بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه ملایر

دانشکده علوم پایه - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی
(گرایش آنالیز عددی)

توابع پایه ای دلتا و استفاده از آنها در حل دستگاه معادلات انتگرال

به وسیله ی:

لیلی قنبری

استاد راهنما:

دکتر فرشید میرزائی

استاد مشاور:

دکتر محسن اسماعیل بیگی

مهر ماه ۱۳۹۲

به نام خدا

توابع پایه ای دلتا و استفاده از آنها در حل دستگاه معادلات انتگرال

به وسیله ی

لیلی قنبری

پایان نامه
ارائه شده به تحصیلات تکمیلی به عنوان بخشی
از فعالیت های لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد
در رشته
ریاضی کاربردی (گرایش آنالیز عددی)
از دانشگاه ملایر

ارزیابی و تایید شده توسط کمیته پایان نامه با درجه ....

دکتر فرشید میرزائی، استادیار ریاضیات کاربردی (استاد راهنما) ....

دکتر محسن اسماعیل بیگی، استادیار ریاضیات کاربردی (استاد مشاور) ....

دکتر مهدی قیاسوند، استادیار ریاضیات کاربردی (استاد داور) ....

دکتر خسرو سایه وند، استادیار ریاضیات کاربردی (استاد داور) ....

دکتر ابراهیم غلامی حاتم، استادیار فیزیک (نماینده تحصیلات تکمیلی) ....

مهر ماه ۱۳۹۲

ما حصل آموخته هایم را تقدیم می کنم به آنان که مهر آسمانی شان
آرام بخش آلام زمینی ام است

به استوار ترین تکیه گاهم ، دستان پر مهر پدرم ،
به سبز ترین نگاه زندگیم ، چشمان پر محبت مادرم .

تقدیر و تشکر...

از استاد با کمالات و شایسته؛ جناب آقای دکتر فرشید میرزائی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر عهده گرفتند کمال قدردانی و تشکر را دارم؛

و از استاد صبور و با تقوا، جناب آقای دکتر محسن اسماعیل بیگی، که زحمت مشاوره این پایان نامه را متقبل شدند نیز سپاسگزارم.

برای این اساتید گرانقدر طول عمر با عزت و موفقیت روزافزون آرزومندم.

نام خانوادگی دانشجو: قنبری نام: لیلی	
عنوان پایان نامه: توابع پایه ای دلتا و استفاده از آنها در حل دستگاه معادلات انتگرال	
استاد راهنما: فرشید میرزائی	
استاد مشاور: خسرو سایوند	
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی دانشگاه ملایر - گروه ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: مهرماه ۱۳۹۲ تعداد صفحات:۱۲۹	
کلید واژه ها: دستگاه معادلات انتگرال، توابع پایه ای دلتا، توابع متعامد مثلثی	

چکیده

در این پایان نامه، توابع دلتا بعنوان مجموعه ای جدید از توابع پایه ای معرفی می شوند. خواص و رابطه آنها با توابع متعامد مثلثی بیان می شوند. بعلاوه توابع پایه ای دلتا بعنوان یک روش مؤثر برای تقریب جواب دستگاه معادلات انتگرال بکار برده می شود. تحلیل همگرایی و مرتبه همگرایی این توابع در فصل ۶ بیان و با بیان چند مثال عددی کارایی این روش بررسی می شود.

فهرست مطالب

لیست جداول

لیست تصاویر

فصل ۱

تعاریف مقدماتی

تاریخچه

نظریه معادلات انتگرال یکی از مهمترین شاخه‌های آنالیز ریاضی است. معادلات انتگرال در خیلی از مسائل فیزیک و فنی مهندسی ظاهر می شوند. ظهور معادلات انتگرال به نظریه فوریه بر می گردد. بنیان گذاران اصلی نظریه معادلات انتگرال یک ریاضی دان ایتالیایی به نام ولترا[۱] (۱۹۴۰ – ۱۸۶۰) و ریاضی دان سوئدی فردهلم [۲] (۱۹۲۷ – ۱۸۶۶) به همراه هیلبرت [۳] (۱۹۴۳ – ۱۸۲۶) که ضمن کار روی بعضی مسائل مقدار مرزی نظریه توابع تحلیلی، با آنها برخورد کرد، می باشند. اما در حقیقت توسعه نظریه معادلات انتگرال تنها در اواخر قرن ۱۹ شروع شد. در ابتدا حل معادله انتگرال تحت عنوان معکوس گرفتن از انتگرال تلقی می شد. لیکن اولین بار اصطلاح معادله انتگرال توسط ریموند [۴]در سال ۱۸۸۸ پیشنهاد شد. برای اولین بار اصطلاح نوع اول ودوم که امروزه در معادلات انتگرال به کار می رود، توسط هیلبرت مطرح شد. از آن زمان به بعد تا عصر حاضر معادلات انتگرال موضوع تحقیقات ریاضیدانان زیادی بوده است. در سال ۱۸۹۶ پوانکاره[۵] معادله انتگرال زیر را معرفی کرد:

$$f(s) = g(s) + \lambda \int_a^b k(s,t) f(t) dt,$$

که متناظر با معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر می باشد:

$$\nabla f(s,t) + \lambda f(s,t) = g(s,t) \ ; \lambda \in R,$$

[۱] V. Volterra

[۲] I. Fredholm

[۳] D. Hilbert

[۴] B. Rreymond

[۵] H. Poincare

که معرف معادله حرکت موج است و در آن داریم :

$$\nabla = \frac{\partial^{2}}{\partial s^{2}} + \frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}} \ .$$

تحقیقات فردهلم جهت بدست آوردن جواب معادله حرکت موج منجر به ارایه قضایای فردهلم گردید که از قضایای بنیادی در معادلات انتگرال هستند می باشند.

هیلبرت که به اهمیت نظریه فردهلم پی برده بود، ثابت کرد که معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاصل از نوسانات یک صفحه می تواند منجر به یک معادله انتگرال فردهلم با هسته متقارن شود. او بازه انتگرال گیری را $[0,1]$ و هسته $k(s,t)$ را پیوسته فرض کرد. این قضایا ابتدا توسط فردهلم برای هسته های پیوسته ارائه شدند، لیکن بعدا توسط افراد دیگری برای هسته های کلی تری تعمیم یافتند.

روش های عددی متعددی برای حل معادلات انتگرال و دستگاه معادلات انتگرال خطی وغیر خطی موجود می باشد. اغلب این روشها از مجموعه ای از توابع متعامد برای بسط توابع مجهول و معلوم در معادلات انتگرال استفاده می کنند.

مالک نژاد و همکاران از توابع متعامد بلاک - پالس به عنوان توابع پایه ای استفاده کرده اند[۲۸،۲۹]. بابلیان وهمکارانش روشی برای حل عددی دستگاههای معادلات انتگرال فردهلم بر پایه تجزیه آدومیان پیشنهاد دادند [۲]. رشیدی نیا از توابع سینک برای حل این دستگاه ها استفاده کرد [۳۲]. در همه روش های ذکر شده ضرایب بسط توابع مجهول با حل دستگاه معادلات جبری بدست می آیند.

در این فصل ضمن معرفی معادلات انتگرال و انواع آن شرح مختصری بر هسته و ویژگی های فضای $L_۲$ خواهیم داشت.

۱.۱ فضای $L_۲$

تعریف ۱.۱ فضای $L_۲$ متشکل از توابع پیوسته و اندازه پذیری است که انتگرال مربع آنها موجود باشد، یعنی:

$$L_۲(a,b)=\left\{x(t)|\int_a^b |x(t)|^۲dt<\infty\right\}.$$

اگر $x(t)$ و $y(t)$ ، توابعی در $L_۲$ باشند، آنگاه ضرب داخلی (x,y) با رابطه زیر نشان داده می شود

$$(x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt,$$

که منظور از $\overline{y(t)}$, مزدوج مختلط تابع $y(t)$ می باشد.

تعریف ۲.۱ تابع $k(s,t)$ را بطور مربع انتگرال پذیر یا $L_۲-kernel$ می نامیم هرگاه سه شرط زیر برقرار باشند:

۱.$\forall s\in[a,b]\,;\int_a^b |k(s,t)|^۲dt<\infty,$

۲.$\forall t\in[a,b]\,;\int_a^b |k(s,t)|^۲ds<\infty,$

۳. $\int_a^b\int_a^b |k(s,t)|^۲dsdt<\infty\vee\int_a^b\int_a^b |k(s,t)|^۲dtds<\infty.$

در ضمن وقتی $k(s,t)\in L_۲$ باشد $\|k(s,t)\|$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\|k(s,t)\|=\left(\int_a^b\int_a^b |k(s,t)|^۲dtds\right)^{۱/۲}.$$

تعریف ۳.۱ شرط لیپ شیتس:

فرض کنیم $f(t)$ تابعی از R^p به R^q باشد، گوئیم $f(t)$ در شرط لیپ شیتس صدق می کند در صورتی که عدد ثابتی مانند $L > 0$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای تمام نقاط s و t در $D(f)$ داشته باشیم:

$$\|f(t) - f(s)\| \leq L\|t - s\|.$$

۲.۱ تعاریف و دسته بندی معادلات انتگرال

تعریف ۴.۱ یک معادله انتگرال معادله ایست که در آن تابع مجهول زیر علامت انتگرال قرار دارد. البته ممکن است تابع مجهول در خارج علامت انتگرال نیز باشد. فرم کلی معادله انتگرال خطی بصورت زیر است:

$$h(s)f(s) = g(s) + \lambda \int_a k(s,t)f(t)dt, \tag{۱.۱}$$

که در معادله فوق $f(s)$ تابع مجهول و $g(s), h(s)$ متعلق به $L_2[0,1]$توابعی معلوم می باشند. $k(s,t) \in L_2([0,1] \times [0,1])$ تابعی معلوم و دو متغیره است که هسته معادله انتگرال نامیده می شود که ممکن است تابعی حقیقی یا مختلط باشد. λ هم پارامتری معلوم و مخالف صفر است که می تواند حقیقی و یا مختلط باشد.

تذکر : منظور از حل معادله انتگرال تعیین تابع مجهول است بطوریکه در آن صدق کند. متداولترین معادلات انتگرال که در این پایان نامه با آن مواجه هستیم را می توان به دو گروه معادلات انتگرال فردهلم و معادلات انتگرال ولترا دسته بندی نمود.

تعریف ۵.۱ معادلات انتگرال فردهلم:

معادلات انتگرالی که در آنها حد بالای انتگرال گیری عدد ثابت b می باشد را معادلات انتگرال

فردهلم می نامیم. معادله انتگرال زیر فرم کلی معادله انتگرال فردهلم خطی می باشد:

$$h(s)f(s) = g(s) + \lambda \int_a^b k(s,t)f(t)dt, \qquad (۲.۱)$$

اگر در معادله بالا داشته باشیم:

$$h(s)f(s) = g(s) + \lambda \int_a^b k(s,t)u(s,t,f(s))dt, \qquad (۳.۱)$$

آنگاه آنرا معادله انتگرال فردهلم غیر خطی می نامیم.

تعریف ۶.۱ معادلات انتگرال ولترا:

معادلات انتگرالی که در آنها حد بالای انتگرال گیری متغیر s می باشد را معادلات انتگرال ولترا می نامیم. معادله انتگرال زیر فرم کلی معادله انتگرال ولترا خطی می باشد:

$$h(s)f(s) = g(s) + \lambda \int_a^s k(s,t)f(t)dt \ ; s \in [a,b], \qquad (۴.۱)$$

اگر در معادله بالا داشته باشیم:

$$h(s)f(s) = g(s) + \lambda \int_a^s k(s,t)u(s,t,f(s))dt \ ; s \in [a,b], \qquad (۵.۱)$$

آنگاه آنرا معادله انتگرال ولترا غیر خطی می نامیم.

۳.۱ دستگاه معادلات انتگرال

دستگاه معادلات انتگرال در این پایان نامه اغلب به دو دسته زیر تقسیم میشوند:

۱) دستگاه معادلات انتگرال فردهلم خطی و غیر خطی:

دستگاهی بفرم زیر که در آنها حد بالای انتگرال گیری عدد ثابت b می باشد را دستگاه معادلات انتگرال فردهلم غیر خطی می نامیم.

$$f_i(s) = g_i(s) + \sum_{j=۱}^{n} \int_a^b k_{i,j}(s,t)u_{i,j}(f_j(t))dt \ ; i = ۱, ۲, \cdots, n, \qquad (۶.۱)$$

اگر در دستگاه فوق تابع مجهول زیر علامت انتگرال خطی باشد، دستگاه معادلات انتگرال فردهلم خطی حاصل می شود.

در رابطه بالا $f_i(s) \in L_۲[\circ, ۱]$ ها برای $i = \circ, ۱, ۲, \cdots, n$ ، توابع مجهول و $g_i(s) \in L_۲[\circ, ۱]$ ها و $k_{i,j}(s,t) \in L_۲([\circ, ۱] \times [\circ, ۱])$ ها برای $i, j = \circ, ۱, ۲, \cdots, n$، توابع معلوم هستند. $u_{i,j}(f_j(t))$ ها چند جمله ای هایی از $f_j(t)$با ضرایب ثابت هستند، برای راحتی کار قرار می دهیم:

$$u_{i,j}(f_j(t)) = [f_j(t)]^{p_{i,j}} \; ; i, j = \circ, ۱, ۲, \cdots, n.$$

۲) دستگاه معادلات انتگرال ولترا خطی و غیر خطی:

دستگاهی بفرم زیر که در آنها حد بالای انتگرال گیری متغیر s می باشد، را دستگاه معادلات انتگرال ولترا غیر خطی می نامیم.

$$f_i(s) = g_i(s) + \sum_{j=۱}^{n} \int_{\circ}^{s} k_{i,j}(s,t) u_{i,j}(f_j(t)) dt; s \in [a,b] \; ; \; i = ۱, ۲, \cdots, n. \qquad (۷.۱)$$

اگر در دستگاه فوق تابع مجهول زیر علامت انتگرال خطی باشد، دستگاه معادلات انتگرال ولترا خطی حاصل می شود.

در رابطه بالا $f_i(s) \in L_۲[\circ, ۱]$ ها برای $i = \circ, ۱, ۲, \cdots, n$ ، توابع مجهول و $g_i(s) \in L_۲[\circ, ۱]$ ها و $k_{i,j}(s,t) \in L_۲([\circ, ۱] \times [\circ, ۱])$ ها برای $i, j = \circ, ۱, ۲, \cdots, n$، توابع معلوم هستند. $u_{i,j}(f_j(t))$ ها چند جمله ای هایی از $f_j(t)$با ضرایب ثابت هستند، برای راحتی کار قرار می دهیم:

$$u_{i,j}(f_j(t)) = [f_j(t)]^{p_{i,j}} \; ; i, j = \circ, ۱, ۲, \cdots, n.$$

دراین پایان نامه می خواهیم دستگاه معادلات انتگرال فردهلم و ولترا خطی و غیرخطی را به وسیله توابع پایه ای دلتا حل کنیم لذا در فصل بعد به معرفی توابع متعامد پایه ای پیش نیاز یعنی توابع متعامد بلاک–پالس و مثلثی می پردازیم.

فصل ۲

توابع متعامد بلاک - پالس و مثلثی

مقدمه

در این فصل ابتدا به معرفی توابع متعامد بلاک -پالس و مثلثی پرداخته و سپس خواص اساسی آنها نظیر متعامد بودن را مورد بررسی قرار می دهیم. همچنین ماتریس عملیاتی انتگرال متناظر با آنها را در حالت کلی معرفی می کنیم. در ادامه نمایشی جدید از فرم برداری و بسط توابع بر اساس آنها ارایه می کنیم.

۱.۲ توابع متعامد بلاک - پالس [۱۵]

مجموعه m عضوی از توابع متعامد بلاک -پالس $\phi_i(s)$ برای $i = ۰, ۱, ۲, \cdots, m-۱$ روی بازه $[۰, T)$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$\phi_i(s) = \begin{cases} ۱ & , \quad \frac{iT}{m} \leq s < \frac{i+۱}{m} \\ ۰ & , \quad \text{در غیر اینصورت} \end{cases} , \qquad (۱.۲)$$

که در آن m یک عدد صحیح مثبت و $\phi_i(s)$ ، $i-$ امین تابع بلاک -پالس می باشد. چنانچه مساله ای در بازه $t \in [a, b]$مورد مطالعه باشد، همواره می توانیم آن را با تغییر متغیر $s = \frac{t-a}{b-a}$ به مساله هم ارز آن در بازه $[۰, ۱)$ تبدیل کنیم. بنابراین با فرض $h = \frac{۱}{m}$ ، توابع متعامد بلاک–پالس روی بازه $[۰, ۱)$ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\phi_i(s) = \begin{cases} ۱ & , \quad ih \leq s < (i+۱)h \\ ۰ & , \quad \text{در غیر اینصورت} \end{cases} .$$

شکل (۱.۲) یک مجموعه از توابع بلاک -پالس را برای $m = ۴$ روی بازه $[۰, ۱)$ نشان می دهد.