بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم ریاضی

گروه آمار


**رساله**

**برای دریافت درجه دکتری در رشته**

**آمار، گرایش نظریه احتمال**

**عنوان**

# رفتار مجانبی شکل‌های درجه دوم و دوخطی برای متغیرهای تصادفی وابسته

اساتید راهنما

**دکتر محمد امینی**

**دکتر ابوالقاسم بزرگ‌نیا**

نگارنده


نگار اقبال


بهمن ۱۳۹۱

باسمه تعالی
مشخصات رساله تحصیلی دانشجویان
دانشگاه فردوسی مشهد

عنوان: رفتار مجانبی شکل‌های درجه دوم و دوخطی برای متغیرهای تصادفی وابسته

نام نویسنده: نگار اقبال اساتید راهنما: دکتر محمد امینی و دکتر ابوالقاسم بزرگ‌نیا

دانشکده: دانشکده علوم ریاضی گروه: گروه آمار رشته تحصیلی: آمار

تاریخ تصویب: ۱۳۸۸/۰۳/۳۱ تاریخ دفاع: ۱۳۹۱/۱۱/۱۲

مقطع تحصیلی: دکتری تعداد صفحات: ۹۹

چکیده رساله:

محققین زیادی به مطالعه نامساوی‌های ماکسیمال و همگرایی کامل شکل‌های درجه دوم از متغیرهای تصادفی مستقل، پرداخته‌اند. هدف این رساله، تعمیم نتایج موجود برای رده‌های متغیرهای تصادفی وابسته، زیرگاوسی وابسته و متغیرهای تصادفی دلخواه است. برای نیل به این مقصود، لازم است نامساوی‌های ماکسیمال، کولموگوروف و نمایی را برای رده‌های مذکور تعمیم دهیم تا با استفاده از آن‌ها بتوانیم همگرایی کامل شکل‌های درجه دوم و دوخطی و همچنین نرخ‌های همگرایی آن‌ها را مورد بررسی قرار دهیم.

واژگان کلیدی: شکل درجه دوم، شکل دوخطی، وابسته زبرجمعی منفی، زیرگاوسی، نامساوی ماکسیمال، نامساوی کولموگوروف.

امضای استاد راهنما: تاریخ:

## اظهارنامه

عنوان رساله: رفتار مجانبی شکل‌های درجه دوم و دوخطی برای متغیرهای تصادفی وابسته

این جانب نگار اقبال دانشجوی دوره دکتری دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد نویسنده رساله تحت راهنمایی دکتر محمد امینی و دکتر ابوالقاسم بزرگ‌نیا متعهد می‌شوم:

آ. تحقیقات در این رساله توسط این جانب انجام شده و از صحت و اصالت برخوردار است.

ب. در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده، استناد شده است.

ج. مطالب مندرج در این رساله تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی به جایی ارایه نشده است.

د. کلیه حقوق این اثر متعلق به دانشگاه فردوسی مشهد است و مقالات مستخرج با نام "دانشگاه فردوسی مشهد" یا "Ferdowsi University of Mashhad" به چاپ خواهد رسید.

ه. حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی رساله تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از آن رعایت شده است.

و. در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.

ز. در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

**تاریخ**

**امضای دانشجو**

تقدیم به

آن‌ها که بی‌دریغ کوشیدند

تا امروز سر بر اوج ساییدن را تجربه کنم.

ما بدان مقصد عالی نتوانیم رسید

هم مگر پیش نهد لطف شما گامی چند...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ اساتید راهنمای خود، آقای دکتر امینی و آقای دکتر بزرگ‌نیا صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که از راهنمایی‌های ارزنده ایشان در راستای پیشبرد پژوهش، حاصل فراوان بردم و همواره شاگرد مکتب علم و انسانیت و منش والای ایشان هستم.

همچنین لازم می‌دانم از اساتید فرهیخته آقای دکتر نیلی‌ثانی، آقای دکتر نعمت‌اللهی، آقای دکتر آذرنوش و آقای دکتر صادق‌پور که داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند، با تمام وجود تشکر و قدردانی نمایم.

در پایان، تقدیر و تشکر می‌کنم از همسر عزیزم که در سایه همیاری و همدلی او به این منظور نائل شدم و بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، وجود مقدس‌شان را ستایش می‌کنم و تشکر می‌کنم از خواهران و برادر عزیزم که به‌ترین پشتیبان من بودند.

نگار اقبال

بهمن ۱۳۹۱

# فهرست مطالب

# پیش‌گفتار

محققین زیادی به بررسی رفتار حدی شکل‌های درجه دوم و دوخطی پرداخته‌اند، ولی اکثر نتایج ارایه شده، برای رده متغیرهای تصادفی مستقل است. اما در شرایط واقعی، پذیره استقلال کم‌تر مورد پذیرش قرار می‌گیرد. از این رو، بر آن شدیم به مطالعه رفتار مجانبی شکل‌های درجه دوم و دوخطی برای برخی رده‌های متغیرهای تصادفی وابسته، بپردازیم.

در این رساله، کران‌های بالای ماکسیمال، کولموگروف و نمایی را، تحت فرض‌های مختلف بر روی متغیرهای تصادفی، ارایه می‌کنیم و با به به کارگیری این کران‌ها، شرایطی را که تحت آن‌ها همگرایی کامل محقق می‌شود، بیان و اثبات می‌کنیم.

برای اثبات نتایج اصلی، نیاز به مفاهیم مقدماتی و لم‌هایی داریم که در فصل اول به آن‌ها می‌پردازیم. در فصل دوم، با استفاده از روش‌های مارتینگلی، چند نامساوی ماکسیمال برای شکل‌های درجه دوم و درجه دوم موزون از متغیرهای تصادفی وابسته زبرجمعی منفی، ارایه می‌کنیم و با کمک گرفتن از این کران‌ها، شرایط همگرایی کامل آن‌ها را بررسی می‌کنیم. در فصل سوم، چند نامساوی کولموگوروف برای شکل‌های درجه دوم از متغیرهای وابسته زبرجمعی منفی به دست می‌آوریم و با استفاده از آن‌ها شرایط همگرایی کامل را بررسی می‌کنیم. در فصل چهارم، کران‌های بالای نمایی برای شکل‌های دوخطی و در حالت خاص، شکل‌های درجه دوم از متغیرهای تصادفی زیرگاوسی، ارایه می‌کنیم و در مورد همگرایی کامل شکل‌های دوخطی و درجه دوم بحث می‌کنیم. در فصل پایانی نیز چند نامساوی گشتاوری برای متغیرهای تصادفی متقارن به دست می‌آوریم. از این نامساوی‌ها می‌توان برای بررسی رفتار حدی شکل‌های دوخطی و درجه دوم از متغیرهای تصادفی متقارن، استفاده کرد.

از این رساله، مقاله‌های زیر استخراج و در مجله‌ها و کنفرانس‌های آماری ارایه شده‌اند.

- مقاله‌های چاپ شده:

1. Eghbal, N., Amini, M. and Bozorgnia, A. (2010) Some maximal inequalities for quadratic forms of negative superadditive dependence random variables. Statist. Probab. Lett., **80**, 587-591.
2. Eghbal, N., Amini, M. and Bozorgnia, A. (2011) On the Kolmogorov inequalities for quadratic forms of dependent uniformly bounded random variables. Statist. Probab. Lett., **81**, 1112-1120.
3. Eghbal, N., Amini, M. and Bozorgnia, A. (2012) Bounds on the tail probability of bilinear and quadratic forms in sub-Gaussian random variables, Under review.

- سخنرانی‌های ارایه شده:

1. Eghbal, N., Amini, M. and Bozorgnia, A. (2009) Some maximal inequalities for quadratic forms of negative superadditive dependent random variables, Proceeding of the $7^{th}$ Seminar on Probability and Stochastic Processes, Isfahan University of Technology.
2. Eghbal, N., Amini, M. and Bozorgnia, A. (2010) A Kolmogorov inequality for quadratic forms of NSD uniformly bounded random variables, Proceeding of the $23^{th}$ Nordic Conference of Mathematical Statistics, NORDSTAT 2010, Voss, Norway.
3. Eghbal, N., Amini, M. and Bozorgnia, A. (2011) Some moment inequalities for symmetric random variables, Proceeding of $8^{th}$ Seminar on Probability and Stochastic Processes, University of Guilan, Rasht.

# فصل ۱

# مفاهیم اولیه

در این فصل، برخی تعاریف و قضایا که در فصل‌های بعد به آن‌ها نیاز داریم، بیان می‌کنیم.

## ۱.۱ انواع وابستگی

### ۱.۱.۱ پیوندی منفی

اولین رده وابستگی که معرفی می‌کنیم، متغیرهای تصادفی پیوندی منفی[1] $(NA)$ است که توسط جاج و پروشان (۱۹۸۳) ارایه شده است.

**تعریف ۱.۱.۱.** متغیرهای تصادفی $X_۱$، $X_۲$، ... و $X_k$ پیوندی منفی نامیده می‌شوند، اگر برای هر دو زیرمجموعه از هم جدای مجموعه $\{۱, ۲, \ldots, k\}$ مانند $A_۱$ و $A_۲$، بتوان نتیجه گرفت:

$$cov\Big(f(X_i; i \in A_۱), g(X_j; j \in A_۲)\Big) \leq ۰, \qquad (۱.۱)$$

که در آن $f$ و $g$ توابعی صعودی‌اند.

[1] Negatively associated

رابطه (۱.۱) برای توابع $f$ و $g$ نزولی نیز برقرار است. همچنین بدون کم شدن از کلیت مساله، می‌توان فرض کرد $A_۱ \cup A_۲ = \{۱, ۲, \ldots, k\}$.

در زیر برخی از ویژگی‌های متغیرهای تصادفی $NA$، که توسط جاج و پروشان (۱۹۸۳) معرفی شده‌اند را فهرست می‌کنیم.

**ملاحظه ۲.۱.۱.** فرض کنید $A_۱$، $A_۲$، ... و $A_m$ زیرمجموعه‌های جدا از هم مجموعه $\{۱, ۲, \ldots, k\}$ و $f_۱$، $f_۲$، ... و $f_m$ توابعی مثبت و صعودی باشند. اگر $X_۱$، $X_۲$، ... و $X_k$ متغیرهای تصادفی پیوندی منفی باشند، آن گاه:

$$E\Big(\prod_{i=۱}^{m} f_i(X_j; j \in A_i)\Big) \leq \prod_{i=۱}^{m} E\Big(f_i(X_j; j \in A_i)\Big).$$

**ملاحظه ۳.۱.۱.** هر زیرمجموعه‌ای از دو یا بیشتر متغیرتصادفی $NA$، $NA$ است.

**ملاحظه ۴.۱.۱.** هر زیرمجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل، $NA$ است.

**ملاحظه ۵.۱.۱.** توابع صعودی روی زیرمجموعه‌های جدا از هم، از یک مجموعه از متغیرهای تصادفی $NA$، $NA$ است.

**ملاحظه ۶.۱.۱.** اشتراک مجموعه‌های مستقل از هم، شامل متغیرهای تصادفی $NA$، $NA$ است.

**مثال ۷.۱.۱.** متغیرهای تصادفی همبسته منفی نرمال، $NA$ هستند. همچنین متغیرهای تصادفی که دارای توزیع چندجمله‌ای، فوق هندسی چندمتغیره یا دیریکله هستند، $NA$ می‌باشند.

### ۲.۱.۱ وابستگی زبرجمعی منفی

یک رده دیگر از متغیرهای تصادفی وابسته، متغیرهای تصادفی وابسته زبرجمعی منفی[۱] ($NSD$) می‌باشد. این نوع وابستگی، توسط هو (۲۰۰۰) بیان شده که بر اساس توابع زبرجمعی پایه‌گذاری شده است. قبل از بیان این نوع وابستگی، ابتدا توابع زبرجمعی که توسط کمپرمن (۱۹۷۷) تعریف شده است را بیان می‌کنیم.

[1] Negatively superadditive dependent

**تعریف ۸.۱.۱.** تابع $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ زبرجمعی است، اگر برای هر $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$،

$$\phi(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}) + \phi(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \geq \phi(\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{y}),$$

که در آن $\vee$ ماکسیمم مولفه‌ای و $\wedge$ می‌نیمم مولفه‌ای است. یعنی $\mathbf{x} \vee \mathbf{y} = (x_۱ \vee y_۱, x_۲ \vee y_۲, \ldots, x_m \vee y_m)$ و $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = (x_۱ \wedge y_۱, x_۲ \wedge y_۲, \ldots, x_m \wedge y_m)$.

طبق تعریف ۸.۱.۱، بررسی این مساله که یک تابع زبرجمعی است یا خیر، آسان نیست. کمپرمن (۱۹۷۷) روشی برای بررسی این موضوع ارایه کرد، که با استفاده از آن، به سادگی می‌توان زبرجمعی بودن یا نبودن هر تابع را مشخص کرد.

**لم ۹.۱.۱.** اگر تابع $\phi$ دارای مشتق جزیی مرتبه دوم پیوسته باشد، زبرجمعی بودن تابع $\phi$ معادل است با

$$\frac{\partial^۲ \phi(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \geq ۰, \qquad ۱ \leq i \neq j \leq m.$$

**تعریف ۱۰.۱.۱.** بردار تصادفی $\mathbf{X} = (X_۱, X_۲, \ldots, X_m)$ وابسته زبرجمعی منفی است، اگر برای هر تابع زبرجمعی $\phi$،

$$E\Big(\phi(X_۱, X_۲, \ldots, X_m)\Big) \leq E\Big(\phi(X_۱^*, X_۲^*, \ldots, X_m^*)\Big),$$

که $X_۱^*$، $X_۲^*$، ... و $X_m^*$ متغیرهای تصادفی مستقل هستند و برای هر $۱ \leq i \leq m$، $X_i$ و $X_i^*$ دارای توزیع یکسانند.

در زیر به برخی ویژگی‌های متغیرهای تصادفی $NSD$، بدون بیان برهان، اشاره می‌کنیم. برای کسب اطلاعات بیشتر به هو (۲۰۰۰) مراجعه کنید.

**ملاحظه ۱۱.۱.۱.** وابستگی پیوندی منفی یک زوج متغیر تصادفی با وابستگی زبرجمعی منفی آن معادل است.

**ملاحظه ۱۲.۱.۱.** اگر بردار تصادفی $(X_۱, X_۲, \ldots, X_m)$، $NSD$ باشد و $g_۱$، $g_۲$، ... و $g_m$ توابعی صعودی باشند، آن گاه $(g_۱(X_۱), g_۲(X_۲), \ldots, g_m(X_m))$ نیز $NSD$ است.

**ملاحظه ۱.۱.۱۳.** اگر بردار تصادفی $(X_1, X_2, \dots, X_m)$، $NSD$ و $(i_1, i_2, \dots, i_m)$ یک جایگشت از $\{1, 2, \dots, m\}$ باشد، آن گاه $(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_m})$، $NSD$ است.

**ملاحظه ۱.۱.۱۴.** اگر بردار تصادفی $(X_1, X_2, \dots, X_m)$، $NSD$ باشد، آن گاه برای هر $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n$ که $2 \leq n \leq m$، بردار تصادفی $(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_n})$، $NSD$ است.

**ملاحظه ۱.۱.۱۵.** فرض کنید $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ و $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ دو بردار تصادفی مستقل باشند. اگر $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$، $NSD$ باشند، آن گاه $(X_1, X_2, \dots, X_m, Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ نیز $NSD$ است.

**لم ۱.۱.۱۶.** (کریستوفیدز و واگلاتو، ۲۰۰۴) اگر $(X_1, X_2, \dots, X_m)$، $NA$ باشد، آن گاه $(X_1, X_2, \dots, X_m)$، $NSD$ است.

## ۱.۱.۳ وابستگی منفی ضعیف

مفهوم دیگری که به آن اشاره می‌کنیم، یک رده از متغیرهای تصادفی وابسته است که به متغیرهای تصادفی وابسته منفی ضعیف[1] $(WND)$ موسوم است. این رده از متغبرهای تصادفی وابسته برای اولین بار توسط رنجبر و همکاران (۲۰۰۸) ارایه شد.

**تعریف ۱.۱.۱۷.** فرض کنید متغیرهای تصادفی $X_1$، $X_2$، ... و $X_n$ دارای تابع چگالی احتمال توام و توابع چگالی احتمال حاشیه‌ای به ترتیب $f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(\cdot)$ و $f_{X_i}(\cdot)$، $i = 1, 2, \dots, n$ باشند، اگر برای اعداد حقیقی $x_1$، $x_2$، ... و $x_n$، ضریب ثابت $M \geq 1$ وجود داشته باشد، به طوری که

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq M \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i),$$

متغیرهای تصادفی $X_1$، $X_2$، ... و $X_n$ را وابسته منفی ضعیف نامند.

رده متغیرهای تصادفی وابسته منفی ضعیف، دسته بزرگی از متغیرهای تصادفی را در بردارد که شامل دنباله متغیرهای تصادفی مستقل $(M = 1)$ نیز می‌باشد.

[1] Weakly negative dependent

**مثال ۱.۱.۱۸.** فرض کنید $(X,Y)$ یک بردار تصادفی با توزیع توام نیم‌نرمال[1] باشد. در این صورت تابع چگالی توام $(X,Y)$ برابر است با

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{۲}{\pi\sqrt{۱-\rho^۲}}\exp\Big\{-\frac{۱}{۲(۱-\rho^۲)}(x^۲+y^۲-۲\rho xy)\Big\},\quad x,y>۰.$$

همچنین تابع چگالی حاشیه‌ای $X$ (یا $Y$) عبارت است از

$$f_X(x)=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\exp\Big\{-\frac{x^۲}{۲}\Big\},\quad x>۰.$$

اگر $-۱<\rho\leq ۰$، آن گاه

$$\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)f_Y(y)}=\frac{۱}{\sqrt{۱-\rho^۲}}\exp\Big\{-\frac{\rho^۲}{۲(۱-\rho^۲)}(x^۲+y^۲)+\frac{\rho}{۱-\rho^۲}xy\Big\}\leq\frac{۱}{\sqrt{۱-\rho^۲}}.$$

بنابراین

$$f_{X,Y}(x,y)\leq Mf_X(x)f_Y(y),$$

که در آن، $M=\frac{۱}{\sqrt{۱-\rho^۲}}>۱$. بنابراین $(X,Y)$، $WND$ است.

**مثال ۱.۱.۱۹.** فرض کنید $(X,Y)$ یک بردار تصادفی با تابع چگالی احتمال توام $f_{X,Y}(x,y)$ متعلق به خانواده $FGM$[2] باشد. در این صورت

$$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)[۱+\alpha(۱-۲F_X(x))(۱-۲F_Y(y))],\ x,y\in\mathbb{R},\ -۱\leq\alpha\leq ۱,$$

که در آن، $f_X(x)$، $f_Y(y)$، $F_X(x)$ و $F_Y(y)$ به ترتیب توابع چگالی احتمال حاشیه‌ای $X$ و $Y$ و توابع توزیع حاشیه‌ای $X$ و $Y$ می‌باشند. از طرفی به راحتی می‌توان نشان داد

$$|۱+\alpha(۱-۲F_X(x))(۱-۲F_Y(y))|\leq ۱+|\alpha|.$$

[1] Half-normal [2] Farlie–Gumbel–Morgenstern family

بنابراین

$$f_{X,Y}(x,y) \leq M f_X(x) f_Y(y),$$

به طوری که $M = ۱ + |\alpha|$. در نتیجه $(X,Y)$، $WND$ است.

**لم ۲۰.۱.۱.** فرض کنید $X_۱$، $X_۲$، ... و $X_n$ متغیرهای تصادفی وابسته منفی ضعیف باشند، آن گاه:

.۱

$$F_{X_۱,X_۲,\ldots,X_n}(x_۱,x_۲,\ldots,x_n) \leq M \prod_{i=۱}^{n} F_i(x_i)$$

.۲

$$E\Big(\prod_{i=۱}^{n} h(X_i)\Big) \leq M \prod_{i=۱}^{n} E(h(X_i)),$$

که در آن، $F_{X_۱,X_۲,\ldots,X_n}(\cdot)$ و $F_i(\cdot)$، $i = ۱,۲,\ldots,n$ به ترتیب تابع توزیع توام و توابع توزیع حاشیه‌ای متغیرهای تصادفی $X_۱$، $X_۲$، ... و $X_n$ می‌باشند و $h(\cdot)$ تابعی حقیقی مقدار و نامنفی است.

**برهان.** بر اساس تعریف متغیرهای تصادفی $WND$ داریم،

.۱

$$\begin{aligned}
F_{X_۱,X_۲,\ldots,X_n}(x_۱,x_۲,\ldots,x_n) &= \int_{-\infty}^{x_۱}\int_{-\infty}^{x_۲}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f_{X_۱,X_۲,\ldots,X_n}(t_۱,t_۲,\ldots,t_n)dt_۱dt_۲\ldots dt_n \\
&\leq \int_{-\infty}^{x_۱}\int_{-\infty}^{x_۲}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} M\prod_{i=۱}^{n} f_{X_i}(t_i)dt_۱dt_۲\ldots dt_n \\
&= M\prod_{i=۱}^{n}\int_{-\infty}^{x_i} f_{X_i}(t_i)dt_i \\
&= M\prod_{i=۱}^{n} F_i(x_i).
\end{aligned}$$

.۲

$$\begin{aligned} E\Big(\prod_{i=1}^{n} h(X_i)\Big) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{i=1}^{n} h(x_i) f_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1,x_2,\dots,x_n)dx_1dx_2\dots dx_n \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty} M\prod_{i=1}^{n} h(x_i)\prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)dx_1dx_2\dots dx_n \\ &= M\prod_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x_i)f_{X_i}(x_i)dx_i \\ &= M\prod_{i=1}^{n} E(h(X_i)). \end{aligned}$$

□

## ۲.۱ مارتینگل

**تعریف ۱.۲.۱.** اگر $X_1$، $X_2$ و ... دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی در فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ و $\mathcal{F}_1$، $\mathcal{F}_2$ و ... دنباله‌ای از سیگما میدان‌ها در $\mathcal{F}$ باشند، دنباله $\{(X_n, \mathcal{F}_n); n \geq 1\}$ مارتینگل[1] است، اگر برای هر $n \geq 1$، شرایط زیر برقرار باشند:

۱. $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$.

۲. $X_n$ در $\mathcal{F}_n$ اندازه‌پذیر باشد.

۳. $E(|X_n|) < \infty$.

۴. $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$.

اگر $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$، واضح است که شرط اول تعریف برقرار است و برای هر $A \in \mathcal{F}_n$،

$$\int_A X_{n+1}dP = \int_A X_n dP. \tag{۲.۱}$$

[1] Martingale

بنابراین برای $k > ۱$،

$$\int_A X_n dP = \int_A X_{n+۱} dP = \cdots = \int_A X_{n+k} dP.$$

در نتیجه

$$E(X_{n+k}|\mathcal{F}_n) = X_n.$$

اگر در رابطه (۲.۱)، $A = \Omega$، آن گاه

$$E(X_۱) = E(X_۲) = \dots.$$

**تعریف ۲.۲.۱.** متغیرتصادفی $X_n$، زیرمارتینگل[۱] متناظر با $\mathcal{F}_n$ است، هرگاه سه شرط اول تعریف ۱.۲.۱ برقرار باشند و به جای شرط ۴ داشته باشیم:

$$E(X_{n+۱}|\mathcal{F}_n) \geq X_n.$$

با استدلال مشابه، اگر $\mathcal{F}_n = \sigma(X_۱, X_۲, \dots, X_n)$، برای هر $A \in \mathcal{F}_n$،

$$\int_A X_{n+۱} dP \geq \int_A X_n dP.$$

همچنین اگر $A = \Omega$، آن گاه برای هر $k > ۱$،

$$E(X_{n+k}|\mathcal{F}_n) \geq X_n,$$

و

$$E(X_۱) \leq E(X_۲) \leq \dots.$$

**قضیه ۳.۲.۱.** (بلینگسلی، ۱۹۹۵) فرض کنید دنباله $X_۱$، $X_۲$، ... مارتینگل متناظر با $\mathcal{F}_۱$، $\mathcal{F}_۲$،

[۱] Submartingale

... و $\phi$ تابعی محدب باشد. اگر برای هر $n \geq ۱$، $\phi(X_n)$ انتگرال‌پذیر باشد، آن گاه دنباله $\phi(X_۱)$، $\phi(X_۲)$، ... زیرمارتینگل متناظر با $\mathcal{F}_۱$، $\mathcal{F}_۲$، ... است.

**قضیه ۴.۲.۱.** (بلینگسلی، ۱۹۹۵) فرض کنید دنباله $X_۱$، $X_۲$، ... زیرمارتینگل متناظر با $\mathcal{F}_۱$، $\mathcal{F}_۲$، ... و $\phi$ تابعی محدب و نانزولی باشد. اگر برای هر $n \geq ۱$، $\phi(X_n)$ انتگرال‌پذیر باشد، آن گاه دنباله $\phi(X_۱)$، $\phi(X_۲)$، ... زیرمارتینگل متناظر با $\mathcal{F}_۱$، $\mathcal{F}_۲$، ... است.

## ۳.۱ شکل‌های درجه دوم و دوخطی

به طور کلی یک شکل درجه دوم[۱] در ریاضیات، یک چندجمله‌ای همگن[۲] درجه دوم از تعدادی متغیر است. منظور از یک چندجمله‌ای همگن، چندجمله‌ای است که درجه جمله‌های آن یکسان باشند. به عنوان مثال

$$۴x^۲ + ۲xy - ۳y^۲,$$

یک شکل درجه دوم از متغیرهای $x$ و $y$ است.

فرض کنید $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $n \times n$ باشد. تابع درجه دوم $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ روی بردار $\boldsymbol{x} = (x_۱, \cdots, x_n)$ که به صورت

$$R(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}' A \boldsymbol{x} = \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=۱}^{n} a_{ij} x_i x_j \qquad (۳.۱)$$

تعریف می‌شود، شکل درجه دوم با ماتریس $A$ نامیده می‌شود. بدون کاستن از کلیت مساله، فرض می‌کنیم ماتریس $A$ متقارن است. توجه داشته باشید اگر $A$ متقارن نباشد، می‌توانیم در رابطه (۳.۱)، ماتریس متقارن $\frac{A + A'}{۲}$ را جایگزین $A$ کنیم، زیرا

$$\boldsymbol{x}' A \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' A' \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' (\frac{A + A'}{۲}) \boldsymbol{x}.$$

[۱] Quadratic form [۲] Homogeneous polynomial

شکل درجه دوم برای یک، دو و سه متغیر به ترتیب یگانی[۱] ، دودویی[۲] یا دوحالتی و سه‌مبنایی[۳] نامیده می‌شوند و به صورت زیر می‌باشند:

$$R(x) = ax^۲ \quad \text{(یگانی)}$$

$$R(x, y) = ax^۲ + bxy + cy^۲ \quad \text{(دودویی)}$$

$$R(x, y, z) = ax^۲ + by^۲ + cz^۲ + dxy + exz + fyz \quad \text{(سه‌مبنایی)}$$

در روابط بالا، $a$، $b$، $\cdots$ و $f$ ضرایب ثابت شکل‌های درجه دوم هستند.

شکل‌های درجه دوم در بسیاری از شاخه‌های ریاضیات کاربرد دارند، برای نمونه می‌توان به نظریه اعداد، جبرخطی، نظریه گروه‌ها (گروه‌های متعامد) و هندسه دیفرانسیل اشاره کرد.

استفاده از شکل‌های درجه دوم در ریاضیات به چندین قرن پیش برمی‌گردد. قضیه فرما[۴] بیان می‌کند که می‌توان اعداد اول را به صورت $x^۲ + y^۲$ نوشت که $x$ و $y$ اعداد صحیح هستند یا مساله یافتن سه‌تایی فیثاغورس که در هزاره دوم قبل از میلاد مسیح مطرح شد. در سال ۶۲۸ میلادی، برهما گوپتا[۵]، ریاضیدان هندی، تحقیقات زیادی در زمینه شکل‌های درجه دوم انجام داد. مهمترین آن‌ها، حل معادله $x^۲ - ny^۲ = c$ است که در بهینه‌سازی کاربرد فراوان دارد. در اروپا این مساله مورد توجه برونکر[۶]، اویلر[۷] و لاگرانژ[۸] قرار گرفت. گاوس (۱۸۰۱)، ریاضی‌دان و فیزیک‌دان آلمانی، کتابی تحت عنوان مسایل ریاضی منتشر کرد که بخش عمده‌ای از آن به شکل‌های درجه دوم روی اعداد صحیح اختصاص یافته است. از آن زمان تا کنون، تحقیقات زیادی در زمینه شکل‌های درجه دوم انجام شده است.

برخی از جنبه‌های آماری نظریه شکل‌های درجه دوم توسط متهی و پروست (۱۹۹۲) ارایه شده است. یکی از کاربردهای شکل‌های درجه دوم در زمینه آمار، نظریه کدگذاری است (رپوکیس و همکاران، ۲۰۰۸). همچنین نظریه شکل‌های درجه دوم در فرآیندهای تصادفی (گائو و آن، ۲۰۰۰) و اقتصادسنجی (بائو و امان‌الله، ۲۰۱۰) مورد استفاده قرار می‌گیرد.

اگر $A = (a_{ij})$ ماتریسی $n \times n$ باشد، تابع $S : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ روی بردارهای $\boldsymbol{x} = (x_۱, \cdots, x_n)$ و $\boldsymbol{y} = (y_۱, \cdots, y_n)$ که به صورت زیر تعریف می‌شود، شکل دوخطی[۹] با

[۱]Unary [۲]Binary [۳]Ternary [۴]Fermat's theorem [۵]Brahmagupta [۶]Brounker [۷]Euler [۸]Lagrange
[۹]Bilinear form