وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه شهید مدنی آذربایجان
دانشکده علوم پایه

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض

ابررویه‌های حقیقی در گرسمن‌های دو بعدی مختلط با عملگر شکل برگشتنی

استاد راهنما

دکتر اسمعیل عابدی

استاد مشاور

دکتر قربانعلی حقیقت دوست

پژوهشگر

فاطمه گیلک حکیم‌آبادی

دی‌ماه ۱۳۹۳

تبریز-ایران

بسم اللّه الرّحمن الرّحيم

تقدیم به

پدر و مادر عزیزتر از جانم

که از نگاه‌شان صلابت
از رفتارشان محبت
و از صبرشان ایستادگی را آموختم

سپاسگزاری

سپاس خدایی را سزاست که از من بی‌نیاز است اما با من دوستی می‌کند و به من محبت می‌ورزد و او گرامی‌ام می‌دارد و دست نوازش بر سرم می‌کشد.

از خانواده‌ی عزیز و فداکارم که آرامش روحی و آسایش فکری برایم فراهم نمودند تا با حمایت‌های همه جانبه در محیطی مطلوب، مراتب تحصیلی و نیز پایان نامه درسی را به نحو احسن به اتمام برسانم؛ سپاسگزاری می‌نمایم.

تشکر و سپاس از استاد راهنمای ارجمندم، جناب آقای دکتر اسمعیل عابدی که از محضر پر فیض‌شان، بهره برده‌ام.

تقدیر و تشکر از زحمات جناب آقای دکتر قربانعلی حقیقت دوست که افتخار بهره‌مندی از نظرات و مشاوره‌ی ایشان را در انجام این پایان‌نامه داشته‌ام.

تشکر و سپاس از جناب آقای دکتر محمد ایلمکچی که زحمت نظارت و داوری این پایان‌نامه را تقبل فرموده‌اند.

فاطمه گیلک حکیم‌آبادی

دی ماه ۱۳۹۳

فهرست مطالب

چکیده

در این پایان نامه مفهومی از ابررویه‌های برگشتنی در گرسمن‌های دو بعدی مختلط $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ داده می‌شود و عدم وجود ابررویه‌ی هاف در $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ با عملگر شکل برگشتنی نشان داده می‌شود. قضیه اساسی در این پایان نامه از این قرار است که هیچ ابررویه‌ی هاف برگشتنی در گرسمن‌های دو بعدی مختلط $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ ، $m \geq 3$ وجود ندارد. با بررسی دو حالت به اثبات این قضیه، به عنوان مسأله‌ی اصلی این پایان نامه آمده است دست پیدا خواهیم کرد.

کلید واژه‌ها: ابررویه‌های حقیقی، گرسمن‌های دو بعدی مختلط، ابررویه‌ی هاف، عملگر شکل برگشتنی، ابررویه‌های برگشتنی.

پیشگفتار

کوبایاشی و نومیزو [۷] در سال ۱۹۶۳ در نیویورک و لندن، ونگ [۱۷] در سال ۱۹۶۱ نشان دادند که میدان تانسوری از نوع (r,s) روی یک خمینه‌ی دیفرانسیل پذیر M با یک التصاق خطی خوشتعریف بوده است. یک میدان تانسوری غیرصفر k از نوع (r,s) روی M، برگشتنی گفته می‌شود اگر ۱−فرمی ω وجود داشته باشد به طوریکه $\nabla k = k \otimes \omega$. به هر حال، برخی مفاهیم هندسی از یک خمینه‌ی M با تانسور خمیدگی برگشتنی k در جملاتی از گروه هولونومی قرار دارد.
سیسیل و ریان [۴] در سال ۱۹۸۲ مفهومی از ابررویه‌ی هاف در فضای تصویری مختلط $P^n(\mathbb{C})$ را بررسی کردند و همچنین برندت [۱] در سال ۱۹۹۱ پایایی توزیع $\mathfrak{D}^{\perp}$ برای ابررویه در فضا فرم‌های کواترنیونی را بررسی کرد. ساه [۹] در سال ۱۹۹۶ در زمینه‌ی ابررویه‌های حقیقی در فضا فرم‌های مختلط نسبت به تانسورهای اساسی نوع دوم $\eta-$برگشتنی مورد بررسی قرار داد. لذا توضیح هندسی از عملگر شکل برگشتنی A به صورت $[\nabla_X A, A] = \omega(X)[A,A] = 0$ داده شد.
هامادا در [۵] و [۶] در سال‌های ۱۹۹۶ و ۱۹۹۹ یک مفهومی از تانسور برگشتنی به ترتیب به توی یک عملگر شکل یا تانسور ریچی برای ابررویه‌های حقیقی M در فضای تصویری مختلط $P^n(\mathbb{C})$ به کار گرفته است. به طوریکه $\nabla S = \omega \otimes S$ برای ۱−فرمی مشخص ω تعریف شده روی M.
برندت و ساه [۹] در سال ۱۹۹۹ ابررویه‌های حقیقی در گرسمن‌های دو بعدی مختلط را مورد مطالعه قرار دادند.
ساه [۱۲] در سال ۲۰۰۶، نشان داد ابررویه‌ی حقیقی برگشتنی در $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$، $m \geq 3$ با شرط عملگر شکل $\mathfrak{D}$ یا $\mathfrak{D}^{\perp}$ پایا وجود ندارد.

فصل ۱
تعاریف و مفاهیم

۱.۱ مقدمه

هدف از بیان این فصل، یادآوری تعاریف و مفاهیمی است که مطالعه کرده‌ایم و در طول فصل‌های بعدی به آن‌ها نیاز داریم. این فصل شامل سه بخش مجزاست از جمله: هندسه ریمانی، تانسورها و هندسه مربوط به ساختار تقریباً مختلط.

تعریف ۱.۱. فرض کنید $V_1, \ldots, V_s, W$ مدول‌هایی روی حلقه‌ی K باشند در این صورت $V_1 \times \ldots \times V_s$ نیز یک مدول روی حلقه‌ی K خواهد بود. $A : V_1 \times \ldots \times V_s \to W$ را چند خطی گویند هر گاه نسبت به تمام متغیرها خطی باشد یعنی

$$A(v_1, \ldots, \lambda v_i + \mu v_i, v_{i+1}, \ldots, v_s) = \lambda A(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_s) + \mu A(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_s)$$

که $\lambda, \mu \in K$ برای $1 \leq i \leq s$.

تعریف ۲.۱. فرض کنید V یک $K-$مدول باشد در این صورت V^* که مجموعه‌ی همه‌ی توابع $K-$خطی از V به K می‌باشد، با عمل جمع توابع و ضرب توسط عناصر حلقه‌ی K به یک $K-$مدول تبدیل می‌شود، که مدول دوگان V نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۱. فرض کنید M یک خمینه باشد. مجموعه‌ی نگاشت‌های حقیقی C^∞ روی M را با $\mathfrak{F}(M)$ و مجموعه‌ی میدان‌های برداری C^∞ روی M را با $\chi(M)$ نمایش می‌دهند. هر یک از این دو مجموعه تحت عمل جمع نگاشت‌ها یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است. ضرب نگاشت‌ها

در $\mathfrak{F}(M)$، این مجموعه را به یک حلقه تبدیل می‌کند. برای $X \in \chi(M)$ و $f \in \mathfrak{F}(M)$ میدان برداری fX به ازای هر $p \in M$ به صورت $fX(p) = f(p)X(p)$ تعریف می‌شود. بنابراین $\chi(M)$ یک مدول روی $\mathfrak{F}(M)$ است.

تعریف ۴.۱. به ازای اعداد صحیح $r \geqslant ۰$ و $s \geqslant ۰$ که هر دو هم زمان صفر نیستند، تابع چند خطی $A : (V^*)^r \times V^s \to K$ را یک تانسور از نوع (r,s) روی V گویند و با نماد $\mathfrak{T}_s^r(V)$ نمایش می‌دهند. تانسور از نوع $(۰,۰)$ را یک عنصر از حلقه‌ی K می‌گیرند. یک میدان تانسوری A روی خمینه‌ی M عبارتست از یک تانسور روی $\mathfrak{F}(M)$–مدول $\chi(M)$.

تعریف ۵.۱. فرض کنید $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ و $B \in \mathfrak{T}_{s'}^{r'}(M)$ در این صورت تابع
$A \otimes B : \chi^*(M)^{r+r'} \times \chi(M)^{s+s'} \to \mathfrak{F}(M)$ را حاصلضرب تانسورها نامیده که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned}&(A\otimes B)(\theta^۱,\dots,\theta^{r+r'},X_۱,\dots,X_{s+s'})\\&=A(\theta^۱,\dots,\theta^r,X_۱,\dots,X_s)B(\theta^{r+۱},\dots,\theta^{r+r'},X_۱,\dots,X_{s+s'})\end{aligned}$$

که یک تانسور از نوع $(r+r', s+s')$ است.

لم ۱.۱. [۱] *تابع $\mathfrak{F}(M)$–خطی منحصربفرد $C : \mathfrak{T}_۱^۱(M) \to \mathfrak{F}(M)$ که انقباض $(۱,۱)$ نامیده می‌شود، وجود دارد به طوریکه به ازای هر $X \in \chi(M)$ و $\theta \in \chi^*(M)$ رابطه $C(X\otimes\theta) = \theta X$ برقرار است.*

تعریف ۶.۱. فرض کنیم $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ و $۱ \leq i \leq r$ و $۱ \leq j \leq s$ باشد. ۱–فرم‌های $\theta^۱,\dots,\theta^{r-۱}$ و میدان‌های برداری $X_۱,\dots,X_{s-۱}$ ثابت درنظر گرفته می‌شود. در این صورت تابع

$$(\theta, X) \to A(\theta^۱,\dots,\theta,\dots,\theta^{r-۱},X_۱,\dots,X,\dots,X_{s-۱})$$

یک $(۱,۱)$ تانسور است که در آن X، i–امین مؤلفه هموردا و θ، j–امین مؤلفه پادوردا است و آن را می‌توان به صورت $A(\theta^۱,\dots,.,\dots,\theta^{r-۱},X_۱,\dots,.,\dots,X_{s-۱})$ نمایش داد. با تأثیر دادن انقباض $(۱,۱)$ در این تانسور یک تابع حقیقی مقدار تولید می‌کند که به صورت
$(C_j^iA)(\theta^۱,\dots,\dots,\theta^{r-۱},X_۱,\dots,\dots,X_{s-۱})$ نمایش می‌دهند. C_j^iA، $\mathfrak{F}(M)$–چند خطی است لذا یک تانسور از نوع $(r-۱, s-۱)$ است که انقباض A روی i,j نامیده می‌شود.

تعریف ۷.۱. فرض کنید $\phi : M \to N$ یک نگاشت هموار باشد. اگر $A \in \mathfrak{T}_s^{\circ}(N)$، $s \geq 1$، فرض کنید

$$(\phi^* A)(v_1, \ldots, v_s) = A(d\phi v_1, \ldots, d\phi v_s)$$

برای همه‌ی $v_i \in T_p(M)$ و $p \in M$. آنگاه $\phi^* A$ برکشنده A بوسیله‌ی ϕ نامیده می‌شود.

تعریف ۸.۱. مشتق تانسوری ∇ روی خمینه‌ی هموار M عبارتست از مجموعه‌ای از توابع $\mathbb{R}-$خطی مانند

$$\nabla = \nabla_s^r : \mathfrak{T}_s^r(M) \to \mathfrak{T}_s^r(M) \qquad (r \geq 0, s \geq 0)$$

به طوریکه به ازای هر دو تانسور A و B و انقباض C وجود داشته باشد:

$$\nabla(A \otimes B) = \nabla A \otimes B + A \otimes \nabla B$$

$$\nabla(CA) = C(\nabla A)$$

لم ۲.۱. [۱] *فرض کنید ∇ یک مشتق تانسوری روی M باشد. اگر $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ آنگاه*

$$\begin{aligned}\nabla(A(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, X_s)) = {} & (\nabla A)(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, X_s) \\ & + \sum_{i=1}^{r} A(\theta^1, \cdots, \nabla\theta^i, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, X_s) \\ & + \sum_{j=1}^{s} A(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, \nabla X_j, \cdots, X_s)\end{aligned}$$

که این رابطه را قاعده‌ی ضرب می‌نامند.

تعریف ۹.۱. فرض کنید M یک خمینه‌ی ریمانی هموار و V یک میدان برداری روی M باشد، مشتق تانسوری L_V به ازای هر میدان برداری $X \in \chi(M)$ و تابع هموار $f \in \mathfrak{T}(M)$ روی M به صورت

$$L_V X = [V, X]$$

$$L_V f = V f$$

تعریف می‌شود که L_V را مشتق لی نسبت به میدان برداری V می‌نامیم.

تعریف ۱۰.۱. نگاشت $b : V \times V \to \mathbb{R}$ را فرم دو خطی متقارن روی فضای برداری V گویند هرگاه $\mathbb{R}-$دو خطی باشد و به ازای هر $v, w \in V$ ، $b(v, w) = b(w, v)$ باشد.

تعریف ۱۱.۱. یک فرم دو خطی متقارن b روی V

(۱) مثبت (منفی) معین است هرگاه به ازای هر $v \neq 0$، $b(v, v) > 0$ ($b(v, v) < 0$) باشد.

(۲) نیمه معین مثبت است هرگاه برا همه ی $v \in V$، $b(v, v) \geq 0$ ($b(v, v) \leq 0$).

تعریف ۱۲.۱. فرض کنید $u^1, \ldots, u^n$ مختصات طبیعی $\mathbb{R}^n$ باشند. اگر V و $W = \sum W^i \partial_i$ میدان‌های برداری روی $\mathbb{R}^n$ باشند آنگاه میدان برداری $\nabla_V W = \sum V(W^i)\partial_i$ را مشتق کواریان طبیعی W نسبت به V گویند.

تعریف ۱۳.۱. فرض کنید M یک خمینه‌ی هموار باشد. نگاشت

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

را یک التصاق گویند هرگاه:

(۱) $\nabla_V W$ نسبت به V، $\mathfrak{F}(M)$-خطی باشد:

$$\nabla_{fV_1 + gV_2} W = f\nabla_{V_1} W + g\nabla_{V_2} W \qquad \forall\, f, g \in \mathfrak{F}(M)$$

(۲) $\nabla_V W$ نسبت به W، $\mathbb{R}$-خطی باشد:

$$\nabla_V aW_1 + bW_2 = a\nabla_V W_1 + b\nabla_V W_2 \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$$

(۳) در قاعده‌ی ضرب صدق کند:

$$\nabla_V(fW) = (Vf)W + f\nabla_V W \qquad\qquad \forall\, f \in \mathfrak{F}(M)$$

∇ را مشتق کواریان W در امتداد V نسبت به التصاق ∇ گویند.

تعریف ۱۴.۱. فرض کنید M خمینه‌ی هموار باشد. التصاق ∇ روی کلاف مماس $T(M)$ التصاق تاب آزاد گویند هرگاه تانسور تاب

$$T(V, W) = \nabla_V W - \nabla_W V - [V, W]$$

متحد با صفر باشد؛ یعنی $[V,W]=\nabla_V W-\nabla_W V$. بنابراین التصاق تاب آزاد، متقارن نیز است.

تعریف ۱.۱۵. [۱] روی خمینه‌ی ریمانی M یک التصاق منحصربفرد ∇ چنان موجود است که

$$T(V,W)=[V,W]-\nabla_V W+\nabla_W V=0 \qquad (1)$$
(تانسور تاب ∇ صفر است)

$$Xg(V,W)=g(\nabla_X V,W)+g(V,\nabla_X W) \qquad (2)$$
(∇ سازگار با متر ریمانی است)

در این صورت ∇ را التصاق لوی-سیویتا[1] (التصاق ریمانی) گویند که از فرمول کزول[2] به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}2g(\nabla_V W,X)&=Vg(W,X)+Wg(X,V)-Xg(V,W)\\&\quad-g(V,[W,X])+g(W,[X,V])+g(X,[V,W])\end{aligned}$$

تعریف ۱.۱۶. مشتق کواریان (r,s) تانسور A روی خمینه‌ی هموار M، عبارتست از $(r,s+1)$ تانسور ∇A به طوریکه به ازای هر $V,X_i\in\chi(M)$ و $\theta^j\in\chi^*(M)$

$$(\nabla A)(\theta^1,\cdots,\theta^r,X_1,\cdots,X_s,V)=(\nabla_V A)(\theta^1,\cdots,\theta^r,X_1,\cdots,X_s)$$

در حالتی که $r=s=0$ مشتق کواریان تابع f همان دیفرانسیل معمولی‌اش می‌باشد، زیرا

$$(\nabla f)(V)=\nabla_V f=Vf=df(V) \qquad \forall\, V\in\chi(M).$$

تعریف ۱.۱۷. فرض کنید M خمینه‌ی هموار باشد. میدان برداری V را روی M موازی گویند هرگاه به ازای هر میدان برداری X روی M، $\nabla_X V=0$ باشد.

لم ۱.۳. [۱] *فرض کنید $\alpha: I\to M$ خم هموار روی خمینه‌ی هموار M و $a\in I$ و $z\in T_{\alpha(a)}(M)$ باشد. در این صورت میدان برداری موازی منحصربفرد Z روی α چنان موجود است که $Z(a)=z$.*

تعریف ۱.۱۸. با توجه به لم قبل، اگر $b\in I$ در این صورت تابع

[1] Levi-civita
[2] Koszul formula

$$P = P_a^b(\alpha) : T_p(M) \to T_q(M)$$
$$z \mapsto Z(b)$$

انتقال موازی در طول α از $p = \alpha(a)$ به $q = \alpha(b)$ نامیده می‌شود.

لم ۴.۱. [۱] *انتقال موازی یک ایزومتری خطی می‌باشد.*

تعریف ۱۹.۱. ژئودزیک‌ها خم‌هایی با شتاب صفر هستند یعنی $\gamma'' = \circ$.

نتیجه ۱.۱. [۱] *فرض کنید $x^۱, \ldots, x^n$ دستگاه مختصاتی روی $\mathfrak{U} \subset M$ باشد. خم γ در $\mathfrak{U}$ ژئودزیک از M است اگر وتنها اگر توابع مختصاتی $x^k \circ \gamma$ به ازای $۱ \leq k \leq n$ در رابطه‌ی*

$$\frac{d^۲(x^k \circ \gamma)}{dt^۲} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\gamma) \frac{d(x^i \circ \gamma)}{dt} \frac{d(x^j \circ \gamma)}{dt} = \circ$$

صدق کند.

تعریف ۲۰.۱. فرض کنید M یک خمینه‌ی ریمانی با التصاق ریمانی ∇ باشد. نگاشت $R : \chi^۳(M) \to \chi(M)$ با ضابطه‌ی

$$R(X, Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

یک $(۱,۳)$ میدان تانسوری روی M می‌باشد که تانسور انحنای ریمانی نامیده می‌شود. اگر $x, y, z, v, w \in T_p(M)$ باشد. نگاشت R در روابط زیر صدق می‌کند:

(۱) $R(x, y)z = -R(y, x)z,$

(۲) $g(R(x, y)v, w) = -g(R(x, y)w, v),$

(۳) $R(x, y)z + R(y, z)x + R(z, x)y = \circ,$

(۴) $g(R(x, y)v, w) = g(R(v, w)x, y).$

دو اتحاد اول پادمتقارن بودن تانسور انحنا و اتحاد آخر تقارن تانسور انحنا نسبت به اندیس‌ها را نشان می‌دهند. اتحاد دوم را اتحاد اول بیانچی[۳] می‌نامند.

[۳] Bianchi

لم ۵.۱. [۱] *اگر $x, y, z \in T_p(M)$، آنگاه*

$$(\nabla_z R)(x, y) + (\nabla_x R)(y, z) + (\nabla_y R)(z, x) = \circ.$$

رابطه‌ی بالا را اتحاد دوم بیانچی نامند.

تعریف ۲۱.۱. فرض کنید M خمینه‌ی ریمانی هموار باشد و $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$. در این صورت عمل پایین بر یک اندیس به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned}
&\downarrow^a_b : \mathfrak{T}^r_s(M) \to \mathfrak{T}^{r-۱}_{s+۱}(M)\\
&(\downarrow^a_b A)(\theta^۱, \ldots, \theta^{r-۱}, X_۱, \ldots, X_{s+۱})\\
&\qquad = A(\theta^۱, \ldots, X^*_b, \ldots, \theta^{r-۱}, X_۱, \ldots, X_{b-۱}, X_{b+۱}, \ldots, X_{s+۱}).
\end{aligned}$$

به طوریکه X^*_b ، ۱$-$فرم به طور متریک هم ارز با میدان برداری X_b است و در مکان $a-$ام در بین ۱$-$فرم‌ها قرار می‌گیرد. به طریق مشابه عمل بالا بر یک اندیس نیز تعریف می‌شود.

تعریف ۲۲.۱. برای $۱ \leq a \leq b \leq s$ و r دلخواه انقباض متری $C_{ab} : \mathfrak{T}^r_s(M) \to \mathfrak{T}^r_{s-۲}(M)$ در حالت مختصاتی به فرم زیر است

$$(C_{ab}A)^{i_۱\ldots i_r}_{j_۱\ldots j_{s-۲}} = \sum_{p,q} g^{pq} A^{i_۱\ldots i_r}_{j_۱\ldots p\cdots q\ldots j_{s-۲}}.$$

به طور مشابه در حالت پادورد برای $۱ \leq a \leq b \leq r$ و s دلخواه انقباض متری $C^{ab} : \mathfrak{T}^r_s(M) \to \mathfrak{T}^{r-۲}_s(M)$ در فرمول مختصاتی بالا با وارون کردن اندیس‌های هموردا و پادوردا به دست می‌آید.

تعریف ۲۳.۱. انقباض متریکی C_{ab} برای $A \in \mathfrak{T}^\circ_s(M)$ نسبت به یک میدان کنج به صورت زیر است

$$C_{ab}(X_۱, \ldots, X_{s-۲}) = \sum_m A(X_۱, \ldots, E_m, \ldots, E_m, \ldots, X_{s-۲})$$

به طور مشابه برای $(۱, s)$ میدان تانسوری $A : \chi(M)^s \to \chi(M)$

$$(C^۱_b A)(X_۱, \ldots, X_{s-۱}) = \sum_m g(E_m, A(X_۱, \ldots, E_m, \ldots, X_{s-۱})).$$

تعریف ۲۴.۱. کنج روی خمینه‌ی M در نقطه‌ی p عبارتست از یک پایه متعامد یکه برای فضای مماس $T_p(M)$. اگر M، $n-$بعدی باشد در این صورت n تا میدان برداری دو به دو متعامد یکه $E_1, \dots, E_n$ را میدان کنج می‌نامند که به هر نقطه از خمینه یک کنج اختصاص می‌دهد.

تعریف ۲۵.۱. فرض کنید M خمینه‌ی ریمانی با متر g باشد و فرض کنید $f \in C^\infty(M)$ تابع هموار روی M باشد. گرادیان تابع f به صورت میدان برداری به طور متریک هم ارز با $df \in \chi^*(M)$ تعریف می‌شود؛ یعنی به ازای هر میدان برداری مماس X:

$$g(gradf, X) = df(X) = Xf.$$

تعریف ۲۶.۱. فرض کنید R تانسور انحنای ریمانی M باشد. تانسور انحنای ریچی[۴] Ric از M عبارتست از انقباض $C^1_4(R) \in \mathfrak{T}^0_2(M)$ که مؤلفه‌هایش نسبت به یک قطعه مختصاتی عبارتست از:

$$R_{ij} = \sum_m R^m_{ijm}.$$

تعریف ۲۷.۱. فرض کنید (M, g) یک خمینه‌ی ریمانی باشد. تانسور ریچی عبارتست از $(0, 2)$ میدان تانسور ریچی که به ازای میدان های برداری X, Y, Z به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Ric(X, Y) := TrZ \to R(Z, X)Y \qquad \forall X, Y, Z \in \chi(M).$$

فرض کنید $\{e_i\}$ یک کنج برای $T_p(M)$ نسبت به متر g باشد. در این صورت نمایش تانسور ریچی در پایه‌ی $\{E_i\}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$Ric(X, Y) := \sum_m \varepsilon_m g(R(X, Y, E_m), E_m).$$

که $\varepsilon_m = g(E_m, E_m)$.

تعریف ۲۸.۱. توزیع $k-$بعدی D روی یک خمینه‌ی M عبارتست از یک نگاشت D که به هر نقطه‌ی $p \in M$ یک زیر فضای $k-$بعدی D_p از T_pM (فضای مماس بر M در نقطه‌ی p) نسبت می‌دهد. D را مشتق‌پذیر گویند چنانچه به ازای هر $p \in M$ یک همسایگی U با k میدان برداری مستقل خطی $X_1, \dots, X_k$ روی U وجود داشته باشد به طوریکه به ازای هر $q \in U$، $\{X_{1_q}, \dots, X_{k_q}\}$ یک پایه برای D_q باشد.

[۴] Ricci

تعریف ۲۹.۱. فرض کنید M، N خمینه‌های دیفرانسیل پذیر باشند و $f : M \to N$ یک نگاشت دیفرانسیل پذیر بین آن‌ها باشد. نگاشت f فرورفتگی از نقطه‌ی $p \in M$ است، اگر دیفرانسیل‌اش

$$df_p : T_p(M) \to T_{f(p)}N$$

نگاشت خطی پوشا باشد. نقطه‌ی $q \in N$ یک مقدار منظم از f است اگر همه‌ی نقاط p در تصویر وارون $f^{-1}(q)$، نقاط منظم باشند. نگاشت دیفرانسیل f که فرورفتگی از هر نقطه است را فرورفتگی نامند. معادلاً، f فرورفتگی است اگر دیفرانسیل df_p رتبه‌ی ثابت معادل بعدی از N داشته باشد.

تعریف ۳۰.۱. فرض کنید D زیر مجموعه‌ی بازی از $\mathbb{C}^n$ باشد. تابع $f : D \to \mathbb{C}$ در نقطه‌ی z_0 دیفرانسیل پذیر گویند، اگر

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\{f(z_0^1, \dots, z_0^i + h, \dots, z_0^n) - f(z_0^1, \dots, z_0^i, \dots, z_0^n)\}$$

به ازای هر $i = 1, \dots, n$ موجود باشد. f روی D هولومرفیک نامند اگر f در هر نقطه‌ای از D دیفرانسیل پذیر باشد.

تعریف ۳۱.۱. فرض کنید D زیر مجموعه‌ی بازی از $\mathbb{C}^n$ باشد و فرض کنید $\psi : D \to \mathbb{C}^n$ نگاشت تعریف شده به وسیله‌ی

$$\psi(z^1, \dots, z^n) = (w^1, \dots, w^n).$$

ψ هولومرفیک است اگر برای هر i، توابع $w^i = \psi^i(z^1, \dots, z^n)$ نسبت به z^j، $j = 1, \dots, n$ هولومرفیک باشند.

تعریف ۳۲.۱. فضای هاسدورف M خمینه‌ی مختلط از بعد n نامند، اگر M در ویژگی‌های زیر صدق کند:

(۱) پوشش باز $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ از M موجود باشد و به ازای هر α، همئومورفیسم

$$\psi_\alpha : U_\alpha \to \psi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{C}^n;$$

موجود باشد.

(۲) برای دو مجموعه باز U_α و U_β با اشتراک ناتهی، نگاشت‌های

$$f_{\beta\alpha}=\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}:\psi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\psi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta),$$
$$f_{\alpha\beta}=\psi_\alpha\circ\psi_\beta^{-1}:\psi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\to\psi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$$

هولومرفیک باشند.

مجموعه‌ی $(U_\alpha,\psi_\alpha)_{\alpha\in A}$ دستگاه همسایگی‌های مختصاتی هولومرفیک می‌نامند.

مثال ۱.۱. مثالی از یک خمینه‌ی مختلط.
کره‌ی $S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2=1\}$ را در نظر بگیرید. همچنین همسایگی‌های $U_1=S^2\setminus\{n\}$ و $U_2=S^2\setminus\{s\}$ را از S^2 در نظر بگیرید که $n=(0,0,1)$ و $s=(0,0,-1)$ می‌باشد. $\psi_1:U_1\longrightarrow\mathbb{C}$ و $\psi_2:U_2\longrightarrow\mathbb{C}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$\psi_1(x,y,z)=\frac{x+\sqrt{-1}y}{1-z}\ ,\qquad \psi_2(x,y,z)=\frac{x-\sqrt{-1}y}{1+z}.$$

در این صورت نگاشت‌های $\psi_1\circ\psi_2^{-1},\psi_2\circ\psi_1^{-1}:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ هولومرفیک می‌باشند. زیرا برای $\mathbb{C}\ni w=u+\sqrt{-1}v$ از $u=\frac{x}{1-z},v=\frac{y}{1-z}$ و $x^2+y^2+z^2=1$ نتیجه گرفته می‌شود:

$$z=\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1},\ \ x=\frac{2u}{u^2+v^2+1},\ \ y=\frac{2v}{u^2+v^2+1}.$$

بنابراین

$$\psi_1^{-1}(w)=\psi_1^{-1}(u+\sqrt{-1}v)=\Big(\frac{2u}{u^2+v^2+1},\frac{2v}{u^2+v^2+1},\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\Big)$$

در نتیجه به دست می‌آید:

$$\psi_2\circ\psi_1^{-1}(w)=\frac{u}{u^2+v^2}-\sqrt{-1}\frac{v}{u^2+v^2}=\frac{1}{w}.$$

بنابراین $\psi_2\circ\psi_1^{-1}$ هولومرفیک می‌باشد. به طور مشابه نشان داده می‌شود که $\psi_1\circ\psi_2^{-1}$ نیز هولومرفیک می‌باشد. بنابراین S^2 یک خمینه‌ی مختلط است که کره‌ی ریمانی نامیده می‌شود.

تعریف ۳۳.۱. فرض کنید M خمینه‌ی مختلط $n-$بعدی باشد. مختصات مختلط موضعی را با $(x^1,y^1,\dots,x^n,y^n)$ نشان می‌دهند. در این صورت M خمینه‌ی دیفرانسیل پذیر $2n-$ بعدی حقیقی در نظر گرفته می‌شود. فضای مماس $T_p(M)$ در نقطه‌ی $p\in M$ پایه‌ی استاندارد

$\{(\frac{\partial}{\partial x^1})_p, (\frac{\partial}{\partial y^1})_p, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x^n})_p, (\frac{\partial}{\partial y^n})_p\}$ را دارد. در این صورت $J_p : T_p(M) \to T_p(M)$ برای $i = 1, \ldots, n$:

$$J_p(\frac{\partial}{\partial x^i})_p = (\frac{\partial}{\partial y^i})_p, \quad J_p(\frac{\partial}{\partial y^i})_p = -(\frac{\partial}{\partial x^i})_p.$$

ایزومورفیسم می‌باشد. J را ساختار تقریباً مختلط M می‌نامند.

تعریف ۳۴.۱. خمینه‌ی دیفرانسیل پذیر M، خمینه‌ی تقریباً مختلط نامند اگر نگاشت خطی $J : T(M) \to T(M)$ وجود داشته باشد که در شرط $J^2 = -id$ صدق کند و J ساختار تقریباً مختلط از M نامیده می‌شود.

لم ۶.۱. *خمینه‌ی تقریباً مختلط M با بعد زوج است.*

برهان. چون $J^2 = -id$ ، برای پایه‌ی مناسبی از کلاف مماس به صورت زیر است:

$$J^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \end{pmatrix}$$

از اینرو، $0 \geq (detJ)^2 = detJ^2 = (-1)^n$. آنگاه n زوج است. □

تبصره ۱.۱. *هر خمینه‌ی دیفرانسیل پذیر از بعد زوج لزوماً یک ساختار تقریباً مختلط J نمی‌پذیرد. برای مثال S^4، خمینه‌ی تقریباً مختلط نمی‌باشد. همچنین خمینه‌های تقریباً مختلط وجود دارند به طوریکه خمینه‌ی مختلط نمی‌باشند. به عنوان مثال S^6 ساختار تقریباً مختلط می‌پذیرد در حالی که خمینه‌ی مختلط نمی‌باشد.*

تعریف ۳۵.۱. فرض کنید (M, J, g) خمینه‌ی تقریباً مختلط باشد. در این صورت میدان تانسوری تاب وابسته به ساختار تقریباً مختلط J به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$
$$N(X,Y) = J[X,Y] - J[JX, JY] - [JX, Y] - [X, JY]$$

مثال ۲.۱. *فضایی از توابع هولومورفیک مثالی از فضای هیلبرت می‌باشد.*

تعریف ۳۶.۱. در ریاضیات، متر فوبینی-استادی یک متر کاهلر روی فضای تصویری هیلبرت است، به طوریکه، فضای تصویری مختلط $P^n(\mathbb{C})$ دارای یک فرم هرمیتی است. این متر برای اولین بار در سال ۱۹۰۴ و ۱۹۰۵ توسط گیودو فوبینی[5] و ادوارد استادی [6] مطرح شده است.

[5] Guido Fubini

فرم هرمیتی در $\mathbb{C}^{n+1}$ یک زیرگروه واحد $U(n+1)$ در $GL(n+1,\mathbb{C})$ (گروه خطی عام) تعریف می‌شود.

تبصره ۲.۱. *$P^n(\mathbb{C})$ مجهز شده با متر فیوبینی-استادی، یک فضای متقارن است.*

تعریف ۳۷.۱. اگر V یک فضای برداری روی میدان F باشد، گروه خطی عام از V، به صورت $GL(V)$ نمایش داده می‌شود که گروهی از همه‌ی اتومورفیسم‌ها از V است. به عنوان مثال مجموعه‌ای از همه‌ی انتقال‌های خطی دوسویی $V \to V$، همراه با ترکیب تابعک مانند عمل گروه می‌باشد. اگر V با بعد متناهی n باشد، آنگاه $GL(V)$ و $GL(n,F)$ ایزومورفیک هستند.

تعریف ۳۸.۱. یک گردایه‌ای از زیرخمینه‌های $k-$بعدی، غوطه وری، همبند و مجزا از Mکه اجتماع آن‌ها برابر M است را برگی از بعد k روی خمینه‌ی M نامند. به عنوان مثال گردایه‌ای از همه‌ی کره‌های به مرکز ۰ یک برگ $(n-1)-$بعدی از $R^n\setminus\{0\}$ است.

تعریف ۳۹.۱. برگ ۱-بعدی از M به وسیله‌ی خمینه‌های انتگرال پذیر از میدان برداری ریب[۷] ξ یک برگ هاف از M نامیده می‌شود.

تبصره ۳.۱. *M ابررویه‌ی هاف در $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ است اگر وتنها اگر برگ هاف از M تماماً ژئودزیک باشد.*

تبصره ۴.۱. *خمینه‌ی M هاف است اگر وتنها اگر میدان برداری ریب ξ هاف باشد.*

---

[۶] Eduard Study

[۷] Reeb

فصل ۲

خمینه‌های کاهلر و خمینه‌های کنتاکت

۱.۲ خمینه‌های کاهلر[۱]

تعریف ۱.۲. فرض کنید (M,J) خمینه‌ی تقریباً مختلط باشد. اگر متر ریمانی g برای $X,Y\in T(M)$ در خاصیت

$$g(X,Y)=g(JX,JY) \tag{۱.۲}$$

صدق کند، g یک متر هرمیتی نامیده می‌شود و خمینه‌ی تقریباً مختلط (M,J) با متر هرمیتی g خمینه‌ی تقریباً هرمیتی نامیده می‌شود. با توجه به(۱.۲) داریم:

$$g(JX,Y)=g(J^{2}X,JY)=-g(X,JY)$$

بنابراین J شبه متقارن است.

قضیه ۱.۲. *روی هر خمینه‌ی تقریباً مختلط، یک متر هرمیتی وجود دارد.*

برهان. فرض کنیم خمینه‌ی M مجهز به متر هرمیتی g' باشد. تعریف

$$g(X,Y)=\tfrac{1}{2}\{g'(X,Y)+g'(JX,JY)\}.$$

ثابت می‌شود که g یک متر هرمیتی است. □

تعریف ۲.۲. فرض کنید (M,J) خمینه‌ی تقریباً هرمیتی با متر هرمیتی g باشد. ۲-فرمی اساسی، فرم کاهلر Ω برای همه‌ی میدان‌های برداری X و Y روی M به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Omega(X,Y)=g(JX,Y). \tag{۲.۲}$$

[۱] Kahler