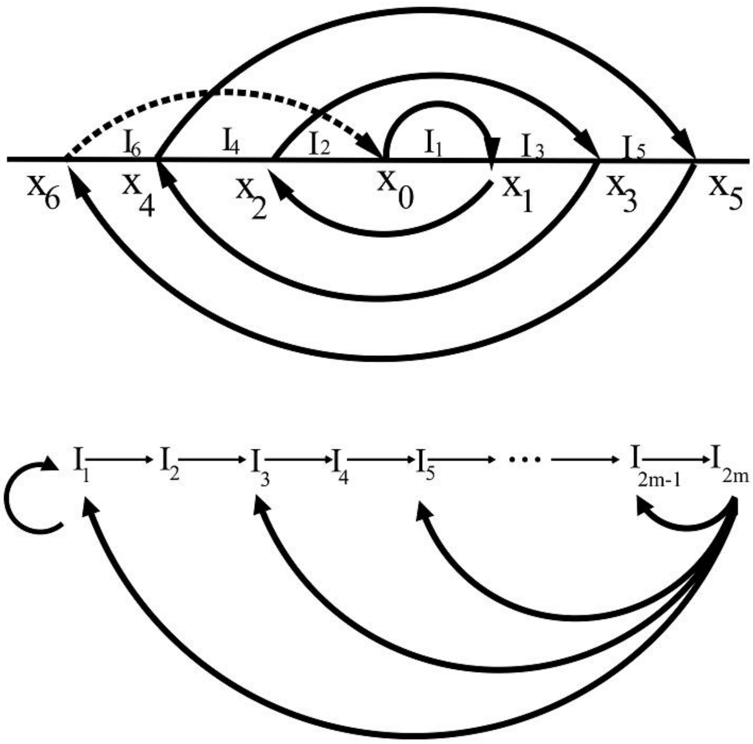
اثبات قضیه شارکوفسکی:

مرحله‌ی اول: فرض کنید f دارای نقطه‌ای از دوره‌ی تناوب 2^m است. نشان می‌دهیم برای هر $l < m$ دارای دوره‌ی تناوب 2^l نیز می‌باشد. برای اثبات مرحله‌ی اول کافیست نشان دهیم دوره‌ی تناوب 2^m، دوره‌ی تناوب 2^{m-1} را نتیجه می‌دهد. اگر $m = 1$ باشد، آنگاه f دارای نقطه‌ای از دوره‌ی تناوب ۲ است. فرض کنید x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ یک مدار تناوبی از دوره‌ی تناوب ۲ برای f باشد. داریم $f(x_2) = x_1$ و $f(x_1) = x_2$ و یا $f([x_1, x_2]) \supseteq [x_1, x_2]$ با توجه به قضیه‌ی ۲.۱ برخی از قضایای مهم و کاربردیtheorem.۱.۲، f دارای یک نقطه ثابت در بازه‌ی $[x_1, x_2]$ می‌باشد که همان نقطه از دوره‌ی تناوب $1 = 2^0$ می‌باشد. حال فرض می‌کنیم برای $m = k$ قضیه برقرار باشد. نشان می‌دهیم برای $m = k + 1$ نیز برقرار است. فرض کنید $g = f^2$ باشد و آنگاه اگر f دوره‌ی تناوب 2^{k+1} داشته باشد، g دوره‌ی تناوب 2^k دارد که با توجه به فرض استقراء، دوره‌ی تناوب 2^{k-1} دارد. بنابراین $x_0 \in I$ وجود دارد که $g^{2^{k-1}}(x_0) = x_0$ و $g^t(x_0) \neq x_0$، $t = 1, 2, 2^2, \cdots, 2^{k-2}$، و این هم‌ارز با این است که $f^{2^k}(x_0) = x_0$ و $f^{2t}(x_0) \neq x_0$، $t = 1, 2, \cdots, 2^{k-2}$.

فرض کنید x_0 نقطه‌ی تناوبی از دوره‌ی تناوب 2^k برای f نباشد. بنابراین بایستی $s \in \{1, 3, 5, \cdots, 2^k - 1\}$ وجود داشته باشد به طوری که $f^s(x_0) = x_0$. این غیرممکن است

زیرا در این صورت $f^{2s_0}(x_0) = x_0$، به غیر از $s_0 \in \{1, 2, 3, \dots, 2^{k-1} - 1\}$. بنابراین اثبات کامل می‌شود.

مرحله‌ی دوم: در این مرحله نشان می‌دهیم اگر f دوره تناوب $2m + 1$ $(m > 1)$ داشته باشد و هیچ نقطه‌ی تناوبی از دوره‌ی تناوب $2n + 1$ برای $1 \leq n < m$ نداشته باشد. آنگاه f دوره‌ی تناوب k برای هر $k > 2m + 1$ را نیز دارد. با توجه به گزاره‌ی ۲.۱، فرض کنید $I_1 = [x_0, x_1]$ و $I_2 = [x_2, x_0]$ و ... و $I_{2n-1} = [x_{2n-3}, x_{2n-1}]$ و $I_{2n} = [x_{2n}, x_{2n-2}]$، با توجه به نمودار زیر



شکل ۶.۱

برای $k > 2m + 1$ داریم:

$$\underbrace{I_1 \to I_1 \to \cdots \to I_1}_{k-(2m-1) \text{ بار}} \to I_2 \to \cdots \to I_{2m} \to I_1 \tag{4.1}$$

با توجه به قضیه‌ی توسیع مقدار میانی نتیجه می‌شود که f یک نقطه‌ی تناوبی از دوره‌ی تناوب k نیز دارد.

مرحله‌ی سوم: در این مرحله نشان می‌دهیم اگر f دوره‌ی تناوب $2m + 1$ $(m > 1)$ داشته باشد، آنگاه به ازاء هر عدد صحیح مثبت k، دوره‌ی تناوب $2k$ نیز دارد. برای این منظور کافیست تنها نتیجه را برای $2m \leq 2k$ برقرار کنیم. با توجه به شکل ۶.۱ داریم:

$$I_{2(m-k)+1} \to I_{2(m-k)+2} \to \cdots \to I_{2m} \to I_{2(m-k)+1}$$

با توجه به استدلال‌های مرحله‌ی دوم، f دارای نقطه‌ی تناوبی از دوره‌ی تناوب $۲k$ است.

مرحله‌ی چهارم: فرض کنید $m \rhd n$ که $m = ۲^k \cdot p$ و $n = ۲^t \cdot q$ و p و q اعداد فرد هستند و $p > ۱$ و $k \geq ۱$. نشان می‌دهیم دوره‌ی تناوب m، دوره‌ی تناوب n را نتیجه می‌دهد. بدون خلل به کلیت مسأله فرض کنید برای $l \rhd m$ نقطه‌ی تناوبی از دوره‌ی تناوب l وجود نداشته باشد. با توجه به ترتیب شارکوفسکی لازم است شرایط زیر را برقرار کنیم:

i) $k < t \ , \ q \geq ۱$

ii) $k = t \ , \ q > p$

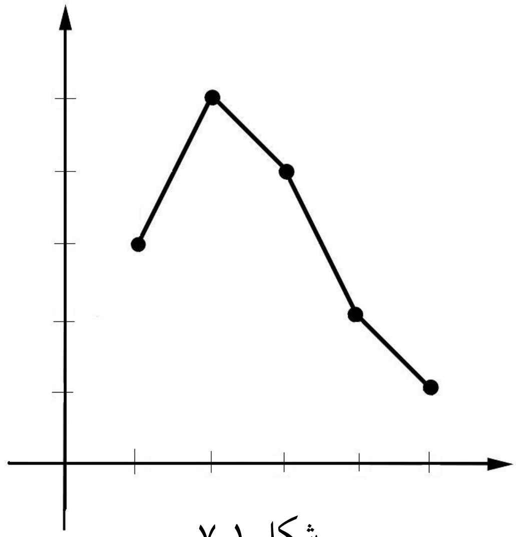
فرض کنید $g(x) = f^{۲^k}(x)$، بنابراین از اینکه f دوره‌ی تناوب $۲^k \cdot p$ دارد نتیجه می‌شود g دوره‌ی تناوب p دارد. با توجه به مرحله‌ی سوم، g دوره‌ی تناوب $۲^{t-k} \cdot q$ برای $t > k$ و $q \geq ۱$ را دارد. بنابراین f دوره‌ی تناوب $۲^t q$ دارد. پس (i) برقرار شد. حال با توجه به مرحله‌ی دوم، g دوره‌ی تناوب p دارد و این نشان می‌دهد دوره‌ی تناوب q را نیز دارد. بنابراین f دوره‌ی تناوب $۲^t \cdot q$ را دارد و (ii) نیز برقرار می‌شود. $\square$

۵.۱ عکس قضیه شارکوفسکی

باید توجه داشت که عکس قضیه شارکوفسکی نیز برقرار است یعنی یک نگاشت پیوسته‌ی $f : I \to I$ وجود دارد که یک نقطه‌ی تناوبی از دوره‌ی تناوب k دارد ولی هیچ نقطه‌ی تناوبی از دوره‌ی تناوب n که $n \rhd k$ در ترتیب شارکوفسکی است، ندارد. اثبات این قضیه به طور کامل در مقاله‌ای از استفان به چاپ رسیده است [۳]. ما در اینجا با ذکر یک مثال سعی در تشریح بیشتر این مطلب می‌کنیم.

مثال ۱.۱ *شکل زیر نمودار تابع f را روی $[۱, ۵]$ نشان می‌دهد و به این صورت تعریف می‌شود که $f(۱) = ۳$ ، $f(۲) = ۵$ ، $f(۳) = ۴$ ، $f(۴) = ۲$ و $f(۵) = ۱$. نشان داده می‌شود که این تابع نقطه‌ای از دوره‌ی تناوب ۵ دارد ولی هیچ نقطه‌ای از دوره‌ی تناوب ۳ ندارد.*

Peter Stefan



شکل ۷.۱

همانطور که ملاحظه می‌کنید:

۱) $\frac{۱۰}{۳}$ یک نقطه ثابت برای نگاشت بالا است.

۲) $\frac{۵}{۲}$ نقطه‌ای از دوره‌ی تناوب ۲ است.

۳) ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ نقاطی از دوره‌ی تناوب ۵ می‌باشند.

ثابت می‌کنیم هیچ نقطه‌ای از دوره‌ی تناوب ۳ وجود ندارد. از آنجایی که

$$f^{۳}[۱,۲]=[۲,۵] \quad , \quad f^{۳}[۲,۳]=[۳,۵] \quad , \quad f^{۳}[۴,۵]=[۱,۴]$$

در نتیجه تنها $f^{۳}[۳,۴]=[۱,۵]$. بنابراین تنها ممکن است روی این بازه نقطه‌ای از دوره‌ی تناوب ۳ وجود داشته باشد، از آنجایی که $f^{۳}$ بطور یکنواخت روی $[۳,۴]$ نزولی است بنابراین $x_. \in [۳,۴]$ منحصر به فردی وجود دارد که $f^{۳}(x_.)=x_.$. با توجه به اینکه $f(x)$ روی $[۳,۴]$ با ضابطه‌ی $f(x)=۱۰-۲x$ تعریف می‌شود. پس $f(x)$ دارای یک نقطه‌ی ثابت منحصر به فرد $x=\frac{۱۰}{۳}$ روی $[۳,۴]$ است و چون

$$f^{۳}(x_.)=f^{۲}(f(x_.))=f^{۲}(x_.)=f(f(x_.))=f(x_.)=x_.$$

بنابراین $x_.$ نقطه‌ای از دوره‌ی تناوب ۳ برای f نمی‌باشد. لذا f هیچ نقطه‌ای از دوره‌ی تناوب ۳ ندارد.

فصل ۲

قضیه‌ی شارکوفسکی روی توابع چندمقداری

۱.۲ مقدمه

در این فصل ابتدا تعریف توابع چندمقداری و برخی تعاریف دیگر را می‌آوریم و سپس برقراری حکم قضیه‌ی شارکوفسکی روی این توابع را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که حداکثر ممکن است ۲ استثناء در مورد دوره‌ی تناوب مدارها وجود داشته باشد. لازم به ذکر است از آنجایی که یافتن نقاط تناوبی (مدارهای تناوبی) برای یک نگاشت امری به مراتب دشوار است. لذا بررسی برخی نگاشت‌ها و گرفتن حکم کلی در رابطه با نقاط تناوبی (مدارهای تناوبی) آنها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است که در این‌جا این کار انجام شده است و حکمی قوی در مورد مدارهای تناوبی در M-نگاشت‌ها با مفروضات خاص به دست آمده است.

۲.۲ تعریف‌ها و مفاهیم اولیه

در این بخش، تعریف مدار تناوبی، نگاشت چندمقداری و فضای مرتب شده‌ی خطی همبند آورده و سپس چند لم بیان و اثبات شده است.

تعریف ۱.۲ *رابطه‌ی دوتایی $\leqslant$ روی مجموعه‌ی A با شرایط زیر را یک ترتیب تام می‌نامیم و به مجموعه A یک مجموعه مرتب شده‌ی خطی می‌گوئیم.*

۱. اگر $x \leqslant y$ و $y \leqslant z$ آنگاه $x \leqslant z$ (برای هر $x, y, z \in A$).

۲. برای هر $x \in A$ همواره $x \leqslant x$.

۳. برای هر $x, y \in A$، وجود داشته باشد $z \in A$ بطوریکه $x \leqslant z$ و $y \leqslant z$.

تعریف ۲.۲ یک *توپولوژی ترتیبی*، *توپولوژی است که روی هر مجموعه کاملاً مرتب شده به صورت زیر تعریف می‌شود.*

اگر X یک مجموعه کاملاً مرتب شده باشد، توپولوژی ترتیبی روی X توسط زیربازهای «شعاع‌های باز» زیر به ازاء هر $a, b \in X$ تولید می‌شود.

$$(a, \infty) = \{x | a < x\}$$
$$(-\infty, b) = \{x | x < b\}$$

یا به طور معادل بازه‌های $(a, b) = \{x | a < x < b\}$ به همراه شعاع‌های باز بالا یک پایه برای این توپولوژی می‌سازند.

تعریف ۳.۲ *یک مجموعه مرتب شده‌ی خطی $\mathbb{L}$ با بیش از یک نقطه را یک فضای توپولوژیک مرتب شده‌ی خطی همبند ($CLOS$) گوئیم هرگاه:*

i) *$\mathbb{L}$ دارای خاصیت کوچکترین کران بالا باشد.*

ii) *$\mathbb{L}$ به صورت چگال مرتب شده باشد. یعنی اگر $x < y$ آنگاه وجود داشته باشد zای که $x < z < y$.*

iii) *$\mathbb{L}$ با توپولوژی ترتیبی فوق، به یک فضای توپولوژیک (هاوسدورف) تبدیل شود.*

در واقع منظور از بازه‌های (a, b) و $[a, b]$ که $a, b \in \mathbb{L}$، به ترتیب مجموعه‌های $\{x |\ x \in \mathbb{L},\ a < x < b\}$ و $\{x |\ x \in \mathbb{L},\ a \leqslant x \leqslant b\}$ می‌باشد.

تعریف ۴.۲ *یک نگاشت چندمقداری $\varphi : X \multimap Y$ ($\varphi : X \to 2^Y \setminus \{\emptyset\}$) (که φ از X به تمامی زیرمجموعه‌های Y به جز $\{\Phi\}$ تعریف می‌شود) نیمه‌پیوسته از بالا است هرگاه به ازاء هر زیرمجموعه‌ی باز U که $U \subset Y$، $\varphi^{-1}(U) = \{x \in X \ : \ \varphi(x) \subset U\}$ در X باز باشد.*

تعریف ۵.۲ *یک نگاشت نیمه‌پیوسته از بالا $\varphi : \mathbb{L} \multimap \mathbb{L}$ که مجموعه مقادیر آن تک‌نقطه و یا بازه‌های بسته هستند، M-نگاشت نامیده می‌شود.*
توجه داشته باشید که برای نگاشت‌های چندمقداری ساختن مدارهای تناوبی مناسب‌تر از ساختن نقاط تناوبی می‌باشد. لذا در زیر تعریفی از مدار تناوبی برای M-نگاشت‌ها را می‌آوریم.

تعریف ۶.۲ *نقطه‌ی a یک نقطه‌ی تناوبی از دوره‌ی تناوب n برای M-نگاشت f می‌باشد هرگاه $a \in f^n(a)$ و برای $0 < j < n$، $a \notin f^j(a)$.*

تعریف ۷.۲ *یک k-مدار برای یک M-نگاشت φ، دنباله‌ی $\{x_i\}_{i=0}^{k-1}$ است به طوری که:*

i) *$x_{i+1} \in \varphi(x_i)$ برای هر $i = 0, 1, \cdots, k-2$ و $x_0 \in \varphi(x_{k-1})$.*

ii) *$\{x_i\}_{i=0}^{k-1}$ از یک مدار کوتاهتر به طول m که p بار تکرار شده باشد به طوری که $mp = k$، تشکیل نشده باشد.*