دانشگاه زنجان
دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

همگرایی جواب معادلات دیفرانسیل تاخیری غیرخطی

نگارش:
مریم طاهرپرور

استاد راهنما:
دکتر هادی خطیب زاده

مهر ۱۳۹۰

قدردانی

تقدیم به پدر و مادرم، مهربان فرشتگانی که لحظه های نفس کشیدنم را مدیونشانم

و

تقدیم به همراهان همیشگی زندگیم که بدون سایه محبتشان هیچم

و

تقدیم به همه ی معلمانی که روشنی راه زندگیم بوده اند.

چکیده

در این پایان‌نامه، به بررسی رفتار مجانبی جواب‌های معادلات دیفرانسیل تأخیری خطی و مشابه گسسته آنها، معادلات تفاضلی تأخیری خطی و همچنین معادلات دیفرانسیل تأخیری غیرخطی می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: *معادله دیفرانسیل تأخیری خطی، معادله دیفرانسیل تأخیری غیرخطی، معادله تفاضلی تأخیری، رفتار مجانبی، پایداری مجانبی، همگرایی، جوابهای نوسانی .*

پیشگفتار

معادله دیفرانسیل

$$\begin{cases} x'(t)+p(t)x(t-\tau)=r(t), & t\geq\tau \\ x(t)=\varphi(t), & t\in[0,\tau] \end{cases} \tag{1}$$

که در آن جواب در زمان t وابسته به جواب در زمان $t-\tau$ است، یک معادله تأخیری خطی از درجه یک نامیده می‌شود که $\tau > 0$ تأخیر و φ یک تابع پیوسته داده شده در بازه‌ی $[0,\tau]$ می‌باشد. در این‌گونه معادلات شرط آغازین به‌صورت یک تابع φ در بازه‌ی $[0,\tau]$ داده می‌شود و جواب‌های معادله را می‌توان با مشخص بودن تابع φ به‌روش گام‌به‌گام با انتگرال‌گیری به‌دست آورد. از آنجا که بی‌نهایت تابع مستقل خطی در بازه‌ی $[0,\tau]$ وجود دارد، فضای جواب‌های معادله بی‌نهایت بعدی است. همان‌طور که گفتیم وجود جواب در مورد معادلاتی مانند (1) با روش گام‌به‌گام موضوعی حل شده است، بنابراین معادله‌ی (1) بیشتر از جهت رفتار کیفی جواب‌های آن مورد مطالعه می‌باشد.

دو مبحث در رفتار کیفی معادلات تأخیری از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و در تحقیقات در این زمینه بیشتر به آن پرداخته شده است که یکی رفتار مجانبی جواب و دیگری مبحث نوسان جواب‌های معادله است.

در این پایان‌نامه ما به مسأله رفتار مجانبی جواب‌های معادله‌ی (1) و همچنین رفتار مجانبی شکل گسسته و غیرخطی آن می‌پردازیم.

در معادله‌ی (1) فرض کنید $p(t)\equiv p$ و $r(t)\equiv 0$ ثابت باشد، آنگاه معادله‌ی مشخصه‌ی معادله تأخیری حاصل که با جایگزینی $e^{\lambda t}$ در معادله به‌دست می‌آید، به‌صورت

$$\lambda e^{\lambda t}+pe^{\lambda(t-\tau)}=0,$$

می‌باشد که با حذف $e^{\lambda t}$ از طرفین به‌صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\lambda+pe^{-\lambda\tau}=0.$$

می‌خواهیم همگرایی جواب معادله دیفرانسیل تأخیری را با استفاده از ریشه‌ی معادله‌ی مشخصه بررسی کنیم.

با فرض زیر داریم:

$$f(\lambda) = \lambda + pe^{-\lambda\tau}.$$

$$f'(\lambda) = ۱ - p\tau e^{-\lambda\tau} = ۰ \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{۱}{\tau}\ln p\tau$$

و چون $p, \tau > ۰$

$$f''(\lambda) = p\tau^{۲} e^{-\lambda\tau} > ۰.$$

پس λ به‌دست آمده به‌عنوان ریشه‌ی مشتق f نقطه‌ی می‌نیمم f است که آن را با λ_{min} نشان می‌دهیم. با توجه به این‌که

$$\lim_{\lambda \to -\infty} f(\lambda) = \infty$$

بنا به قضیه‌ی مقدار میانی شرط کافی برای وجود ریشه‌ی منفی برای f این است که λ_{min} و $f(\lambda_{min})$ منفی باشند. یعنی

$$\lambda_{min} = \frac{۱}{\tau}\ln p\tau < ۰ \quad \Rightarrow \quad p\tau < ۱$$

و

$$f(\lambda_{min}) = \lambda + pe^{-\lambda\tau} < ۰ \quad \Rightarrow \quad p\tau < e^{-۱}.$$

بنابراین

$$p\tau < e^{-۱}$$

شرط کافی برای آن است که معادله مشخصه ریشه‌ی نامنفی داشته باشد. برای این ریشه‌ی منفی λ، $x(t) = e^{\lambda t}$ جواب معادله‌ی (۱) است که به‌وضوح

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = ۰.$$

در اینجا $p(t)$ و $r(t)$ به‌ترتیب ثابت و صفر گرفته شده بودند.

در فصل اول این پایان‌نامه، همگرایی جواب معادله تأخیری (۱) وقتی p و r توابعی از t باشند را مطالعه می‌کنیم

و نشان می‌دهیم که تحت شرایط مناسب روی $p(t)$ و $r(t)$ و $\tau > ۰$ (که تأخیر τ نیز در آنجا تابعی از t است) جواب این معادله پایدار مجانبی است، یعنی به جواب بدیهی معادله‌ی همگن ($x(t) \equiv ۰$) همگراست.

در فصل دوم به بررسی شکل گسسته معادله‌ی (۱) که به‌صورت زیر است می‌پردازیم

$$x_{n+۱} - x_n + p_n x_{n-k} = r_n \tag{۲}$$

که $\{p_n\}$ و $\{r_n\}$ دنباله‌های حقیقی و $k > ۰$ یک عدد صحیح است که تأخیر معادله تفاضلی می‌باشد و نتیجه مشابه با معادله‌ی (۱) را با شرایط مشابه $p(t)$ و $r(t)$ روی دنباله‌های $\{p_n\}$ و $\{r_n\}$ به‌دست می‌آوریم. سپس یک کاربرد جالب از معادله (۲) را در بررسی همگرایی روشهای تکراری در فضای باناخ خواهیم دید.

نهایتاً در فصل (۳)، رفتار مجانبی معادله تأخیری غیرخطی

$$x'(t) + p(t)f(x(t-\tau)) = r(t) \tag{۳}$$

را مطالعه می‌کنیم. این پایان‌نامه براساس مراجع [۵، ۱۳، ۱۱، ۱۶] جمع آوری و تشریح گردیده است.

تعمیم های فراوانی از معادلات (۱)، (۲) و (۳) مطالعه و بررسی شده‌اند. به‌عنوان مثال

$$x'(t) + \sum_{i=۱}^{n} q_j(t)f(x(t-\tau_j)) = r(t)$$

که در [۱۷] مورد مطالعه قرار گرفته است. خواننده علاقه‌مند را برای یک مطالعه عمیق‌تر از میان انبوه مراجع موجود در این زمینه به کتاب‌های [۲، ۱۶] ارجاع می‌دهیم.

در مراجع [۲، ۱۶] همچنین به کاربردهای معادلات تأخیری در علوم زیستی و دینامیک جمعیت توجه شده است.

فهرست مطالب

فصل ۱

رفتار مجانبی معادلات دیفرانسیل تأخیری خطی

مقدمه: در این فصل به بررسی همگرایی جواب معادله دیفرانسیل تأخیری خطی به صفر می‌پردازیم. ثابت می‌شود با فرض شرایطی روی معادله، هر جواب به جواب بدیهی معادله‌ی همگن ($x(t) \equiv 0$) همگراست، بنابراین جواب‌ها در این حالت پایدار مجانبی هستند.

۱.۱ همگرایی جواب معادله دیفرانسیل تأخیری خطی

معادله دیفرانسیل تأخیری زیر را در نظر بگیرید

$$x'(t) + b(t)x(t-\tau(t)) = f(t), \qquad t \geq 0 \tag{1.1}$$

که

$$f \in C([0,\infty),\mathbb{R}), \qquad b,\tau \in C([0,\infty),[0,\infty))$$

و

$$\lim_{t\to\infty}[t-\tau(t)] = \infty. \tag{2.1}$$

وقتی داشته باشیم $f(t) \equiv 0$ آنگاه معادله‌ی (۱.۱) به معادله‌ی زیر تبدیل می شود (حالت همگن)

$$x'(t) + b(t)x(t-\tau(t)) = 0, \qquad t \geq 0. \tag{3.1}$$

قضیه ۱.۱.۱. *فرض کنید*

$$\int_{\circ}^{\infty} b(t)dt = \infty, \qquad b(t) > \circ \tag{۴.۱}$$

$$\lim_{t\to\infty} \sup \int_{t-\tau(t)}^{t} b(s)ds < ۱ \tag{۵.۱}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{b(t)} = \circ \tag{۶.۱}$$

$$\int_{\circ}^{\infty} f(t)dt < \infty \tag{۷.۱}$$

آنگاه وقتی $t \to \infty$ هر جواب معادله‌ی (۱.۱) به صفر میل می‌کند.

اثبات. حالت اول، فرض می کنیم $x(t)$ جواب نهایتاً یکنوا و نهایتاً مثبت باشد (برای حالت نهایتاً منفی، معادله را در یک منفی ضرب می‌کنیم و مشابه حالت نهایتاً مثبت می‌شود). قرار می‌دهیم

$$L = \lim_{t\to\infty} x(t).$$

پس $\circ \le L \le +\infty$. به‌وضوح کافی است نشان دهیم $L = \circ$.

برای این منظور فرض می‌کنیم این‌چنین نباشد (فرض خلف)، یعنی $L > \circ$.

با توجه به (۲.۱)، $T > \circ$ وجود دارد که

$$x(t-\tau(t)) \ge \min\{\frac{L}{۲}, ۱\}, \qquad t \ge T. \tag{۸.۱}$$

اکنون از دو طرف (۱.۱) از T تا t انتگرال می‌گیریم و وقتی $t \to +\infty$ داریم

$$L - x(T) + \int_{T}^{\infty} b(t)x(t-\tau(t))dt = \int_{T}^{\infty} f(t)dt.$$

پس از (۸.۱) نتیجه می‌شود که

$$L - x(T) + \min\{\frac{L}{۲}, ۱\} \int_T^{\infty} b(t)dt \leq \int_T^{\infty} f(t)dt$$

که با توجه به (۴.۱) و (۷.۱) تناقض است، پس $L = ۰$.

حال فرض می‌کنیم $x(t)$ جواب نهایتاً نوسانی باشد. آنگاه دنباله‌ی $\{t_n\}$ وجود دارد که

$$۰ < t_۱ < t_۲ < \cdots < t_n < \cdots, \qquad \lim_{n\to\infty} t_n = \infty \tag{۹.۱}$$

و $x(t)$ در نقاط دنباله‌ی $\{t_n\}$ اکسترمم نسبی دارد.

وقتی $x'(t_n) = ۰$ از (۱.۱) نتیجه می‌شود که برای $n = ۱, ۲, \cdots$ داریم:

$$x(t_n - \tau(t_n)) = \frac{f(t_n)}{b(t_n)}.$$

سپس با انتگرال‌گیری از دو طرف (۱.۱) از $t_n - \tau(t_n)$ تا t_n، به‌دست می‌آوریم

$$x(t_n) = \frac{f(t_n)}{b(t_n)} + \int_{t_n-\tau(t_n)}^{t_n} f(t)dt - \int_{t_n-\tau(t_n)}^{t_n} b(t)x(t-\tau(t))dt. \tag{۱۰.۱}$$

به‌وضوح (۷.۱) و (۲.۱) نتیجه می‌دهند

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t_n-\tau(t_n)}^{t_n} f(s)ds = ۰.$$

با توجه به این و شرایط (۵.۱) و (۶.۱)، سه عدد مثبت δ و μ و t_n وجود دارند که برای $t > t_n$، داریم

$$\left|\frac{f(t)}{b(t)} + \int_{t-\tau(t)}^{t} f(t)dt\right| < \delta \tag{۱۱.۱}$$

$$\int_{t-\tau(t)}^{t} b(s)ds < \mu \tag{۱۲.۱}$$

$$\delta + \mu < ۱ \tag{۱۳.۱}$$

وقتی (۲.۱) و (۹.۱) برقرار باشند می‌توان زیردنباله $\{t_{N_k}\}$ از $\{t_n\}$ را انتخاب کرد که برای هر عدد مثبت m وقتی $t \geq t_{N_{m+1}} - \tau(t_{N_{m+1}})$

$$t - \tau(t) \geq t_{N_k},$$

و وقتی $t \geq t_{N_m}$

$$\left| \frac{f(t)}{b(t)} + \int_{t-\tau(t)}^{t} f(t)dt \right| < \delta^m.$$

قرار می‌دهیم

$$M = \max_{0 \leq n \leq N_1} \{x(t_n)\}.$$

برای $n \geq N_k$ ادعا می‌کنیم

$$|x(t_n)| \leq (\delta + \mu)^K (M + 1). \tag{۱۴.۱}$$

در واقع از (۱۰.۱) می‌بینیم

$$\begin{aligned}
|x(t_{N_1})| &\leq \left| \frac{f(t_{N_1})}{b(t_{N_1})} + \int_{t_{N_1}-\tau(t_{N_1})}^{t_{N_1}} f(t)dt \right| + \int_{t_{N_1}-\tau(t_{N_1})}^{t_{N_1}} b(t)|x(t-\tau(t))|dt \\
&\leq \delta + M \int_{t_{N_1}-\tau(t_{N_1})}^{t_{N_1}} b(t)dt \leq \delta + M\mu \\
&\leq (\delta + \mu)(M + 1).
\end{aligned}$$

اکنون برای $N_1 \leq n \leq m$، فرض می‌کنیم

$$|x(t_n)| \leq (\delta + \mu)(M + 1).$$

با توجه به این که $\{x(t_n)\}$ دنباله ای از اکسترمم‌های نسبی است و با توجه به (۱۰.۱) ، (۶۴.۳) و (۱۲.۱) نتیجه

می‌شود که

$$\begin{aligned}|x(t_{M+1})| &\leq \left|\frac{f(t_{M+1})}{b(t_{M+1})} + \int_{t_{M+1}-\tau(t_{M+1})}^{t_{M+1}} f(t)dt\right| + \int_{t_{M+1}-\tau(t_{M+1})}^{t_{M+1}} b(t)|x(t-\tau(t))|dt \\ &\leq \delta + \max\{M+1, |x(t_{M+1})|\} \int_{t_{M+1}-\tau(t_{M+1})}^{t_{M+1}} b(t)dt \\ &\leq \delta + \max\{M+1, |x(t_{M+1})|\}\mu. \end{aligned} \tag{۱۵.۱}$$

ادعا می‌کنیم

$$|x(t_{M+1})| \leq M+1, \tag{۱۶.۱}$$

زیرا در غیر این‌صورت (فرض خلف) از (۱۵.۱) می‌بینیم

$$|x(t_{M+1})| \leq \delta + |x(t_{M+1})|\mu$$

که نتیجه می‌گیریم

$$|x(t_{M+1})| \leq \frac{\delta}{1-\mu} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\delta}{1-\mu} > M+1.$$

ملاحظه می‌شود نتیجه به‌دست آمده با (۱۳.۱) تناقض دارد، بنابراین (۱۶.۱) برقرار است و نتیجه می‌شود

$$|x_{t_{m+1}}| \leq \delta + (M+1)\mu \leq (\delta+\mu)(M+1).$$

پس با استقرا (۱۴.۱) به‌دست می‌آید ($k=1$).

حال برای $n \geq N_m$ فرض می‌کنیم

$$|x_{t_n}| \leq (\delta+\mu)^m (M+1), \tag{۱۷.۱}$$

می‌توان برای $n \geq N_{m+1}$ نشان داد

$$|x(t_n)| \leq (\delta+\mu)^{m+1}(M+1).$$

با توجه به (۱۷.۱) از (۱۰.۱) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}|x(t_n)| &\leq \left|\frac{f(t_n)}{b(t_n)} + \int_{t_n-\tau(t_n)}^{t_n} f(t)dt\right| + \int_{t_n-\tau(t_n)}^{t_n} b(t)|x(t-\tau(t))|dt \\ &\leq \delta^{m+1} + (\delta+\mu)^m(M+1)\int_{t_n-\tau(t_n)}^{t_n} b(t)dt \\ &\leq \delta^{m+1} + (\delta+\mu)^m(M+1)\mu.\end{aligned}$$

چون

$$\delta^{m+1} + (\delta+\mu)^m\mu \leq (\delta+\mu)^{m+1},$$

برای $N_{m+1} \geq n$ می‌بینیم

$$|x(t_n)| \leq (\delta+\mu)^{m+1}(M+1),$$

پس با استقرا می‌بینیم (۱۴.۱) برای همه‌ی $k = 1, 2, \cdots$ برقرار است.

به وضوح (۱۴.۱) نتیجه می‌دهد

$$\lim_{n\to\infty} x(t) = 0$$

و اثبات کامل است.

□

نتیجه ۱. *فرض کنید $x(t)$ جواب معادله (۳.۱) باشد. اگر (۴.۱) و (۵.۱) برقرار باشند، آنگاه جواب بدیهی (۳.۱) پایدار مجانبی است.*

مثال. *معادله دیفرانسیل تأخیری زیر را در نظر بگیرید*

$$x'(t) + \frac{1}{2(1+t)}x(\frac{1}{3}t(2+\sin t)) = \frac{1}{(1+t)^2}, \qquad t \geq 0 \tag{۱۸.۱}$$

قرار می‌دهیم

$$b(t) = \frac{۱}{۲(۱+t)}, \qquad \tau(t) = \frac{۱}{۳}t(۱-\sin t), \qquad f(t) = \frac{۱}{(۱+t)^{۲}}.$$

می‌بینیم

$$\int_{۰}^{\infty} b(t)dt = \int_{۰}^{\infty} \frac{۱}{۲(۱+t)} = \frac{۱}{۲}\ln(۱+t)|_{۰}^{\infty} = \infty.$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{b(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{۲}{۱+t} = ۰$$

$$\int_{۰}^{\infty} f(t)dt = \int_{۰}^{\infty} \frac{۱}{(۱+t)^{۲}} = -\frac{۱}{(۱+t)}|_{۰}^{\infty} = ۱$$

$$\int_{t-\tau(t)}^{t} b(s)ds = \int_{\frac{۱}{۳}t(۲+\sin t)}^{t} \frac{۱}{۲(۱+s)}ds \leq \int_{\frac{۱}{۳}t}^{t} \frac{۱}{۲(۱+s)}ds$$
$$= \frac{۱}{۲}(\ln(۱+t) - \ln(۱+\frac{۱}{۳}t)).$$

وقتی $t \to +\infty$

$$\frac{۱}{۲}(\ln(۱+t) - \ln(۱+\frac{۱}{۳}t)) \to \frac{۱}{۲}\ln ۳.$$

یعنی

$$\lim_{t\to+\infty} \sup \int_{t-\tau(t)}^{t} b(s)ds < ۱.$$

پس شرایط قضیه ۱.۱.۳ برقرار است و هر جواب معادله‌ی (۱۸.۱) وقتی $t \to \infty$ به صفر میل می‌کند.

فصل ۲
رفتار مجانبی معادلات تفاضلی تأخیری خطی

مقدمه: در این فصل نتایج مشابه فصل اول را برای معادله تفاضلی تأخیری خطی (شکل گسسته معادله دیفرانسیل تأخیری خطی) به‌دست می‌آوریم و سپس کاربردهایی از آن را در همگرایی نامساوی‌های تفاضلی و روش‌های تکراری در فضای باناخ برای تقریب نقطه‌ی ثابت یک نگاشت انقباضی بیان می‌کنیم.

۱.۲ همگرایی جواب معادله تفاضلی تأخیری

معادله تفاضلی تأخیری از گسسته‌سازی معادله دیفرانسیل تأخیری با توجه به

$$x'(t) = \frac{x(t+h) - x(t)}{h} + o(h)$$

به‌دست می‌آید که شکل کلی آن به‌صورت زیر است

$$x_{n+1} - x_n + p_n x_{n-k} = r_n.$$

معادله‌ی مشخصه‌ی معادله تفاضلی تأخیری در حالت $r_n \equiv 0$ و $p_n \equiv p > 0$ را با جای‌گذاری $x_n = \lambda^n$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$f(\lambda) = \lambda^{k+1} - \lambda^k + p.$$

می‌خواهیم شرط همگرایی جواب معادله تفاضلی تأخیری را با استفاده از ریشه‌ی معادله‌ی مشخصه به‌دست آوریم. جواب $x_n = \lambda^n$ وقتی $n \to \infty$، به صفر میل می‌کند اگر و فقط اگر $|\lambda| < 1$. ریشه‌های $\lambda = 0, \frac{k}{k+1}$

$f'(\lambda) = ۰$ است.

$$f''(\frac{k}{k+۱}) = \frac{k^{k-۱}}{(k+۱)^{k-۲}} > ۰.$$

بنابراین

$$\lambda_{\min} = \frac{k}{k+۱} \in (۰, ۱)$$

نقطه‌ی می‌نیمم تابع f است. به‌راحتی می‌بینیم

$$f(۰), f(۱), f(-۱) = p > ۰.$$

اگر

$$۰ < p < \frac{k^k}{(k+۱)^{k+۱}},$$

آنگاه

$$f(\lambda_{\min}) = f(\frac{k}{k+۱}) = -\frac{k^k}{(k+۱)^{k+۱}} + p < ۰.$$

بنابر قضیه‌ی مقدار میانی، f حداقل دو ریشه در بازه $(۰, ۱)$ دارد. بنابراین با شرط اخیر روی p جواب x_n از معادله‌ی (۱.۲) وقتی که $n \to \infty$ به صفر میل می‌کند. حال می‌خواهیم شرایط کافی برای همگرایی جواب معادله تفاضلی تأخیری در حالت غیرهمگن با دنباله‌ی p_n غیر ثابت را مطالعه کنیم.

معادله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$x_{n+۱} - x_n + p_n x_{n-k} = r_n, \qquad n = ۰, ۱, \cdots \tag{۱.۲}$$

که $\{p_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت و k عدد صحیح نامنفی و $\{r_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی است.

قضیه‌ی زیر همگرایی معادله‌ی (۱.۲) را با شرایط مناسب روی دنباله‌های $\{p_n\}$ و $\{r_n\}$ ثابت می‌کند.

قضیه ۱.۱.۲. *فرض کنید*

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sum_{i=n-k}^{n} p_i < ۱, \qquad \sum_{n=۰}^{\infty} p_n = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{p_n} = ۰ \tag{۲.۲}$$

در این صورت هر جواب $\{x_n\}$ از معادله‌ی (۱.۲) وقتی $n \to \infty$ به صفر میل می‌کند.

اثبات. اول فرض می‌کنیم جواب نهایتاً یکنوا و نهایتاً مثبت است (در حالتی که جواب نهایتاً منفی باشد، با ضرب طرفین (۱.۲) در یک منفی به حالتی مشابه حالت نهایتاً مثبت می‌رسیم).

قرار می‌دهیم

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L$$

که $۰ \le L \le \infty$. کافی است نشان دهیم $L = ۰$. به برهان خلف فرض می‌کنیم $L > ۰$.

قرار می‌دهیم

$$M = \min\{\frac{L}{۲}, ۱\} > ۰.$$

عدد مثبت Nوجود دارد به‌طوری‌که برای هر $n \ge N$،

$$x_{n-k} \ge M, \qquad \frac{r_n}{p_n} < \frac{M}{۲}$$

اکنون مشاهده می‌کنیم

$$\begin{aligned} x_{n+۱} - x_n &= p_n(\frac{r_n}{p_n} - x_{n-k}) \\ &\le p_n(\frac{M}{۲} - M) \\ &= -\frac{۱}{۲} M p_n \end{aligned} \tag{۳.۲}$$

با جمع کردن (۳.۲) از N تا m و حد گرفتن وقتی $m \to \infty$ داریم

$$\sum_{n=N}^{\infty} (x_{n+۱} - x_n) \le -\frac{۱}{۲} M \sum_{n=N}^{\infty} p_n$$

$$L - x_N \le -\frac{۱}{۲} M \sum_{n=N}^{\infty} p_n = -\infty$$

که تناقض است. پس $L = 0$.

حال فرض می‌کنیم $\{x_n\}$ جواب نوسانی باشد. زیردنباله‌ی $\{x_{n_m}\}$ از $\{x_n\}$ وجود دارد که به ازای هر $m = 0, 1, \cdots$ در شرط زیر صدق می‌کند.

اگر $x_{n_m} \geq 0$، آنگاه

$$x_{n_m} \geq x_{n_m - 1}, \qquad x_{n_m} \geq x_{n_m + 1} \tag{۴.۲}$$

اگر $x_{n_m} < 0$، آنگاه

$$x_{n_m} \leq x_{n_m - 1}, \qquad x_{n_m} \leq x_{n_m + 1} \tag{۵.۲}$$

حال نشان می‌دهیم وقتی $n \to \infty$، $x_n \to 0$. برای اثبات کافی است نشان دهیم وقتی $m \to \infty$، $x_{n_m} \to 0$. برای این منظور، از معادله‌ی (۱.۲) داریم

$$x_{n_m} - x_{n_m - 1} + p_{n_m - 1} x_{n_m - 1 - k} = r_{n_m - 1}$$

با به‌کارگیری (۴.۲) و (۵.۲) برای هر $m = 0, 1, \cdots$، داریم

اگر $x_{n_m} \geq 0$، آنگاه

$$x_{n_m - 1 - k} \leq \frac{r_{n_m - 1}}{p_{n_m - 1}} \tag{۶.۲}$$

و اگر $x_{n_m} < 0$، آنگاه

$$x_{n_m - 1 - k} \geq \frac{r_{n_m - 1}}{p_{n_m - 1}}. \tag{۷.۲}$$

از (۶.۲) و (۷.۲) داریم

$$|x_{n_m - 1 - k}| \leq \frac{r_{n_m - 1}}{p_{n_m - 1}}.$$

با مجموع گرفتن از دو طرف معادله‌ی (۱.۲) از $n_m - 1 - k$ تا $n_m - 1$ به‌دست می‌آوریم

$$x_{n_m} = x_{n_m - 1 - k} + \sum_{i = n_m - 1 - k}^{n_m - 1} r_i - \sum_{i = n_m - 1 - k}^{n_m - 1} p_i x_{i-k}.$$

و با استفاده از (۶.۲) و (۷.۲) به‌دست می‌آوریم

$$|x_{n_m}| \leq \left|\frac{r_{n_m-1}}{p_{n_m-1}} + \sum_{i=n_m-1-k}^{n_m-1} r_i\right| + \sum_{i=n_m-1-k}^{n_m-1} p_i|x_{i-k}|. \tag{۸.۲}$$

برای $m = 0, 1, \cdots$ با توجه به (۲.۲) می‌توان عدد مثبت μ و عدد طبیعی مثبت n_0 را طوری انتخاب کرد که برای $n \geq n_0$

$$\sum_{i=n-k}^{n} p_i < \mu, \qquad \mu < 1.$$

و به‌وضوح از (۲.۲) نتیجه می‌شود وقتی $n \to \infty$،

$$r_n \to 0, \qquad \frac{r_n}{p_n} + \sum_{i=n-k}^{n} r_i \to 0.$$

می‌توان $\delta > 0$ را طوری انتخاب کرد که

$$\delta + \mu < 1 \tag{۹.۲}$$

و زیردنباله‌ی $\{n_{m_s}\}$ از $\{n_m\}$ که برای هر $s = 0, 1, \cdots$،

$$n_{m_0} \geq n_0, \qquad n_{m_{s+1}} - n_{m_s} \geq 1 + 2k \tag{۱۰.۲}$$

و برای $n \geq n_{ms} - 1$

$$\left|\frac{r_n}{p_n} + \sum_{i=n-k}^{n} r_i\right| < \delta^s. \tag{۱۱.۲}$$

قرار می‌دهیم

$$B = \max_{n_{m_0} \leq n_m \leq n_{m_1}} \{|x_{n_m}|\}. \tag{۱۲.۲}$$

ادعا می‌کنیم برای هر $s = 0, 1, \cdots$،

$$|x_{n_m}| \leq (\delta + \mu)^s (B + 1), \qquad \forall n_m \geq n_{m_s}. \tag{۱۳.۲}$$