بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده علوم

بخش ریاضی و کامپیوتر

پایان‌نامه

برای تکمیل دوره کارشناسی ارشد

موضوع

مقدمات تئوری آشوب و مجموعه‌های ω - حد

مؤلف

احمد شجاع

استاد راهنما

جناب آقای دکتر محمود محسنی مقدم

اردیبهشت ۱۳۷۳

بسمه تعالی

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد

بــه

بخش ریاضی

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی‌شود.

دانشجو : احمدشجاع

استاد راهنما: آقای دکترمحمودمحسنی مقدم

داور ۱ : آقای دکترغلامرضا جهانشاهلو

داور ۲ : آقای دکترمهدی رجبعلی پور

تقدیم به

پدر و مادر

و

همسرم

بنام خدا

با سپاس بدرگاه خداوند منان که به من سعادت کوشش در راه کسب علم و دانش عطا فرموده و امیدوارم بتوانم آنچه را که فرا گرفته‌ام در راه خیر و صلاح جامعه اسلامی بکار گیرم. در ابتدا بر خود واجب می‌دانم که از زحمات بیدریغ استاد ارجمند جناب آقای دکتر محمود محسنی مقدم که با صبر و متانت فراوان در ارائه پایان نامه، اینجانب را راهنمائی کردند و در این راه قبول زحمت فرمودند نهایت تشکر و قدردانی را بنمایم. همچنین از آقایان دکتر غلامرضا جهانشاهلو و دکتر مهدی رجبعلی‌پور که زحمت مطالعه و تصحیح این پایان نامه را بر خود هموار کرده و در جلسه دفاعیه اینجانب شرکت نموده‌اند سپاسگزاری می نمایم.
ضمناً از کلیه اساتید محترم بخش ریاضی دانشگاه شهید باهنر کرمان که همواره راهنمای اینجانب در این دوره بوده‌اند، صمیمانه تشکر می نمایم. همچنین از مرکز بین‌المللی تکنولوژی پیشرفته و علوم محیطی که از لحاظ مالی اینجانب را یاری نموده‌اند سپاسگزارم.

در خاتمه از کلیه اعضای خانواده‌ام که در راه کسب علم و دانش همواره مشوق و راهنمای من بوده‌اند تشکر و قدردانی می نمایم.

احمد شجاع

اردیبهشت ۱۳۷۳

چکیده

در سرتاسر این رساله فرض براین است که f یک تابع پیوسته و I بازهٔ بستهٔ $[0, 1]$ می‌باشد. طول یک بازه مانند V را با $|V|$ نشان میدهیم. اگر x یک عضو از دامنهٔ تابع f باشد، مدار x را بصورت $\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ نشان می‌دهیم که در آن $f^0(x) = x$ و $f^1(x) = f(x)$ و $f^2(x) = f(f(x))$ و ... و $f^n(x) = f(f(...(f(x))....))$. همچنین فرض بر این است که $\omega_0 = N \cup \{0\}$ که N مجموعهٔ اعداد طبیعی می‌باشد.

این رساله در سه فصل تنظیم شده است. در فصل اول به مقدمات تئوری آشوب می‌پردازیم. موضوع آشوب در دستگاههای دینامیکی یکی از مهمترین مسائل ریاضی محض و کاربردی و شاخه‌های مختلف علوم طبیعی است. هدف دستگاه دینامیکی، مجموعهٔ حالات ممکن یک پدیده همراه با یک تحول است که گذر از یک حالت به حالت دیگر را توصیف می‌کند. اگر حالت دستگاه در زمان معینی داده شده باشد، این قانون حالتهای دستگاه را در زمانهای بعدی مشخص می‌کند.

بسیاری از فرآیندهای علوم طبیعی بصورت معادلات دیفرانسیل یا معادلات تفاضل شرح داده می‌شوند. ساده‌ترین حالت ریاضی وقتی اتفاق می‌افتد که یک پدیده، بوسیلهٔ یک تابع شرح داده شود. برای مثال اگر حالت یک پدیده در زمان nام، x_n باشد و در زمان $n+1$ام ، x_{n+1} باشد و تابع پیوستهٔ f موجود باشد بطوریکه $x_{n+1} = f(x_n)$، در این صورت گوئیم پدیدهٔ مورد نظر توسط تابع f شرح داده شده است یا بطور واضح‌تر، تابع f یک مدل برای سنجش پدیده است. یک پدیده می‌تواند رشد جمعیت یک جامعه یا طول عمر یک ماده رادیواکتیو، یا اندازهٔ انرژی جنبشی در یک مدل گرمایی یا... باشد.

در مدار x_0 (اندازه پدیده در زمان صفر)، اگر مقادیری که از تکرار تابع f حاصل می‌شود، تغییرات نامنظمی داشته باشد، یعنی از یک مقدار بسیار کوچک به یک مقدار بسیار بزرگ تغییر کند و پس از یک دوره عکس آن تکرار شود، در این صورت یک بی‌نظمی در دستگاه بوجود میآید که به آن دستگاه دینامیکی آشوبی اطلاق می‌شود. تابعی که مجموعهٔ حالات ممکن پدیده را در چنین دستگاهی مشخص می‌کند، یک تابع آشوبی است.

در ادامه این فصل،ساختار مجموعه‌های کانتور روی بازهٔ I و رفتار دینامیکی بعضی توابعی که از I بتوی I نگاشته می‌شوند را مورد بررسی قرار داده و سپس رفتار آشوبی توابع را بررسی می‌کنیم.

در فصل دوّم ساختار مجموعه‌های ω - حد برای توابع پیوسته را تشریح می‌کنیم. در این فصل ابتدا ساختار کلی مجموعهٔ ω - خد را شرح می‌دهیم، فرض کنیم $f: E \to E$ پیوسته و E یک مجموعهٔ فشرده باشد و $\omega \subseteq E$ و $f(\omega) = \omega$، اگر $x \in E$ وجود داشته باشد بطوریکه ω مجموعهٔ نقاط حدی زیر دنباله‌ای $\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ باشد، آنگاه ω یک مجموعهٔ ω - حد برای تابع f می‌باشد. همچنین با ارائه چند مثال نشان می‌دهیم که اگر K یک مجموعهٔ کانتور باشد و $K \subseteq I$ و f یک تابع آشوبی مولد مجموعهٔ کانتور K باشد K یک مجموعهٔ ω - حد برای تابع f خواهد بود. سرانجام ثابت خواهیم کرد که اگر $M \subseteq I$ یک مجموعهٔ هیچ جا چگال بسته باشد در اینصورت $f: I \to I$ وجود دارد بطوریکه $f(M) = M$ و M یک مجموعهٔ ω - حد برای f است.

در فصل سوم رفتارهای دینامیکی توابعی که از نظر تئوری در فصل دوم بررسی کرده‌ایم را با ارائه نمودار آنها تشریح می‌کنیم.

عنوان	فهرست مطالب	صفحه

فصل اول

مقدمات تئوری آشوب

۱-۱- مقدمه

تئوری آشوب برای اولین‌بار توسط یک فیزیکدان و جوشناس برجسته‌ای بنام ای-ان- لورنز[1] در سال ۱۹۶۳ مطرح گردیده است، وی در سال ۱۹۶۴ در [8] رفتار آشوبی یک مدل را که برای یافتن اندازهٔ انرژی جنبشی امواج در سطح آب بوده است را بررسی کرد. تئوری آشوب برای اولین‌بار در سال ۱۹۷۵ توسط تی- وای- لی[2] و جی - یورک[3] در ریاضیات مطرح گردیده است.

کاربرد تئوری آشوب در زیست‌شناسی، فیزیک و شیمی بسیار زیاد می‌باشد. هدف اصلی ما در این فصل بررسی رفتارهای دینامیکی توابع پیوسته‌ای که روی یک بازه تعریف می‌شوند و خوشرفتار[4] نیستند، می‌باشد. دامنهٔ این موضوع در بسیاری از شاخه‌های ریاضی ازجمله نظریه ارگودیک[5] ، معادلات دیزانسیل و آنالیز مختلط موثر است.

در بخش ۱-۲، ساختار مجموعه‌های کانتور را مورد بررسی قرار می‌دهیم. مجموعه‌های کانتور، مجموعه‌های ناشمارا[6] و کامل[7] می‌باشند که دارای هیچ نقطهٔ درونی نیستند. در این بخش ابتدا به تشریح مجموعهٔ کانتور معمولی[8] (یک سوم میانی)[9] می‌پردازیم سپس توضیح میدهیم که چگونه میتوانیم با استفاده از یک تابع پیوسته که روی

1 - E - N- Lorenz
2 - T. Y. Li
3 - J - York
4 - well - behaved
5 - Ergodic
6 - Uncountable
7 - Perfect
8 - Ordinarg
9 - Third - middle

I تعریف می‌شود مجموعهٔ کانتور $K \subseteq I$ را تولید نماییم. همچنین در این بخش به تشریح حساب[1] پایهٔ ۳[2] اعداد در [0,1] می‌پردازیم و ثابت خواهیم کرد که هر عضو از مجموعهٔ کانتور معمولی در پایهٔ ۳ فقط شامل 2,0 می‌باشد. در بخش ۱-۳، به بررسی رفتار دینامیکی توابع زیر می‌پردازیم.

$$f(x)=\begin{cases} 3x & ; x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 1 & ; x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ 3(1-x) & ; x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases} \qquad (۱-۱-۱)$$

و $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ و $f(x) = 1 - 3d(x, K)$ که در آن E و $k = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}E$ مجموعهٔ کانتور معمولی است.

در بخش ۱-۴، مزدوجهای توپولوژیکی را شرح می‌دهیم و ثابت می‌کنیم که اگر دو تابع f و g مزدوج توپولوژیکی باشند دارای ساختار دینامیکی مشابه می‌باشند.

در بخش ۱-۵، به تشریح رفتارهای آشوبی توابع می‌پردازیم. در کتابها و مقالات متفاوت تعریفهای زیادی از توابع آشوبی ارائه شده است، ابتدا تعریف دونی[3] را بیان می‌کنیم که در [4] عنوان شده است و ثابت می‌کنیم که تابع (۱-۱-۱) روی مجموعهٔ کانتور E آشوبی است. سپس با ارائه تعریف دیگری از تابع آشوبی که بروکنر[4] و هیو[5] در [3] بیان

---

1 - Arithmatic
2 - Ternary
3 - L.R. Devaney
4 - A. M. Bruckner

کرده‌اند می پردازیم، ثابت می‌کنیم که اگر $f: J \to J$ پیوسته و $a \in J$ موجود باشد بطوریکه $S \subseteq J$ و برای هر $x,y \in S$ با $x \neq y$، $\lim \sup | f^n(x) - f^n(y) | > 0$ و $\lim \inf |f^n(x) - f^n(y)| = 0$. همچنین اگر $p \in J$ یک نقطهٔ پریودیک باشد و $x \in S$، $\lim \sup | f^n (x) - f^n (p) | > 0$. در چنین حالتی باتوجه به تعریف بروکنرو هیو، نتیجه خواهیم گرفت که f یک تابع آشوبی است. سرانجام با ارائه مثال ۱-۵-۳، یکی از ساده‌ترین کاربرد توابع آشوبی را بررسی خواهیم کرد.

۱-۲- ساختار[۶] مجموعه کانتور[۷]

در بسیاری از کتابهای آنالیز ساختار مجموعهٔ کانتور معمولی[۸] (مجموعهٔ کانتور یک سوم میانی) شرح داده شده، ساختار این مجموعه چنین است:

$E_0 = [0, 1]$

$E_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$

$E_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$

.

.

.

5 - T. Hu
6 - Structure
7 - Cantor
8 - Ordinary

$$E_n = [0, \frac{1}{3^n}] \cup [\frac{2}{3^n}, \frac{3}{3^n}] \cup .... \cup [\frac{3^n - 3}{3^n}, \frac{3^n - 2}{3^n}] \cup [\frac{3^n - 1}{3^n}, 1]$$

برای هر n و برای بعضی از i ها که $1 \leq i \leq 3^n$ قرار می‌دهیم $A^m{}_n = [\frac{i-1}{3^n}, \frac{i}{3^n}]$، همچنین $E_n = \bigcup^{2^n}{}_{m=1} A^m{}_n$. بنابراین $E = \cap^{\infty}{}_{n=0} E_n \subseteq [0, 1]$ مجموعهٔ کانتور معمولی می‌باشد.

چون برای هر n و هر m و k، که $m \neq k$، $A^m{}_n \cap A^k{}_n = \phi$، در این صورت هر E_n بسته است. لهذا E یک مجموعهٔ بسته است.

حال فرض کنیم $x \in E$، اگر x یک نقطهٔ ایزوله باشد در اینصورت $n > 0$ ی وجود دارد بطوریکه برای هر $y \in E$، $|x - y| \geq 3^{-n}$. ازطرفی $j \in N$ ی وجود دارد بطوریکه $1 \leq j \leq 3^n$ و $x \in [\frac{j-1}{3^n}, \frac{j}{3^n}] = A^m{}_n$، همچنین $A^m{}_n$ شامل هیچ عضو دیگر از E نیست، درحالیکه برای بعضی از k، که $1 \leq k \leq 2^{n+1}$، $A^k{}_{n+1} = [\frac{3i-1}{3^{n+1}}, \frac{i}{3^n}]$ و $A^{k-1}{}_{n+1} = [\frac{i-1}{3^n}, \frac{3i-2}{3^{n+1}}]$، $A^k{}_{n+1}$ و $A^{k-1}{}_{n+1}$ هرکدام، دارای حداقل یک عضو از E می‌باشند. همچنین $A^{k-1}{}_{n+1} \cup A^k{}_{n+1} \subseteq A^m{}_n$، لهذا تناقض با این است که $A^m{}_n$ شامل هیچ عضو از E، غیر از x نیست. پس x یک نقطهٔ حدی E می‌باشد.

چون $0 \leftarrow \frac{1}{3^n} = |A^m{}_n|$، بنابراین $A^m{}_n \rightarrow \{a_m\}$، لهذا E شامل هیچ نقطهٔ درونی نیست، پس E شامل هیچ بازه نیست.

در اینجا ابتدا به تعریف مجموعهٔ کانتور، درحالت کلی می‌پردازیم و سپس به تشریح

ساختار مجموعهٔ کانتور $\Lambda \subseteq [0, 1]$، که توسط تابع $f_\mu (x) = \mu x (1 - x)$ ساخته می‌شود می‌پردازیم.

تعریف ۱-۲-۱-

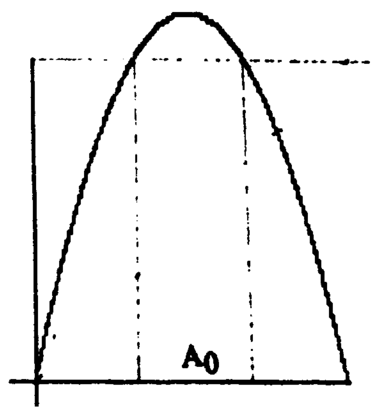
Λ یک مجموعهٔ کانتور است هرگاه واجد سه شرط زیر باشد.

۱- Λ بسته باشد.

۲- Λ شامل هیچ بازه‌ای نباشد.

۳- Λ کامل[1] باشد، یعنی هر نقطهٔ آن یک نقطهٔ حدی باشد.

حال تابع $f_\mu : I \to I$ با $f_\mu (x) = \mu x (1 - x)$، را در نظر می‌گیریم، اگر $\mu > 4$ به ازای بعضی از نقاط $x \in I$، $f_\mu (x) \notin I$ [شکل (۱-۲-۱) زیر را ببینید].



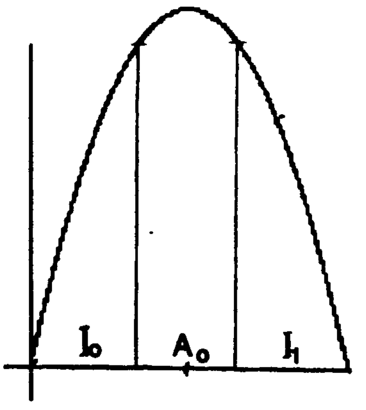
شکل(۱-۲-۱) نمودار f_μ

$\mu=4.5$

$f(A_0) \not\subset I$

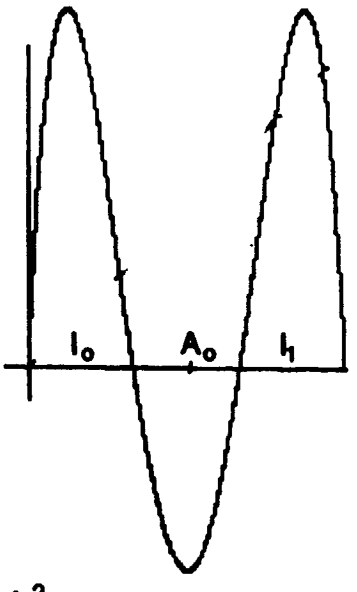
1 - Perfect

قرار می‌دهیم $A_0 = \{x \in I ; f_\mu(x) \notin I\}$. اگر $x \in A_0$، آنگاه $f_\mu(x) > 1$ و $f_\mu^2(x) < 0$، سرانجام $f_\mu^n(x) \to -\infty$، [شکل (۱-۲-۲- الف و ۱-۲-۲- ب) زیر را ببینید].



شکل(۱-۲-۲-الف) نمودار f_μ

$\mu=4.5$



شکل(۱-۲-ب) نمودار f_μ^2

$\mu=4.5$

A_0 یک بازهٔ باز است که $\frac{1}{2}$ در مرکز آن قرار دارد و $I - A_0$ یک مجموعهٔ بسته‌ای است که از اجتماع دو مجموعهٔ بستهٔ I_0 و I_1 بوجود می‌آید. فرض می‌کنیم I_0 در طرف چپ $\frac{1}{2}$ و I_1 در طرف راست $\frac{1}{2}$ باشد. حال قرار می‌دهیم.

$$A_1 = \{x \in I ; f_\mu(x) \in A_0\}$$

$$A_2 = \{x \in I ; f_\mu^2(x) \in A_0\}$$

.

.