بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه رازی

دانشکده علوم

گروه آمار

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد رشته ی آمار ریاضی

ترتیب تصادفی میان مدل های آمیخته از توزیع هایی با نرخ خطر معکوس متناسب

استاد راهنما:

دکتر بهاءالدین خالدی

نگارش:

زهرا رحمانی

مهر ماه ۱۳۸۹

قدردانی

نهایت سپاس و تشکر خود را از زحمات استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر بهاءالدین خالدی که با راهنمایی‌های ارزنده خویش من را در تمام مراحل تدوین این پایان نامه یاری نمودند و همواره مشوق اینجانب بوده‌اند، ابراز می‌دارم. از خداوند متعال سلامتی و سربلندی ایشان را خواستارم.

از اساتید محترم آقای دکتر محمد مرادی و آقای دکتر مجید صادقی فر که زحمت مطالعه و داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

زهرا رحمانی

کرمانشاه، مهر ماه ۱۳۸۹

تقدیم به

استاد ارجمندم جناب آقای دکتر بهاءالدین خالدی،

خانواده مهربانم بویژه پدر و مادر گرانقدرم

و همسر عزیزم

که مرا در به پایان رساندن این پایان نامه یاری نمودند.

چکیده

در این رساله با استفاده از ترتیب های تصادفی چند متغیره نسبت درستنمایی،نرخ خطر و نرخ خطر معکوس توزیع های چنده متغیره مورد مقایسه قرار می گیرند. به ویژه مقایسه های تصادفی مدل های شکنندگی را که حالت خاصی از توزیع های آمیخته هستند و مدل های آمیخته نرخ خطر معکوس متناسب مورد بحث قرار می گیرد.

واژه های کلیدی: ترتیب های تصادفی چندمتغیره و تک متغیره،توابع TP_2 و RR_2 ، توابع نرخ خطر، مدل شکنندگی، تئوری قابلیت اعتماد.

فهرست مطالب

فهرست شکل ها

پیشگفتار

در بسیاری از مسائل آماری نیاز به مقایسه بین دو متغیر یا دو بردار تصادفی وجود دارد. از این رو با استفاده از ترتیب‌های تصادفی به مقایسه‌های تصادفی بین متغیرهای تصادفی یا بردارهای تصادفی مختلف می‌پردازیم. می‌دانیم که در اکثر موارد کاربردی، توابع توزیع با یکدیگر آمیخته می‌شوند. به عنوان مثال، طول عمر قطعات تولیدی یک کارخانه که در دو خط تولید مختلف تولید شده‌اند، با توجه به اینکه در هر خط تولید ماشین‌ها، پرسنل و ... متفاوتند، یکسان نخواهند بود و طول عمر قطعات تولیدی این کارخانه آمیخته‌ای از توابع توزیع طول عمر قطعات در هر خط تولید خواهد بود. فرض کنید $\{F_\theta, \theta \in \chi\}$ نشان دهنده خانواده توابع توزیع n بعدی باشد بطوریکه فضای پارامتر χ زیر مجموعه خط اعداد حقیقی $\Re$ است. برای هر $\theta \in \chi$، فرض کنید $\mathbf{X}(\theta) \equiv (X_۱(\theta), X_۲(\theta), \ldots, X_n(\theta))$ نشان دهنده بردار تصادفی با تابع توزیع F_θ باشد. همچنین فرض کنید Θ متغیر تصادفی باشد که دارای تکیه‌گاه χ و تابع توزیع H است. بنابراین بردار تصادفی $\mathbf{X}(\Theta) \equiv (X_۱(\Theta), X_۲(\Theta), \ldots, X_n(\Theta))$ دارای تابع توزیع G به صورت

$$G(\mathbf{x}) = \int_\chi F_\theta(\mathbf{x})\ dH(\theta), \qquad \mathbf{x} \equiv (x_۱, \ldots, x_n) \in \Re^n$$

است، با توجه به اینکه تابع توزیع $\mathbf{X}(\Theta)$ آمیخته‌ای از توابع توزیع تعریف شده بر روی $\{F_\theta, \theta \in \chi\}$ است به این مدل، مدل آمیخته چند متغیره و به Θ متغیر تصادفی آمیختن گفته می‌شود.

در این رساله با استفاده از استقلال شرطی میان مؤلفه‌های بردار $(\Theta, \mathbf{X}(\Theta))$ به مقایسه تصادفی بردارهای تصادفی می‌پردازیم که از مدل‌های آمیخته پیروی می‌نمایند و از ترتیب‌های تصادفی که ممکن است میان متغیرهای تصادفی آمیختن موجود باشد ترتیب‌های تصادفی میان متغیرهای آمیخته را بدست می‌آوریم. انواع ترتیب‌های تصادفی چند متغیره که در این پایان نامه مورد مطالعه قرار گرفته‌اند عبارتند از: ترتیب تصادفی کنج از بالا و پایین، ترتیب تصادفی معمولی، ترتیب نرخ خطر معکوس، ترتیب نرخ خطر، ترتیب نسبت درستنمایی و ترتیب تبدیل لاپلاس.

در فصل اول به معرفی ترتیب‌های تصادفی، روابط بین آنها و ویژگی آنها در حالت چند متغیره و تک

متغیره می‌پردازیم. همچنین مفاهیم تابع کاملاً مثبت از مرتبه ۲ ($TP_۲$)، تابع منظم معکوس از مرتبه ۲ ($RR_۲$) که در مقایسه‌های تصادفی و بدست آوردن نامساوی‌ها نقش دارند بیان شده‌اند. در فصل دوم، ترتیب‌های تصادفی چند متغیره و در حالت خاص تک متغیره در مدل‌های شکنندگی که حالتی خاص از مدل‌های آمیخته می‌باشند، را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در فصل سوم، ترتیب‌های تصادفی چند متغیره در مدل‌های نرخ خطر معکوس متناسب را بررسی می‌کنیم و در فصل چهارم، مقایسه مدل‌های آمیخته چند متغیره و برخی از کاربردهای آن را مطالعه می‌کنیم.

فصل اول

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱-۱ مقدمه

در این فصل به بیان تعاریف و مفاهیم مورد نیاز سایر فصل ها می پردازیم. بخش ۱-۲ به تعریف مدل های آمیخته[1] اختصاص دارد. در بخش ۱-۳ ترتیب های تصادفی[2] مورد نیاز را در حالت های تک متغیره و چند متغیره معرفی و ارتباط میان آنها را بررسی می نماییم. در بخش ۱-۴ تابع کاملاً مثبت از مرتبه ۲[3] و تابع منظم معکوس از مرتبه ۲[4] را مورد مطالعه قرار می دهیم.

۱-۲ مدل های آمیخته

فرض کنید کارخانه ای ۶۰ درصد از یک محصول خاص را با استفاده از خط تولید اول و ۴۰ درصد باقی مانده آن محصول را با استفاده از خط تولید دوم تولید می کند. با توجه به اینکه در هر خط تولید ماشین ها، پرسنل و ... متفاوت هستند، بنابراین تولیدات دارای طول عمر متفاوتی هستند. فرض می کنیم تولیدات خط اول دارای توزیع F_1 و تولیدات خط دوم دارای توزیع F_2 ($F_1 \neq F_2$) باشند. بعد از تولید، محصولات خط تولید اول و خط تولید دوم به یک انبار مشترک منتقل می شوند. بنابراین طول عمر محصولی که از این انبار به صورت تصادفی انتخاب می شود دارای توزیع $F=0/6F_1+0/4\,F_2$ است، به طوریکه این توزیع آمیخته از توزیع های F_1 و F_2 است.

حال به طور کلی فرض کنید $\{F_\theta, \theta \in \chi\}$ نشان دهنده خانواده توابع توزیع n بعدی باشد بطوریکه فضای پارامتر χ زیر مجموعه خط اعداد حقیقی R است. برای هر $\theta \in \chi$، فرض کنید $X(\theta)\equiv(X_1(\theta),X_2(\theta),\ldots,X_n(\theta))$ نشان دهنده بردار تصادفی با تابع توزیع F_θ باشد. همچنین فرض کنید Θ متغیر تصادفی باشد که دارای تکیه گاه χ و تابع توزیع H است. بنابراین بردار تصادفی $X(\Theta)\equiv(X_1(\Theta),X_2(\Theta),\ldots,X_n(\Theta))$ دارای تابع توزیع G به صورت

---
۱ Mixture model
۲ Stochastic orders
۳ Total positive of order ۲
۴ Reverse regular of order ۲

$$G(\mathbf{x}) = \int_\chi F_\theta(\mathbf{x})\; dH(\theta), \qquad \mathbf{x} \equiv (x_۱, \dots, x_n) \in \Re^n$$

است، با توجه به اینکه تابع توزیع $\mathbf{X}(\Theta)$ آمیخته‌ای از توابع توزیع تعریف شده بر روی $\{F_\theta, \theta \in \chi\}$ است به این مدل، مدل آمیخته چند متغیره[5] و به Θ متغیر تصادفی آمیختن گفته می‌شود. در اکثر مواقع فرض می‌شود متغیرهای تصادفی موجود در بردار $\mathbf{X}(\Theta)$ به شرط $\Theta = \theta$ از هم مستقل‌اند، بنابراین تابع توزیع شرطی $\mathbf{X}(\Theta)$ به شرط $\Theta = \theta$ عبارت است از:

$$F_\theta(\mathbf{x}) \equiv F_\theta(x_۱, x_۲, \dots, x_n) = \prod_{j=۱}^{n} F_{j,\theta}(x_j),$$

بطوریکه $F_{j,\theta}$ تابع توزیع تک متغیره $X_j(\theta)$ برای هر $j \in \{۱, ۲, \dots, n\}$ و هر $\theta \in \chi$ است. به عبارت دیگر، نشان دهنده تابع توزیع شرطی $X_j(\Theta)$ به شرط $\Theta = \theta$ است. بنابراین با استفاده از استقلال شرطی، تابع توزیع $\mathbf{X}(\Theta)$ عبارت است از:

$$G(\mathbf{x}) = \int_\chi \prod_{j=۱}^{n} F_{j,\theta}(x_j)\; dH(\theta)$$

اگر $F_{j,\theta}$ مطلقاً پیوسته باشد و برای هر $j \in \{۱, ۲, \dots, n\}$ و هر $\theta \in \chi$ دارای تابع چگالی $f_{j,\theta}$ باشد، تابع چگالی $\mathbf{X}(\Theta)$ عبارت است از:

$$g(\mathbf{x}) = \int_\chi \prod_{j=۱}^{n} f_{j,\theta}(x_j)\; dH(\theta).$$

حال اگر به جای متغیر تصادفی تک متغیره آمیختن از بردار تصادفی آمیختن استفاده کنیم مدل آمیخته را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

فرض کنید $X_۱, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی باشند به طوریکه به شرط برداری تصادفی مانند $\mathbf{\Theta} = (\Theta_۱, \dots, \Theta_n)$ مستقل باشند. اگر $F_j(.|\theta_۱, \dots, \theta_m)$ نشان دهنده تابع توزیع شرطی X_j به شرط $\mathbf{\Theta} = (\theta_۱, \dots, \theta_m)$ باشد و $H(\theta_۱, \dots, \theta_m)$ نشان دهنده تابع توزیع توام $\mathbf{\Theta}$ باشد، آنگاه تابع توزیع توام $\mathbf{X}$ عبارت است از:

$$G(\mathbf{x}) = \int_{R^m} \prod_{j=۱}^{n} F_j(x_j|\theta_۱, \dots, \theta_m)\; dH(\theta_۱, \dots, \theta_m).$$

اگر $F_j(x_j|\theta_۱, \dots, \theta_m)$ برای هر $(\theta_۱, \dots, \theta_m)$ در تکیه‌گاه $\mathbf{\Theta}$ مطلقاً پیوسته باشد و دارای تابع چگالی $f_j(x_j|\theta_۱, \dots, \theta_m)$ باشد، آنگاه چگالی توام $X_۱, \dots, X_n$ مطلقاً پیوسته بوده و به صورت زیر است:

$$g(\mathbf{x}) = \int_{R^m} \prod_{j=۱}^{n} f_i(x_j|\theta_۱, \dots, \theta_m)\; dH(\theta_۱, \dots, \theta_m).$$

[5] *Multivariate mixture model*

به چنین مدلی نیز، مدل آمیخته چند متغیره و به بردار Θ بردار آمیختن گفته می‌شود. حالت خاصی از این مدل هنگامی است که $m = n$ باشد. در این حالت

$$g(\mathbf{x}) = \int_{R^n} \prod_{j=۱}^{n} f_i(x_j|\theta_i)\; dH(\theta_۱, \ldots, \theta_n).$$

به عنوان مثال‌هایی از مدل آمیخته می‌توان به زمان پیشرفت تومور، مدل‌های شکنندگی و سرعت بخشیدن به روند آزمایش عمر، مدیریت ریسک و تضمین زمان انجام کار اشاره نمود که در فصل‌های بعدی به صورت مفصل مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۱ــ۳ ترتیب‌های تصادفی

ترتیب‌های تصادفی به مقایسه متغیرهای تصادفی با استفاده از مقایسه توابع توزیع، تابع نرخ خطر، تابع نرخ خطر معکوس، تابع چندک یا توابع مناسب دیگر می‌پردازد. در این بخش ضمن ارائه تعاریف مربوط به ترتیب‌های تصادفی مورد نیاز، به بررسی روابط میان آنها نیز می‌پردازیم. از آنجا که موضوع اصلی این رساله مقایسه مدل‌های آمیخته با استفاده از ترتیب‌های تصادفی چند متغیره است، ابتدا به بحث درباره ترتیب‌های تصادفی چند متغیره می‌پردازیم.

۱ــ۳.۱ ترتیب‌های تصادفی چند متغیره

بردار تصادفی n بعدی X را بصورت $\mathbf{X} = (X_۱, X_۲, \ldots, X_n)$ و بردار تصادفی n بعدی Y را به صورت $\mathbf{Y} = (Y_۱, Y_۲, \ldots, Y_n)$ نشان می‌دهیم. تابع چگالی، تابع توزیع و تابع بقای بردارهای تصادفی n بعدی $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ را به ترتیب با $f(\mathbf{x})$، $g(\mathbf{x})$، $F(\mathbf{x}) = P\{\mathbf{X} \leq \mathbf{x}\}$، $G(\mathbf{x}) = P\{\mathbf{Y} \leq \mathbf{x}\}$، $\overline{F}(\mathbf{x}) = P\{\mathbf{X} > \mathbf{x}\}$ و $\overline{G}(\mathbf{x}) = P\{\mathbf{Y} > \mathbf{x}\}$ نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم بردارهای تصادفی مورد نظر به فضای $\Re^n$ متعلق باشند. برای بردارهای $\mathbf{x} = (x_۱, \ldots, x_n) \in \Re^n$ و $\mathbf{y} = (y_۱, \ldots, y_n) \in \Re^n$ نماد $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ به این معناست که برای هر $i = ۱, \ldots, n$، $x_i \leq y_i$ و نماد $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ به این معناست که برای هر $i = ۱, \ldots, n$، $x_i > y_i$. برای مقادیر حقیقی x و y، $x \wedge y$ $(x \vee y)$ نشان دهنده مینیمم (ماکسیمم) x و y است. همچنین برای $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Re^n$

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = (x_۱ \wedge y_۱, \ldots, x_n \wedge y_n)$$

و

$$\mathbf{x} \vee \mathbf{y} = (x_1 \vee y_1, \dots, x_n \vee y_n).$$

تعریف ۱.۱

- ترتیب متعامد کنج از بالا [۶]

می‌گوییم بردار تصادفی $\mathbf{X}$ در ترتیب متعامد کنج از بالا از بردار تصادفی $\mathbf{Y}$ کوچکتر است، ($\mathbf{X} \le_{uo} \mathbf{Y}$)، اگر برای تمام $\mathbf{x}$ها

$$\overline{F}(\mathbf{x}) \le \overline{G}(\mathbf{x}).$$

- ترتیب متعامد کنج از پایین [۷]

می‌گوییم بردار تصادفی $\mathbf{X}$ در ترتیب متعامد کنج از پایین از بردار تصادفی $\mathbf{Y}$ کوچکتر است، ($\mathbf{X} \le_{lo} \mathbf{Y}$)، اگر برای تمام $\mathbf{x}$ها

$$F(\mathbf{x}) \ge G(\mathbf{x}).$$

قضیه زیر شرایط لازم و کافی برای برقراری ترتیب متعامد کنج از بالا و از پایین را ارائه می‌دهد.

قضیه ۱.۱ (شیکد[۸] و شانتیکومار[۹] ، ۲۰۰۷)

فرض کنید $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ بردارهای تصادفی n بعدی باشند. بنابراین

الف) $\mathbf{X} \le_{uo} \mathbf{Y}$ اگر و فقط اگر برای هر مجموعه $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ از توابع تک متغیره نامنفی صعودی

$$E[\prod_{i=1}^{n} g_i(X_i)] \le E[\prod_{i=1}^{n} g_i(Y_i)].$$

ب) $\mathbf{X} \le_{lo} \mathbf{Y}$ اگر و فقط اگر برای هر مجموعه $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ از توابع تک متغیره نامنفی نزولی

$$E[\prod_{i=1}^{n} g_i(X_i)] \ge E[\prod_{i=1}^{n} g_i(Y_i)].$$

---

۶ *Upper orthant order*

۷ *Lower orthant order*

۸ *Shaked*

۹ *Shanthikumar*

در زیر به تعریف ترتیب تصادفی معمولی چند متغیره[10] می‌پردازیم که ترتیب متعامد کنج را نتیجه می دهد.

تعریف ۲.۱ می گوییم بردار تصادفی $\mathbf{X}$ در ترتیب تصادفی معمولی از بردار تصادفی $\mathbf{Y}$ کوچکتر است، ($\mathbf{X} \leq_{st} \mathbf{Y}$)، اگر برای هر تابع صعودی $\phi : \Re^n \longrightarrow \Re$ با شرط وجود امیدهای ریاضی،

$$E(\phi(\mathbf{X})) \leq E(\phi(\mathbf{Y})).$$

قضایای زیر شرایط کافی برای برقراری ترتیب تصادفی معمولی چند متغیره میان دو بردار تصادفی را ارائه می دهند.

قضیه ۲.۱ (شیکد و شانتیکومار، ۲۰۰۷)

فرض کنید $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ بردارهای تصادفی n بعدی باشند. اگر

$$X_1 \leq_{st} Y_1,$$

و هنگامیکه $x_1 \leq y_1$،

$$[X_2|X_1 = x_1] \leq_{st} [Y_2|Y_1 = y_1],$$

و در حالت کلی برای $i = 2, \ldots, n$، هنگامیکه $x_j \leq y_j$، $j = 1, 2, \ldots, i-1$،

$$[X_i|X_1 = x_1, \ldots, X_{i-1} = x_{i-1}] \leq_{st} [Y_i|Y_1 = y_1, \ldots, Y_{i-1} = y_{i-1}],$$

بنابراین $\mathbf{X} \leq_{st} \mathbf{Y}$ است.

قضیه ۳.۱ (شیکد و شانتیکومار، ۲۰۰۷)

فرض کنید $\mathbf{X}$، $\mathbf{Y}$ و Θ بردارهای تصادفی n بعدی باشند بطوریکه برای تمام $\theta \in \mathbf{\Theta}$،

$$[\mathbf{X}|\mathbf{\Theta} = \theta] \leq_{st} [\mathbf{Y}|\mathbf{\Theta} = \theta].$$

بنابراین $\mathbf{X} \leq_{st} \mathbf{Y}$ است.

[10] *Usual multivariate stochastic order*

ارتباط زیر میان ترتیب تصادفی معمولی چند متغیره و ترتیب متعامد کنج از بالا و ترتیب متعامد کنج از پایین وجود دارد:

$$\mathbf{X} \leq_{st} \mathbf{Y} \Longrightarrow (\mathbf{X} \leq_{uo} \mathbf{Y} \ \& \ \mathbf{X} \leq_{lo} \mathbf{Y}). \tag{۱.۳.۱}$$

مولر[۱۱] و استویان[۱۲] (۲۰۰۲) با استفاده از مثال زیر نشان دادند عکس رابطه (۱.۳.۱) برقرار نیست.

مثال ۱.۱ فرض کنید $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ بردار تصادفی گسسته‌ای باشد بطوریکه $P\{\mathbf{X} = (1, 0)\} = P\{\mathbf{X} = (0, 1)\} = \frac{1}{2}$. فرض کنید $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$ بردار تصادفی گسسته دیگری باشد بطوریکه $P\{\mathbf{Y} = (0, 0)\} = P\{\mathbf{Y} = (1, 1)\} = \frac{1}{2}$. با یک محاسبه ساده مشاهده می‌کنیم $\mathbf{X} \leq_{uo} \mathbf{Y}$ و $\mathbf{X} \leq_{lo} \mathbf{Y}$، اما ترتیب تصادفی معمولی میان بردارهای $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ برقرار نیست.

در زیر به تعریف ترتیب نرخ خطر معکوس چند متغیره[۱۳] می‌پردازیم که ترتیب تصادفی معمولی چند متغیره را نتیجه می‌دهد.

فرض کنید $T = (T_1, T_2)$ برداری تصادفی باشد که نشان دهنده طول عمر دو مؤلفه با تابع توزیع توأم $F(t_1, t_2)$ است. تابع نرخ خطر معکوس دو متغیره $\lambda(t_1, t_2) = (\lambda_1(t_1, t_2), \lambda_2(t_1, t_2))$ برابر است با:

$$\begin{aligned} \lambda_i(t_1, t_2) &= \lim_{\Delta t_i \to 0} \frac{P(t_i - \Delta t_i \leq T_i \leq t_i | T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2)}{\Delta t_i} \\ &= \frac{\partial \log F(t_1, t_2)}{\partial t_i}, \qquad i = 1, 2. \end{aligned}$$

برای $i = 1$، $\lambda_1(t_1, t_2)\Delta t_1$ نشان دهنده احتمال از بین رفتن اولین مؤلفه در بازه زمانی $(t_1 - \Delta t_1, t_1]$ است به شرط اینکه مؤلفه اول قبل از t_1 از بین برود و دومین مؤلفه نیز قبل از t_2 از بین برود. به همین ترتیب می‌توان $i = 2$ را نیز تفسیر کرد. مدل نرخ خطر معکوس دو متغیره توسط روی[۱۴] (۲۰۰۲) معرفی شد.

وی نشان داد که با استفاده از $\lambda_i(t_1, t_2)$ می‌توان $F(t_1, t_2)$ را به صورت زیر، به طور یکتا تعیین کرد:

$$F(t_1, t_2) = \exp\{-\int_{t_1}^{\infty} \lambda_1(u, \infty)\, du - \int_{t_2}^{\infty} \lambda_2(t_1, u)\, du\}$$

---

۱۱ *Müller*

۱۲ *Stoyan*

۱۳ *Multivariate reversed hazard rate order*

۱۴ *Roy*

یا

$$F(t_1,t_2)=\exp\{-\int_{t_1}^{\infty}\lambda_1(u,t_2)\,du-\int_{t_2}^{\infty}\lambda_2(\infty,u)\,du\}$$

بطوریکه $\lambda_1(t_1,\infty)=\lambda_1(t_1)$ و $\lambda_1(\infty,t_2)=\lambda_2(t_2)$ به ترتیب نشان دهنده تابع نرخ خطر معکوس حاشیه‌ای T_1 و T_2 هستند.

فرض کنید $T_1,\ldots,T_n$ نشان دهنده طول عمر n مؤلفه باشند. تابع توزیع توأم مؤلفه‌ها را به صورت

$$F(\mathbf{t})=P(T_1\le t_1,\ldots,T_n\le t_n),$$

تعریف می‌کنیم بطوریکه $\mathbf{t}=(t_1,\ldots,t_n)$ است. تابع نرخ خطر معکوس بردار $(T_1,\ldots,T_n)$ را به صورت

$$\lambda(\mathbf{t})=(\frac{\partial}{\partial t_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial t_n})\log F(\mathbf{t})$$

نشان می‌دهیم و به بردار $\lambda(\mathbf{t})$ بردار گرادیان نرخ خطر معکوس گفته می‌شود.

ترتیب نرخ خطر معکوس چند متغیره توسط میشرا[۱۵] ، گوپتا [۱۶] و گوپتا (۲۰۰۹) معرفی شد.

تعریف ۳.۱ می‌گوییم بردار تصادفی $\mathbf{X}$ در ترتیب نرخ خطر معکوس از بردار تصادفی $\mathbf{Y}$ کوچکتر است، $(\mathbf{X}\le_{rh}\mathbf{Y})$، اگر برای هر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ متعلق به $\Re^n$

$$F(\mathbf{x})G(\mathbf{y})\le F(\mathbf{x}\wedge\mathbf{y})G(\mathbf{x}\vee\mathbf{y}). \quad (۲.۳.۱)$$

درادامه به تعریف ترتیب نرخ خطر چند متغیره[۱۷] می‌پردازیم که ترتیب تصادفی معمولی چند متغیره را نتیجه می‌دهد.

فرض کنید $T_1,\ldots,T_n$ نشان دهنده طول عمر n مؤلفه باشند. تابع بقای توأم مؤلفه‌ها را به صورت

$$\overline{F}(\mathbf{t})=P(T_1>t_1,\ldots,T_n>t_n),$$

تعریف می‌کنیم بطوریکه $\mathbf{t}=(t_1,\ldots,t_n)$ است. بردار گرادیان نرخ خطر $r(\mathbf{t})$ عبارت است از

$$r(\mathbf{t})=(-\frac{\partial}{\partial t_1},\ldots,-\frac{\partial}{\partial t_n})\log\overline{F}(\mathbf{t}).$$

۱۵ *Misra*

۱۶ *Gupta*

۱۷ *Multivariate hazard rate order*

بنابراین $r(\mathbf{t}) = (r_۱(t), \ldots, r_n(t))$ است بطوریکه

$$r_i(t) = -\frac{\partial}{\partial t_i} \log \overline{F}(\mathbf{t}), \qquad i = ۱, \ldots, n.$$

ترتیب نرخ خطر چند متغیره توسط هو[۱۸] ، خالدی [۱۹] و شیکد(۲۰۰۳) معرفی شد.

تعریف ۴.۱ می‌گوییم بردار تصادفی $\mathbf{X}$ در ترتیب نرخ خطر از بردار تصادفی $\mathbf{Y}$ کوچکتر است، ($\mathbf{X} \leq_{hr} \mathbf{Y}$)، اگر برای هر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ متعلق به $\Re^n$

$$\overline{F}(\mathbf{x})\overline{G}(\mathbf{y}) \leq \overline{F}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})\overline{G}(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}). \qquad (۳.۳.۱)$$

تعریف ۵.۱ می‌گوییم بردار تصادفی $\mathbf{X}$ در ترتیب نرخ خطر ضعیف [۲۰] از بردار تصادفی $\mathbf{Y}$ کوچکتر است، ($\mathbf{X} \leq_{whr} \mathbf{Y}$)، اگر

$$\frac{\overline{G}(\mathbf{x})}{\overline{F}(\mathbf{x})} \qquad (۴.۳.۱)$$

نسبت به $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x} : \overline{G}(\mathbf{x}) > ۰\}$ صعودی باشد و فرض می‌کنیم برای $a > ۰$، $a/۰ \equiv \infty$ باشد.

عبارت (۴.۳.۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\overline{F}(\mathbf{y})\overline{G}(\mathbf{x}) \leq \overline{F}(\mathbf{x})\overline{G}(\mathbf{y}), \qquad \forall \mathbf{x} \leq \mathbf{y}. \qquad (۵.۳.۱)$$

بنابراین با استفاده از روابط (۳.۳.۱) و (۵.۳.۱) نتیجه می‌گیریم:

$$\mathbf{X} \leq_{hr} \mathbf{Y} \Longrightarrow \mathbf{X} \leq_{whr} \mathbf{Y}. \qquad (۶.۳.۱)$$

با استفاده از تعریف زیر می‌توان نشان داد که عکس رابطه (۶.۳.۱) تحت شرایطی می‌تواند برقرار شود.

تعریف ۶.۱ می‌گوییم تابع نامنفی $\psi : \Re^n \longrightarrow [۰, \infty)$ کاملاً مثبت چند متغیره از مرتبه ۲ [۲۱] ($MTP_۲$) است اگر برای هر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ متعلق به $\Re^n$

$$\psi(\mathbf{x})\psi(\mathbf{y}) \leq \psi(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})\psi(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}).$$

۱۸ *Hu*

۱۹ *Khaledi*

۲۰ *Weak multivariate hazard rate order*

۲۱ *Multivariate total positive of order* ۲