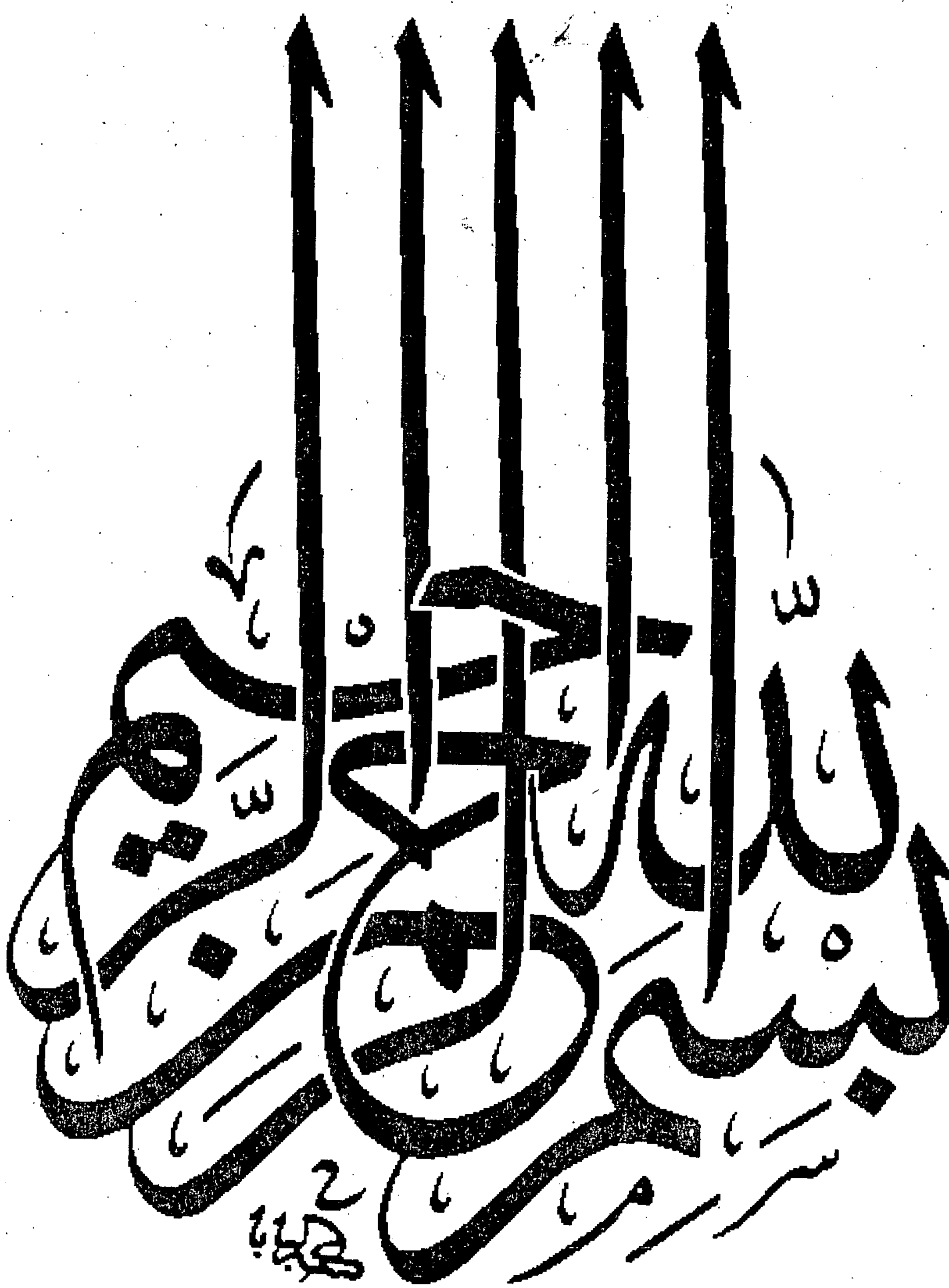

١٥٢٢٨٧-٢٠٣٠٤٧٩

دانشگاه تربیت معلم سبزوار

دانشکده علوم ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد گرایش محض

عنوان:

معرفی برخی موجک قابهای C^r و غیر MRA

استاد راهنما

دکتر علی اکبر عارفی جمال

استاد مشاور

دکتر محمد جانفدا

نگارش

میترا شمس‌آبادی

مهر ۱۳۸۹

معاونت آموزشی و تحصیلات تکمیلی
مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم ۱۱۴ – ت

بسمه تعالی

شماره :
تاریخ :

صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

با تلاوت آیاتی چند ازکلام ا... مجید جلسه دفاع از پایان نامه خانم میترا شمس آبادی دانشجوی رشته ریاضی محض با عنوان معرفی برخی موجک قاب های C^r و غیر MRA ساعت ۱۰-۱۲ روزدوشنبه مورخ۱۳۸۹/۷/۵در محل دانشکده علوم پایه اتاق ۲۵۰تشکیل گردید .

پس از استماع گزارش ارائه شده توسط دانشجو و استاد راهنما هیات داوران و حاضران سئوالاتی را مطرح و خانم میترا شمس آبادی به دفاع از موضوع پرداخت وبه سئوالات آنها پاسخ گفت .

سپس پایان نامه توسط هیات داوران مورد ارزشیابی قرار گرفت و نمره ۱۸/۵ برابر درجه بسیار خوب برای آن تعیین گردید .

به این ترتیب ضمن تصویب پایان نامه مزبور از این تاریخ میترا شمس آبادی به عنوان کارشناس ارشد در رشته ریاضی محض گرایش آنالیز شناخته می شود .

ردیف	نام و نام خانوادگی	سمت	امضا
۱	دکترعلی اکبر عارفی جمال	استاد راهنما	
۲	دکتر محمد جانفدا	استاد مشاور	
۳	دکتر رجبعلی کامیابی گل	استاد داور	
۴	دکتر احمد صفاپور	استاد داور	
۵	دکتر قدیر صادقی	نماینده تحصیلات تکمیلی	

نام و نام خانوادگی وامضای مدیر گروه

رونوشت

۵- معاونت آموزشی و تحصیلات تکمیلی دانشگاه جهت اطلاع
۶- معاونت پژوهشی دانشگاه جهت اطلاع
۷- آموزش دانشکده علوم ریاضی جهت درج در پرونده دانشجو
۸- دانشجو

فرم چکیده‌ی پایان‌نامه‌ی دوره‌ی تحصیلات تکمیلی
دفتر مدیریت تحصیلات تکمیلی

نام خانوادگی دانشجو: شمس آبادی	**نام:** میترا	**ش دانشجویی:** ۸۷۲۳۱۲۱۰۴۰
استاد راهنما: علی اکبر عارفی جمال	**استاد مشاور:** محمد جانفدا	
دانشکده: ریاضی و علوم کامپیوتر	**رشته:** ریاضی محض	**گرایش:** آنالیز
مقطع: کارشناسی ارشد	**تاریخ دفاع:** ۸۹/۷/۵	**تعداد صفحات:** ۸۳

عنوان پایان‌نامه: **معرفی برخی موجک قابهای C^r و غیر MRA**

کلیدواژه‌ها: موجک- موجک قاب

چکیده:

مشکل اساسی در مورد نظریه موجک، جستجو برای یافتن تابع هموار و خوش موضع است. در این پایان نامه قصد داریم موجکی با اتساع ۲ در $L^2(R)$ ارائه کنیم که هموار بوده و نزولی سریع داشته باشد. تابع چندگانگی این موجک متناظر با موجک جورنه بوده و در نتیجه حاصل از یک آنالیز چند ریزه ساز نیست. به علاوه برای هر r صحیح ، می‌توان چنین موجک Cr ای معرفی نمود که تبدیل فوریه آن نیز C^∞ می‌باشد.

امضای استاد راهنما

تقدیم به

دستان پر مهر پدرم   به قلب رئوف مادرم

مهربانی تنها خواهر و همدمم، ملیحه عزیزم

آسمان زندگیم، همسر شکیبا و مهربانم

وتقدیم به
بهار زندگیم، نیما

قدردانی

راز های نهفته در جهان انسان را به سمت تحقیق و پژوهش در این جهان بی نهایت می کشاند و انسان نیز با دید گاهی سؤال برانگیزانه در هر نکته‌ای، برای شناخت آن تلاش می کند. خدا را سپاس به خاطر این نعمت بزرگ که با توکل به خدا، زیر سایهٔ اولین آموزگاران زندگی ام، پدر و مادرم و تحت راهنمایی اساتیدی گران قدر بدان دست یافتم. در این جا وظیفه خود می دانم از پدر و مادرم بخاطر تمام داشته هایم تشکر کنم وبر دستان آنها بوسه زنم. از همسر عزیزم که صبورانه در کنارم راهنما و آرامش خاطرم بود صمیمانه تشکر می‌کنم. همچنین از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر علی اکبر عارفی جمال که اینجانب را در تهیه و تنظیم این اثر یاری نمودند و با صبر فراوان گره از مشکلاتم گشودند، تشکر و قدردانی نمایم، امید است خداوند در سایه الطاف بی کران خویش ایشان و خانواده محترم شان را مؤید و محفوظ بدارد. همچنین از جناب آقای دکتر محمد جانفدا که زحمت مشاوره این پایان نامه را تقبل کردند نهایت سپاس گذاری را دارم. از داوران این پایان نامه، اساتید محترم جناب آقای دکتر کامیابی گل و دکتر صفاپور نهایت تشکر وقدردانی را دارم. لازم می دانم این کار کوچک علمی را به پیشگاه والای پدر و مادرم تقدیم کنم چرا که قسمت بزرگی از این توفیق را مرهون فداکاری ها و تشویق های ایشان هستم. در پایان این پایان نامه را به پسرم نیما تقدیم می‌کنم.

پیشگفتار

یکی از اهداف نظریه موجک ها جستجو برای یافتن توابعی هموار و خوش موضع است که اتساع ها و انتقال های آنها برای به‌دست آوردن فضای توابعی خاص به کار رود. در سال ۱۹۰۹ هار [۱] اولین کسی بود که به موجک‌ها اشاره کرد و اکنون آنالیز موجک ها به یکی از دستاورد های جدید ریاضیات بدل گشته که کاربردهای وسیعی در علوم و مهندسی نیز دارد.
موجک هار به صورت یک تابع مشخصه از مجموعه‌های کراندار به صورت زیر معرفی شد

$$\psi = \chi_{[0,\frac{1}{2})} - \chi_{[\frac{1}{2},1)}.$$

موجک هارخوش موضع بوده ولی هموار نیست.
مثال مشهور دیگر موجک شانون [۲] است که تبدیل فوریه این موجک به صورت تابع مشخصه‌ی یک مجموعه کراندار است،

$$\hat{\psi} = \chi_{[-1,\frac{-1}{2})\cup[\frac{1}{2},1)}.$$

موجک شانون هموار هست ولی خوش موضع نیست. به طور کلی موجکی از رده C^∞ که تکیه گاهش فشرده نیز باشد موجود نیست [۱۵].
اما در سال ۱۹۸۸ دوبیشی روشی برای ساختن موجکهای با اتساع ۲ در $L^2(\mathbb{R})$ ارائه داد که هم هموار و هم محدود بودند[۱۳]. وی برای هر عدد صحیح r، موجکی C^r معرفی نمود که تکیه گاهش نیز فشرده بود. ساختار دوبیشی به روش آنالیز چند ریزه ساز یا به اختصار MRA معروف است. موجکهایی که از این روش به‌دست می آیند را موجک MRA می‌گویند. اکثر موجکهای مشهور از جمله دو موجک هار و شانون ، MRA هستند. جورنه [۳] در سال

---

[۱] Haar
[۲] Shanon wavelet
[۳] [illegible]rne

۱۹۸۴ موجکی شبیه موجک شانون ارائه داد که تبدیل فوریه این موجک به صورت تابع مشخصه یک مجموعه بود اما از یک MRA به‌دست نمی‌آمد [۱۸]. البته این مطلب را اولین بار آسچر [۴] در سال ۱۹۹۵ نشان داد. بعدها موجک های غیر MRA دیگری نیز معرفی گردید. چنین موجک هایی هموارند اما محدود نیستند. هدف این پایان نامه معرفی موجکهای غیر MRA و هموازی است که به جای خوش موضع بودن، کاهش سریعی داشته باشند.

این پایان نامه مشتمل بر ۳ فصل است، که به طور مختصر در زیر به معرفی آنها می‌پردازیم.

فصل اول را با معرفی فضاهای هیلبرت و خواص آن آغاز می‌کنیم. در بخش دوم به بیان آنالیز فوریه و قضایای اساسی در آن می‌پردازیم، و با بیان قضیه‌ای رابطه بین مشتق یک تابع و تبدیل فوریه آن تابع را بیان می‌کنیم.

فصل دوم به ساختار یک آنالیز چندریزه‌ساز اختصاص دارد. در بخش اول یک آنالیز چند ریزه‌سازبرای $L^2(\mathbb{R})$ معرفی کرده و خواص ابتدایی آن را بیان می‌کنیم.
در ادامه دنباله ای به نام صافی پایین گذر متناظر با تابع مقیاس φ معرفی می کنیم و با استفاده از این تابع مقیاس، فضاهای V_{-1} و V_0 را می‌سازیم. دوباره با محاسباتی ساده فضاهای متعامد W_{-1} و... و W_j را می‌سازیم.
در ادامه به نحوه ساخت یک موجک از آنالیز چند ریزه‌ساز می‌پردازیم. در انتهای این بخش موجک MSF را تعریف کرده و شرایطی که یک موجک MSF یک موجک MRA باشد را بیان می‌کنیم.
در بخش دوم از این فصل یک نگاشت بین موجکهای MSF را بیان نموده و تابعی به نام تابع بعد را معرفی می‌کنیم. نشان می‌دهیم که تابع بعد در معادله سازگاری صدق می‌کند. همچنین

[۴] Auscher

ثابت می‌کنیم یک موجک MRA است اگر و تنها اگر تابع بعد آن یک باشد.

در فصل سوم ابتدا یک آنالیز چند ریزه‌ساز تعمیم یافته را بیان می‌کنیم. در ادامه با استفاده از قضیه استون تابعی به نام تابع چند گانگی را تعریف کرده و تابع m را می‌سازیم، سپس صافی پایین گذر تعمیم یافته و صافی بالا گذر تعمیم یافته را بیان می‌کنیم. در انتهای این بخش به نحوه ساخت یک موجک از آنالیز چند ریزه‌ساز تعمیم یافته می‌پردازیم.
در بخش دوم از این فصل به نحوه ساخت یک موجک قاب C^r وغیر MRA می‌پردازیم که هدف اصلی این پایان‌نامه است.
این موجک قاب را متناظر با تابع چندگانگی موجک جورنه می‌سازیم.
این پایان نامه برگرفته از مقالات زیر است:

1) L. W. Bagget, P. Jordensen, K. Merill, and J. Packer, *A non-MRA wavelet with rapid decay,* Acta. Appl. Math. 86, 251-270 (2005).

2) L. W. Bagget, P. E. T. Jordensen, K. D. Merrill, and J. A. Packer, *Construction of Parseval wavelets from redundant filter systems,* J. Math. Phys. **46**, 28, 1-28 (2005).

3) L. W. Bagget, H. A. Medina, and K. D. Merrill, *Generalized multiresolution analyses and a construction procedure for all wavelet sets in* $\mathbb{R}^n$, J. Fourier Anal. Appl. **5**, 563- 573 (1999).

4) L. W. Bagget, K. D. Merril, *Abstract harmonic analysis and wavelets in* $\mathbb{R}^n$ *, in The Funional and Harmonic Analysis of Wavelets and Frames,* Contemp. Math. 247, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 17-27 (1999).

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیش نیاز ها

در این فصل به بیان مفاهیم اساسی مورد نیاز در این پایان نامه می پردازیم. در بخش اول فضای هیلبرت را توصیف کرده و برخی از خواص آن را بیان می‌کنیم. در بخش دوم به بیان تبدیل فوریه و قضایای مورد نیاز می‌پردازیم.
در این پایان نامه فرض می‌شود که خواننده با مفاهیم بنیادی آنالیز حقیقی و آنالیز هارمونیک نظیر نظریه اندازه ، انتگرال لبگ و ... آشنا باشد. برای بحث‌های تکمیلی خواننده را به منابع درسی آنالیز حقیقی ،آنالیز تابعی و آنالیز هارمونیک نظیر [۱۴] و[۱۹] و... ارجاع می‌دهیم.

۱.۱ فضاهای هیلبرت

در این بخش به معرفی فضاهای هیلبرت پرداخته و ویژگی عملگرها روی چنین فضاهایی را بررسی می کنیم. همچنین دو توپولوژی عملگری ضعیف و قوی را روی $B(\mathcal{H})$ یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید X و Y دو فضای نرمدار باشند. نگاشت $T : X \to Y$ را یک **عملگر خطی** [۱] نامیم هرگاه برای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}$، $T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y)$.
همچنین نرم T را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\| T \| = sup\{\| T(x) \| : \| x \| = ۱\} = sup\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : ۰ \neq x \in X\}.$$

هرگاه $\| T \| < \infty$ ، آنگاه عملگر خطی T را **کراندار** [۲] می نامیم و مجموعه همه عملگرهای خطی کراندار $T : X \to Y$ را با $B(X, Y)$ نمایش می دهیم، هرگاه $Y = X$، آنگاه مجموعه همه عملگر خطی کراندار را با $B(X, X)$ یا $B(X)$ نشان می دهیم،

تعریف ۲.۱.۱ فضای برداری مختلط $\mathcal{H}$ را یک فضای ضرب داخلی نامیم اگر به هر دوتایی مرتب از بردارهای x و y در $\mathcal{H}$ یک اسکالر مختلط مانند $< x, y >$ « حاصل ضرب داخلی x و y » با شرایط زیر نسبت داده شود:

(i) برای هر $x, y \in \mathcal{H}$، $< y, x > = \overline{< x, y >}$ (که در آن $\overline{< x, y >}$ نشانگر مزدوج مختلط $< x, y >$ است).

(ii) اگر $x, y, z \in \mathcal{H}$ ، $< x + y, z > = < x, z > + < y, z >$.

(iii) اگر $x, y \in \mathcal{H}$ و α اسکالر باشند، $< \alpha x, y > = \alpha < x, y >$.

(iv) به ازای هر $x \in \mathcal{H}$ ، $< x, x > \geq ۰$.

---

[۱] Linear operator
[۲] Bounded

(v) $<x,x> = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$.

به سادگی می توان نشان داد که $\|x\| = (<x,x>)^{\frac{1}{2}}$ یک نرم روی $\mathcal{H}$ است.

قضیه ۳.۱.۱ در یک فضای ضرب داخلی $(\mathcal{H}, <.,.>)$ موارد زیر برقرارند:

(i) $\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 = 2\| x \|^2 + 2\| y \|^2$ (قانون متوازی اضلاع).

(ii) $<x,y> = \frac{1}{4}[\| x+y \|^2 - \| x-y \|^2 + i\| x+iy \|^2 - i\| x-iy \|^2]$ (فرمول تجزیه قطبی).

هر فضای ضرب داخلی یک فضای نرم دار است اما عکس این مطلب برقرار نیست. مثلاً نرم فضای l^p متشکل از کلیه دنباله های $\{a_n\}$ در $\mathbb{C}$ که $\sum_{n=1}^{\infty} | a_n |^p < \infty$ تنها وقتی از یک ضرب داخلی نتیجه می شود که $p = 2$. شرط لازم و کافی برای آن که نرم یک فضا از یک ضرب داخلی نتیجه شود قسمت (i) قضیه قبل است، همچنین قسمت (ii) آن قضیه چگونگی تعریف ضرب داخلی از روی نرم را مشخص می کند.

قضیه ۴.۱.۱ هر فضای نرم دار یک فضای ضرب داخلی است اگر و فقط اگر نرم آن در قانون متوازی اضلاع صدق کند.

مثال ۵.۱.۱ (i) به ازای هر n ثابت، مجموعه $\mathbb{C}^n$ متشکل از تمام n تایی های $x = (x_1, ..., x_n)$ که در آن $x_1, ..., x_n$ اعدادی مختلط هستند با جمع مؤلفه به مؤلفه و ضرب اسکالر یک فضای هیلبرت است که ضرب داخلی آن به صورت $<x,y> = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$ تعریف می شود

(ii) فرض کنید $(X, \mathcal{M}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد. در این صورت فضای $L^2(\mu)$ با ضرب داخلی $<f,g> = \int_X f(x)\overline{g(x)}d\mu(x)$ یک فضای هیلبرت است.

تعریف ۶.۱.۱ دو عضو x و y از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را عمود بر هم نامیم هرگاه $< x, y >= \circ$. در این صورت می نویسیم $x \perp y$. حال فرض کنید M زیرمجموعه‌ای از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. $M^{\perp}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$M^{\perp} = \{x \in \mathcal{H} : \ < x, y >= \circ, \ \ \forall y \in M\}.$$

$M^{\perp}$ را مکمل متعامد[۳] M می نامیم.
همواره $M^{\perp}$ یک زیر فضای بسته $\mathcal{H}$ است. به علاوه اگر M یک زیر فضا باشد، آنگاه $M^{\perp\perp} = \overline{M}$.

تعریف ۷.۱.۱ اگر $\mathcal{H}$ فضای هیلبرت باشد، آنگاه دنباله $\{x_n\}$ را کامل [۴] می‌نامیم اگر $\overline{span\{x_n\}} = \mathcal{H}$.

قضیه ۸.۱.۱ فرض کنید $\{e_n\}$ یک دنباله از بردارهای متعامد یکه در فضای هیلبرت جدائی پذیر $\mathcal{H}$ باشد. آنگاه عبارت‌های زیر هم‌ارزند :

۱– $\{e_n\}$ کامل است.

۲– برای تمام $x \in \mathcal{H}$ داریم $\| x \|^{۲} = \sum |< x, e_n >|^{۲}$.

۳– برای تمام $x \in \mathcal{H}$ داریم $x = \sum < x, e_n > e_n$.

---

[۳] Orthogonal complement

[۴] Complete

تعریف ۹.۱.۱ دنباله متعامدی که در یکی از سه شرط قضیه فوق و در نتیجه در هر سه صدق کند را یک **پایه متعامد** [۵] یکه $\mathcal{H}$ می‌نامیم.

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنید $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ فضاهای هیلبرت با ضرب داخلی (به ترتیب) $<.,.>_{\mathcal{H}}$ و $<.,.>_{\mathcal{K}}$ بوده و $T:\mathcal{H}\to\mathcal{K}$ یک عملگر خطی باشد. عملگر الحاقی T را با T^* نشان داده و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$T^*:\mathcal{K}\to\mathcal{H}, <T^*v,u>_{\mathcal{H}}=<v,Tu>_{\mathcal{K}} \quad \forall u\in\mathcal{H}, v\in\mathcal{K}$$

به وضوح T^* یک عملگر خطی است و دارای خواص زیر است:

۱– $(T^*)^*=T$.

۲– $(T+S)^*=T^*+S^*$.

۳– $(TS)^*=S^*T^*$.

۴– $(\alpha T)^*=\bar{\alpha}T^*$.

مجموعه تمام عملگرهای کراندار روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را با $B(\mathcal{H})$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنید $T\in B(\mathcal{H})$.

۱– هرگاه برای هر $x\in\mathcal{H}$ داشته باشیم $<Tx,x>\geq 0$ آنگاه T را عملگر مثبت نامیم.

۲– هرگاه $T=T^*$ یعنی برای هر $x,y\in\mathcal{H}$، $<Tx,y>=<x,Ty>$، آنگاه T را عملگر خودالحاق [۶] نامیم.

۳– هرگاه $T^2=I$ و $T^*=T$ آنگاه عملگر T را **تصویر متعامد** [۷] می نامیم.

۴– هرگاه T دو سویی بوده و $T^*=T^{-1}$ آنگاه T را یکانی [۸] گوییم.

---

[۵] Orthonormal basis

[۶] Self adjoint

[۷] Orthogonal projection

[۸] Unitary

تعریف ۱۲.۱.۱ عملگر خطی و کراندار $T:\mathcal{H}\to\mathcal{K}$ طولپا [۹] نامیده می شود، هر گاه برای هر $u\in\mathcal{H}$، $\|Tu\|=\|u\|$.

قضیه ۱۳.۱.۱ فرض کنیم T یک عملگر خطی روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد به طوری که به ازای هر $x\in\mathcal{H}$ داشته باشیم $<Tx,x>=0$ در این صورت $T=0$.

اثبات. طبق فرض برای هر $x,y\in\mathcal{H}$ داریم

$$\begin{aligned} 0 &= <T(x-y),x-y> \\ &= <Tx,x>+<Ty,y>-<Tx,y>-<Ty,x> . \end{aligned}$$

لذا

$$<Tx,y>=-<Ty,x> .$$

همچنین اگر از ابتدا به جای y قرار دهیم iy، آنگاه

$$<Tx,y>=<Ty,x> .$$

در نتیجه برای هر $x,y\in\mathcal{H}$ خواهیم داشت $<Tx,y>=0$ در نتیجه $T=0$. □

تعریف ۱۴.۱.۱ مجموعه همه عملگرهای یکانی روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را با نماد $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ نمایش می دهیم. بنا به خواص عملگرهای یکانی، $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ همراه با عمل ترکیب عملگرها، یک گروه است. هر زیر گروه $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ را به اختصار گروه یکانی [۱۰] می نامیم.

فضای $B(\mathcal{H})$ متشکل از تمام عملگر های خطی و کراندار روی $\mathcal{H}$ تحت نرم عملگری یک فضای باناخ خواهد بود. از طرفی دو توپولوژی روی $B(\mathcal{H})$ مطرح می شوند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

تعریف ۱۵.۱.۱ (توپولوژی عملگری قوی) توپولوژی القاء شده توسط خانواده شبه نرمهای $\{T\to\|Tx\|;x\in\mathcal{H},T\in B(\mathcal{H})\}$ روی $B(\mathcal{H})$ را توپولوژی عملگری قوی [۱۱] نامیده

[۹] Isometry
[۱۰] Unitary group
[۱۱] Strong operator topology

و همگرایی در آن را با $T_\alpha \overset{sot}{\rightarrow} T$ نمایش می دهیم. به عبارت دیگر $T_\alpha \overset{sot}{\rightarrow} T$ اگر و فقط اگر برای هر $x \in \mathcal{H}$، $\|T_\alpha x - Tx\| \to 0$.

تعریف ۱۶.۱.۱ (توپولوژی عملگری ضعیف) توپولوژی القاء شده توسط خانواده شبه نرمهای $\{T \to |< T_\alpha x, y >| : x, y \in \mathcal{H}, T \in B(\mathcal{H})\}$ روی $B(\mathcal{H})$ را توپولوژی عملگری ضعیف [۱۲] نامیده و همگرایی در آن را با $T_\alpha \overset{wot}{\rightarrow} T$ نمایش می دهیم. در حقیقت $T_\alpha \overset{wot}{\rightarrow} T$ اگر و فقط اگر برای هر $x, y \in \mathcal{H}$، $< T_\alpha x, y > \to < Tx, y >$.

در مقایسه توپولوژی های مطرح شده باید بگوییم که توپولوژی عملگری ضعیف، ضعیف تر از توپولوژی عملگری قوی و توپولوژی عملگری قوی ضعیف تر از توپولوژی القاء شده توسط نرم است.

این بخش را با این مطلب به پایان می بریم که توپولوژی عملگری ضعیف و توپولوژی عملگری قوی روی $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ بر هم منطبق هستند. یعنی اگر $\{T_\alpha\}$ توری از عملگر های یکانی فرض شود که با توپولوژی ضعیف به T همگر باشد آنگاه برای هر $u \in \mathcal{H}$ داریم

$$\begin{aligned} \| (T_\alpha - T)u \|^2 &= \| T_\alpha u \|^2 - 2Re < T_\alpha u, Tu > + \| Tu \|^2 \\ &= 2 \| u \|^2 - 2Re < T_\alpha u, Tu >, \end{aligned}$$

پس $T_\alpha \overset{sot}{\rightarrow} T$.

۲.۱ تبدیل فوریه

در این بخش تبدیل فوریه و نتایجی از آنالیز فوریه و قضایای مورد نیاز در این پایان نامه را یادآوری می کنیم.

[۱۲] Weak operator topology

برای $p \geq 1$ فضای $L^p[0, 2\pi]$ شامل توابع اندازه پذیر مانند f با دوره تناوب 2π است به طوری که

$$\| f \|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | f(x) |^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

در تعریف نرم فوق ضریب $\frac{1}{2\pi}$ برای نرمال‌سازی است. برای $f \in L^1[0, 2\pi]$ سری فوریه f به صورت

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

است که در آن

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx,$$

k–امین ضریب فوریه f است. اغلب به جای c_k می‌نویسیم $\hat{f}(k)$.

تعریف ۱.۲.۱ اگر $f \in L^1(\mathbb{R})$ آنگاه تبدیل فوریه f را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \omega x} dx, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

گاهی اوقات به جای $\hat{f}$ می نویسیم $\mathcal{F}(f)$.

با استفاده از چگال بودن $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ در $L^2(\mathbb{R})$ و یک فرآیند حدی می‌توان تبدیل فوریه را به توابع $L^2(\mathbb{R})$ گسترش داد.

قضیه ۲.۲.۱ **(قضیه پلانشرال)**[13] اگر $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ آنگاه $< f, g > = < \hat{f}, \hat{g} >$.

[13] Plancherel's Theorem

برخی از مراجع تبدیل فوریه $f \in L^1(\mathbb{R})$ را به صورت زیر تعریف می‌کنند

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\omega x}dx, \quad \omega \in R.$$

دراین صورت تساوی قضیه پلانشرال به صورت زیر خواهد بود

$$< f, g >= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} < \hat{f}, \hat{g} > .$$

تعریف ۳.۲.۱ برای هر $a \in \mathbb{R}$ و برای هر $b > 0$ عملگرهای T_a, D_b را روی $L^2(\mathbb{R})$ به صورت زیر تعریف می کنیم

$$T_a f(x) = f(x - a)$$

و

$$D_b f(x) = \sqrt{b} f(bx).$$

T_a را عملگر انتقال و D_b را عملگر اتساع می‌نامیم. به سادگی نشان داده می‌شود که عملگرهای T_a, D_b روی $L^2(\mathbb{R})$ عملگرهای یکانی هستند.

قضیه ۴.۲.۱ فرض کنیم $f \in L^1(\mathbb{R})$ آنگاه

۱—برای هر $a \in \mathbb{R}$ داریم

$$\widehat{T_a f}(\omega) = e^{-ia\omega} \hat{f}(\omega)$$

۲—برای هر $b > 0$ داریم

$$\widehat{D_b f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{b}} \hat{f}(\frac{\omega}{b})$$