دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر
گروه ریاضی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض ، گرایش توپولوژی

عنوان

توابعی که متمم‌صفرمجموعه‌ها را به متمم‌صفرمجموعه‌ها تصویر می‌کنند

استادان راهنما

پروفسور امید علی شهنی کرمزاده و پروفسور فریبرز آذرپناه

استاد مشاور

دکتر معصومه اعتبار

پژوهشگر

وفا مجیدی

۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: مجیدی نام: وفا

عنوان: توابعی که متمم‌صفرمجموعه‌ها را به متمم‌صفرمجموعه‌ها تصویر می‌کنند

استادان راهنما: پروفسور امید علی شهنی کرمزاده و پروفسور فریبرز آذرپناه

استاد مشاور: دکتر معصومه اعتبار

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: توپولوژی

دانشگاه: شهید چمران اهواز دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۱۱۹

واژگان کلیدی: تابع باز، تابع متمم‌صفرمجموعه‌نگهدار، تابع $z-$باز، $F-$فضا، $SV-$فضا، رتبه متناهی

چکیده

تابع f از فضای توپولوژی X به Y را $z-$باز می‌نامیم، هرگاه برای هر همسایگی متمم‌صفرمجموعه‌ای H برای یک صفرمجموعه‌ی Z در X، تصویر $f(H)$ یک همسایگی برای $\mathrm{cl}_Y(f(Z))$ در Y باشد. می‌گوییم f ویژگی $z-$تفکیک‌پذیری دارد، هرگاه برای دو متمم‌صفرمجموعه‌ی U و V و صفرمجموعه‌ی Z در X که $U \subseteq Z \subseteq V$، یک صفرمجموعه‌ی Z' در Y وجود داشته باشد که $f(U) \subseteq Z' \subseteq f(V)$.

یک تابع پوشا، $z-$باز است، هرگاه متمم‌صفرمجموعه‌ها را به متمم‌صفرمجموعه‌ها تصویر کند و دارای ویژگی $z-$تفکیک‌پذیری باشد.

در این پایان‌نامه، توابع $z-$باز و دیگر توابعی را که متمم‌صفرمجموعه‌ها را به متمم‌صفرمجموعه‌ها تصویر می‌کنند، بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم که اگر f یک تابع پیوسته و $z-$باز باشد، آن‌گاه تعمیم استون-چک آن باز است. از این موضوع برای نشان دادن بعضی از ویژگی‌های مربوط به $F-$فضاها که تحت توابع پیوسته و $z-$باز حفظ می‌شوند، استفاده می‌شود.

بارها گویم و گفتم در دلم

نیست جز تو همدل و همسفرم

شمه ای از لطف تو عمر من است

هر چه در وصف تو گویم قاصر است

گرچه این مکتوب از لطف تو بود

ای خدا تقدیم تو، کار تو بود

سپاس گزاری...

او گفت مرا که شکر گو آن که تو را در مسیر من نهاد.

خداوند را چگونه فراموش کنم، مهربانیش را آن هنگام که دستانم را به نشانه‌ی درخواست به بارگاهت بلند می‌کردم و لطفت چنان حکیمانه می‌بارید و مرا از حضورت لبریز می‌کرد تا احساس تنهایی نکنم و چگونه شکر گویم تو را که بر این مهم نتوانم و می‌دانم که ستایش‌هایم در برابر عظمت وجودت ذره‌ای بیش نیست هر چند بزرگواری و کرامت زبان شکر مرا ارج می‌نهد. خداوندا تنها چیزی که بر زبانم می‌نشیند این است که تو را دوست می‌دارم و بابت همه چیز سپاس گزارم.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ اساتید راهنمای خود، جناب آقای پروفسور امید علی شهنی کرمزاده و جناب آقای پروفسور فریبرز آذرپناه، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از سرکار خانم دکتر معصومه اعتبار که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

همچنین لازم می‌دانم که از تمامی اساتید مهربانم خصوصاً دکتر سینا هدایتیان و دکتر سید جمال هاشمی زاده صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که در تمامی طول تحصیل با کمک‌های بی شائبه‌ی خود مرا مورد لطف و عنایت قرار داده و زمینه را برای پیشرفت اینجانب فراهم آورده‌اند.

در پایان از پدر و مادر عزیزم با تمام وجود تشکر می‌کنم، سالیان سال در شکفتن و پربار نمودن درخت زندگی من تلاش کرده‌اند و با تمام پاکی، صبر و مروتشان اندیشه‌ی مرا روشن نموده‌اند. مخلوقاتی که خداوند بر اوان زندگیم مرا با آن‌ها آشنا کرد و اکنون که راهم شیرین‌تر و واضح‌تر شد تا حدی توانسته‌ام منزلتشان را اندکی درک کنم. امیدوارم که در ادامه‌ی راه بتوانم عصای دستان آن‌ها باشم و ذره‌ای هر چند ناچیز از زحمات بی‌شائبه‌شان را جبران نمایم.

وفا مجیدی
۱۳۹۲

فهرست مطالب

پیشگفتار ۱

۱ تعاریف و مفاهیم اولیه ۳

۱.۱ مفاهیم جبری ۳

۲.۱ مفاهیم توپولوژی ۷

۳.۱ حلقه‌ی توابع پیوسته روی یک فضا ۱۵

۲ توابعی که متمم‌صفرمجموعه‌ها را به متمم‌صفرمجموعه‌ها تصویر می‌کنند ۵۷

۱.۲ توابع متمم‌صفرمجموعه‌نگهدار، z−باز و قویاً باز ۵۷

۳ تعمیم استون-چک باز توابع پیوسته ۷۳

۱.۳ تعمیم استون-چک باز توابع پیوسته ۷۳

۲.۳ چند نتیجه در حالت‌های خاص ۸۲

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۱۰۵

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۱۱۰

مراجع ۱۱۶

در فصل دوم، ارتباط میان توابعی را که تعریف کردیم، شرح می‌دهیم و ویژگی اساسی این توابع را بیان می‌کنیم. در فصل سوم، نشان می‌دهیم که اگر $f: X \to Y$ یک تابع پیوسته و $z-$باز باشد، آن‌گاه تعمیم استون-چک آن از βX به βY باز می‌باشد و شرطی را روی تابع پیوسته ارائه می‌دهیم که تحت آن تعمیم استون-چک آن باز است، اگر و تنها اگر $z-$باز باشد. در ادامه‌ی فصل سوم به بیان این حقیقت می‌پردازیم که توابع باز و پیوسته‌ی تعریف شده روی فضاهای فشرده چندین ویژگی مربوط به ویژگی $F-$فضا را حفظ می‌کنند و نتایج فصل سوم نشان می‌دهد که توابع $z-$باز و پیوسته، $F-$فضاها، فضاهای به طور متناهی $F-$فضا ، SV فضاهای با حداکثر از رتبه‌ی دو، فضاهای با رتبه‌ی متناهی و شبه $F-$فضاها را حفظ می‌کنند.

فصل ۱
تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل با ارائه‌ی مختصری از تعاریف و قضایای جبری و مفاهیم توپولوژی به معرفی ابزار لازم برای مطالعه‌ی مباحث بعدی این پایان‌نامه می‌پردازیم. در ادامه‌ی فصل، ارتباط خواص توپولوژی فضای X و خواص جبری حلقه‌ی توابع پیوسته‌ی حقیقی روی آن؛ یعنی، $C(X)$ که مبحث اساسی حلقه‌ی توابع پیوسته است را بیان می‌کنیم.

۱.۱ مفاهیم جبری

در ابتدا مفهوم حلقه و زیرحلقه را دانسته شده فرض می‌کنیم و کلیه‌ی حلقه‌های این پایان‌نامه را یکدار در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید S یک مجموعه‌ی دلخواه و ناتهی و $\leq$ یک ترتیب جزئی روی آن باشد؛ یعنی، برای هر $a, b, c \in S$، داشته باشیم:

۱) $a \leq a$؛

۲) اگر $a \leq b$ و $b \leq a$، آن‌گاه $a = b$؛

۳) اگر $a \leq b$ و $b \leq c$، آن‌گاه $a \leq c$.

در این صورت $(S, \leq)$ را یک مجموعه‌ی مرتب جزئی می‌نامیم و در صورتی که هر دو عضو

دلخواه S مقایسه‌پذیر باشند؛ یعنی، برای هر $a,b \in S$، $a \leq b$ یا $b \leq a$، آن‌گاه $(S, \leq)$ را یک مجموعه‌ی مرتب کلی (زنجیر) می‌گوییم.

لم ۲.۱.۱ (لم زورن). *هرگاه S یک مجموعه‌ی مرتب جزئی ناتهی باشد که هر زنجیر در S کران بالایی در S داشته باشد، آن‌گاه S دارای عضو ماکسیمال است و به طور معادل، هرگاه S یک مجموعه‌ی مرتب جزئی ناتهی باشد که هر زنجیر در S کران پایینی در S داشته باشد، آن‌گاه S دارای عضو مینیمال است.*

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید R حلقه‌ای با واحد مخالف صفر باشد. عنصر a از حلقه‌ی R:
۱) یک یکه‌ی R است، اگر دارای معکوس ضربی در R باشد. هرگاه هر عنصر ناصفر R یکه باشد، آن‌گاه R را یک حلقه‌ی بخشی می‌نامیم؛
۲) پوچتوان است، هرگاه عدد طبیعی n موجود باشد که $a^n = ۰$؛
۳) مقسوم علیه راست صفر R است، اگر $۰ \neq s \in R$ وجود داشته باشد که $sa = ۰$. مقسوم علیه چپ صفر به طور مشابه تعریف می‌شود. عنصری که مقسوم علیه راست و چپ صفر باشد را مقسوم علیه صفر می‌نامیم.

تعریف ۴.۱.۱. دامنه‌ی صحیح D یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر با واحد مخالف صفر است که مقسوم علیه صفر نداشته باشد.

تعریف ۵.۱.۱. هر میدان، یک حلقه‌ی بخشی تعویض‌پذیر است.

تعریف ۶.۱.۱. نگاشت ϕ از حلقه‌ی R به توی حلقه‌ی R' یک همریختی است، هرگاه به ازای هر $a,b \in R$ داشته باشیم $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$ و $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید نگاشت $\phi : R \to R'$ یک همریختی حلقه‌ها باشد. زیرحلقه‌ی $\phi^{-۱}[۰'] = \{r \in R : \ \phi(r) = ۰'\}$ از R هسته‌ی ϕ است و با $Ker\phi$ نشان داده می‌شود.

واضح است که ϕ یک نگاشت یک به یک می‌باشد، اگر و تنها اگر $Ker(\phi) = \{0\}$. همچنین $Im\phi = \{\phi(r) \in R' :\ r \in R\}$ زیرحلقه‌ای از R' است که تصویر ϕ خواهد بود.

قضیه ۸.۱.۱. *هرگاه* $\phi : R \to R'$ *یک همریختی حلقه‌ها باشد، آن‌گاه* ϕ *یک یکریختی حلقه‌ها مانند* $\frac{R}{Ker\phi} \cong Im\phi$ *را القا می‌کند.*

تعریف ۹.۱.۱. زیرمجموعه‌ی I از حلقه‌ی R را یک ایدآل چپ (راست) می‌نامیم، هرگاه I زیرحلقه‌ی R باشد و برای هر $x \in I$ و هر $r \in R$، $rx \in I$ ($xr \in I$). اگر I در حلقه‌ی R ایدآل راست و چپ باشد، آن را ایدآل حلقه‌ی R می‌نامیم. چنانچه ایدآلی با حلقه برابر نباشد، آن را ایدآل سره (محض) می‌گوییم.

مثال ۱۰.۱.۱. واضح است در حلقه‌ی R، (0) و R دو ایدآل می‌باشند که به آن‌ها ایدآل‌های بدیهی حلقه گفته می‌شود.

تعریف ۱۱.۱.۱. یک ایدآل ماکسیمال حلقه‌ی R ایدآلی مانند M است که $M \neq R$ و هیچ ایدآل سره‌ی N از R و در حقیقت شامل M وجود نداشته باشد و همچنین M ایدآل ماکسیمال حلقه‌ی تعویض‌پذیر R است، اگر و تنها اگر برای هر $f \in R\backslash M$، $g \in R$ وجود داشته باشد که $1 - fg \in M$.

قضیه ۱۲.۱.۱ (کرول). *هر حلقه‌ی یکدار دارای یک ایدآل ماکسیمال است. در واقع، هر ایدآل سره در* R *مشمول یک ایدآل ماکسیمال می‌باشد.*

برهان. با استفاده از لم زورن ثابت می‌شود. □

تعریف ۱۳.۱.۱. ایدآل $P \neq R$ در حلقه‌ی تعویض‌پذیر R، یک ایدآل اول است، هرگاه به ازای هر $a, b \in R$ که $ab \in P$ نتیجه بگیریم $a \in P$ یا $b \in P$.

قضیه ۱.۱.۱۴. *فرض کنید R حلقه‌ی تعویض‌پذیر با واحد بوده و $N \neq R$ یک ایدآل در R باشد. در این صورت $\frac{R}{N}$ یک دامنه‌ی صحیح است، اگر و تنها اگر N یک ایدآل اول در R باشد.*

نکته ۱.۱.۱۵. *به ازای حلقه‌ی تعویض‌پذیر R با واحد، ایدآل M از R ماکسیمال است، اگر و تنها اگر $\frac{R}{M}$ میدان باشد.*

نتیجه ۱.۱.۱۶. *هر ایدآل ماکسیمال در حلقه‌ی تعویض‌پذیر R با واحد، یک ایدآل اول است.*

قضیه ۱.۱.۱۷. *فرض کنید R حلقه‌ی یکدار و I ایدآلی از R باشد. در این صورت $I = R$، اگر و تنها اگر I شامل یک عنصر یکال باشد.*

لم ۱.۱.۱۸. *هرگاه ایدآل‌های اول P و Q در حلقه‌ی R چنان باشند که هیچ یک از آن‌ها شامل دیگری نباشد، آن‌گاه $P \cap Q$ اول نیست.*

نمادگذاری. ۱) مجموعه‌ی تمام ایدآل‌های اول حلقه‌ی تعویض‌پذیر R را با $Spec(R)$ نمایش می‌دهیم؛

۲) فرض کنید R یک حلقه و I ایدآلی در R باشد. در این صورت قرار می‌دهیم

$$\sqrt{I} = rad(I) = \{r \in R : \ r^n \in I \ , \ \exists n \in \mathbb{N}\}.$$

قضیه ۱.۱.۱۹. *هرگاه R یک حلقه و I یک ایدآل در R باشد، آن‌گاه $\sqrt{I} = \cap_{I \subseteq P \in Spec(R)} P$.*

تعریف ۱.۱.۲۰. ایدآل اول P در حلقه‌ی تعویض‌پذیر R را یک ایدآل اول مینیمال ایدآل سره‌ی I می‌نامیم، هرگاه $I \subseteq P$ و ایدآل اولی مانند P' موجود نباشد که $I \subseteq P' \subseteq P$. مجموعه‌ی تمام ایدآل‌های اول مینیمال ایدآل سره‌ی I را با $Min(I)$ نمایش می‌دهیم. در حالت خاص که $I = ۰$، $Min(۰)$ را با $Min(R)$ نشان می‌دهیم و آن را مجموعه‌ی ایدآل‌های اول مینیمال حلقه‌ی R می‌نامیم.

گزاره ۲۱.۱.۱. *فرض کنید R یک حلقه و I یک ایدآل سره مشمول در ایدآل اول Q باشد ($I \subseteq Q$). در این صورت ایدآل اول مینیمال P از R وجود دارد که $I \subseteq P \subseteq Q$.*

نتیجه ۲۲.۱.۱. *هر ایدآل اول در حلقه‌ی R، شامل یک ایدآل اول مینیمال خواهد بود.*

۲.۱ مفاهیم توپولوژی

در این بخش، به طور گذرا نگاهی به مفاهیم مقدماتی و فضاهای فشرده، هاسدورف، نرمال، فشرده موضعی و فشرده‌سازی تک نقطه‌ای می‌پردازیم و مفاهیم پیوستگی، همسایگی یک نقطه، پایه و زیرپایه و توپولوژی حاصل‌ضربی را دانسته شده فرض می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید X یک مجموعه‌ی دلخواه (ناتهی) و $\mathcal{P}(X)$ مجموعه‌ی توانی آن باشد، گردایه‌ی $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ را یک توپولوژی روی X می‌نامیم، هرگاه

۱) $X, \emptyset \in \mathcal{T}$؛

۲) اگر $A, B \in \mathcal{T}$، آن‌گاه $A \cap B \in \mathcal{T}$. به عبارت دیگر $\mathcal{T}$ تحت اشتراک متناهی بسته باشد؛

۳) اگر برای هر $\alpha \in S$ داشته باشیم $A_\alpha \in \mathcal{T}$، آن‌گاه $\cup_{\alpha \in S} A_\alpha \in \mathcal{T}$. به عبارت دیگر $\mathcal{T}$ تحت اجتماع دلخواه بسته باشد.

مجموعه‌ی X همراه با توپولوژی $\mathcal{T}$ را یک فضای توپولوژی می‌گوییم و به صورت $(X, \mathcal{T})$ و یا به طور خلاصه با X نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۲.۱. زیرمجموعه‌ی $A \subseteq X$ را در X بسته می‌نامیم، هرگاه $A^c \in \mathcal{T}$؛ یعنی، A^c در X باز باشد.

مثال ۳.۲.۱. اگر X یک مجموعه‌ی دلخواه ناتهی باشد، آن‌گاه $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ به وضوح یک توپولوژی روی X است که آن را توپولوژی گسسته یا مجزا می‌گوییم. در این توپولوژی هر زیرمجموعه، باز و بسته است.

نمادگذاری. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژی باشد و $A \subseteq X$. در این صورت
۱) $x \in A$ را یک نقطه‌ی درونی A می‌نامیم، هرگاه $G \in \mathcal{T}$ موجود باشد که $x \in G \subseteq A$.
مجموعه‌ی تمام نقاط درونی A را با A° یا $\mathrm{int}_X A$ یا $\mathrm{int}A$ نشان می‌دهیم.
۲) $x \in X$ را یک نقطه‌ی بستاری A می‌نامیم، هرگاه برای هر $G \in \mathcal{T}$ شامل x داشته باشیم $G \cap A \neq \emptyset$. مجموعه‌ی تمام نقاط بستاری A را با $\overline{A}$ یا $\mathrm{cl}_X A$ یا $\mathrm{cl}A$ نشان می‌دهیم.
۳) $x \in X$ را نقطه‌ی مرزی A می‌نامیم، هرگاه برای هر $G \in \mathcal{T}$ شامل x داشته باشیم $G \cap A^c \neq \emptyset$ و $G \cap A \neq \emptyset$. مجموعه‌ی تمام نقاط مرزی را با $br(A)$ یا $Fr(A)$ یا δA نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۴. فرض کنید X یک فضای توپولوژی باشد و $A \subseteq X$. در این صورت
۱) $A \subseteq X$ را در X چگال می‌نامیم، هرگاه $\overline{A} = X$؛
۲) نقطه‌ی $x \in X$ را نقطه‌ی تنهای A می‌نامیم، هرگاه مجموعه‌ی باز G شامل x موجود باشد که $G \cap A = \{x\}$.

نکته ۱.۲.۵. *فضای X گسسته است، اگر و تنها اگر هر نقطه‌اش تنها باشد.*

تعریف ۱.۲.۶. فرض کنید X یک فضای توپولوژی باشد و $A \subseteq X$. در این صورت
۱) مجموعه‌ی A را در X یک $G_\delta-$مجموعه می‌نامیم، هرگاه بتوان آن را به صورت اشتراک شمارایی از مجموعه‌های باز در X نوشت؛
۲) مجموعه‌ی A را در X یک $F_\sigma-$مجموعه می‌نامیم، هرگاه بتوان آن را به صورت اجتماع شمارایی از مجموعه‌های بسته در X نوشت.

تعریف ۱.۲.۷. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژی باشد و $Y \subseteq X$. در این صورت گردایه‌ی $\mathcal{T}_Y = \{G \cap Y :\ G \in \mathcal{T}\}$ یک توپولوژی روی Y است. این توپولوژی را توپولوژی نسبی یا القایی برای Y گفته و Y همراه با این توپولوژی را یک زیرفضای X می‌نامیم.

قضیه ۸.۲.۱. *فرض کنید X یک فضای توپولوژی و Y زیرفضای آن باشد. در این صورت*

۱) *$H \subseteq Y$ در Y باز است، اگر و تنها اگر $H = G \cap Y$ که G در X باز باشد؛*

۲) *$F \subseteq Y$ در Y بسته است، اگر و تنها اگر $F = K \cap Y$ که K در X بسته باشد؛*

۳) *اگر $E \subseteq Y$، آن‌گاه $cl_Y E = Y \cap (cl_X E)$.*

برهان. به مرجع [۱] مراجعه کنید. □

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد و $\beta \subseteq \mathcal{P}(X)$. گردایه‌ی β یک پایه‌ی باز برای یک توپولوژی روی X است، اگر

۱) $X = \cup\beta$؛

۲) برای هر $B_۱, B_۲ \in \beta$ و هر $p \in B_۱ \cap B_۲$، $B_۳ \in \beta$ وجود داشته باشد که

$$p \in B_۳ \subseteq B_۱ \cap B_۲.$$

نتیجه ۱۰.۲.۱. *فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد و $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$. در این صورت گردایه‌ی $\mathcal{F}$ یک پایه‌ی بسته برای یک توپولوژی روی X است، اگر*

۱) $\cap\mathcal{F} = \emptyset$؛

۲) *برای هر $F_۱, F_۲ \in \mathcal{F}$ داشته باشیم $F_۱ \cup F_۲ \in \mathcal{F}$.*

قضیه ۱۱.۲.۱. *فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژی و $f : X \to Y$ یک تابع باشد. در این صورت احکام زیر معادل‌اند:*

۱) *f پیوسته است؛*

۲) *برای هر مجموعه‌ی باز V در Y، $f^{-۱}(V)$ در X باز است؛*

۳) *برای هر مجموعه‌ی بسته‌ی H در Y، $f^{-۱}(H)$ در X بسته است؛*

۴) *برای هر $E \subseteq X$ داریم $f(cl_X E) \subseteq cl_Y f(E)$.*

برهان. به مرجع [۱] مراجعه کنید. □

تعریف ۱.۲.۱۲. فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژی و $f : X \to Y$ یک تابع باشد. در این صورت

۱) f یک تابع باز نامیده می‌شود، هرگاه برای هر مجموعه‌ی باز G در X، $f(G)$ در Y باز باشد؛

۲) f یک تابع بسته نامیده می‌شود، هرگاه برای هر مجموعه‌ی بسته‌ی E در X، $f(E)$ در Y بسته باشد.

نکته ۱.۲.۱۳. ۱) *اگر $f : X \to Y$ یک تابع بسته باشد و $A \subseteq X$، آن‌گاه خواهیم داشت* $cl_Y f(A) \subseteq f(cl_X A)$؛

۲) *اگر $f : X \to Y$ یک تابع باز باشد و $A \subseteq X$، آن‌گاه داریم* $f(int_X A) \subseteq int_Y f(A)$.

قضیه ۱.۲.۱۴. *فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژی و تابع $f : X \to Y$ پیوسته باشد. اگر A زیرفضای X باشد، آن‌گاه تابع $f|_A : A \to Y$ نیز پیوسته خواهد بود.*

برهان. به مرجع [۱] مراجعه کنید. □

قضیه ۱.۲.۱۵ (لم چسب)**.** *فرض کنید $A, B \subseteq X$، $X = A \cup B$ و A و B هر دو در X باز (بسته) باشند. به علاوه تابع $f : X \to Y$ موجود باشد که توابع $f|_A$ و $f|_B$ پیوسته باشند. در این صورت تابع f روی فضای X پیوسته است.*

برهان. به مرجع [۱] مراجعه کنید. □

قضیه ۱.۲.۱۶. *اگر برای هر $\alpha \in S$، X_α یک فضای توپولوژی و $\prod_{\alpha \in S} X_\alpha$ فضای حاصل‌ضرب باشد، آن‌گاه برای هر $\beta \in S$، نگاشت تصویری $\pi_\beta : \prod_{\alpha \in S} X_\alpha \to X_\beta$ پیوسته و باز است.*

برهان. به مرجع [۱] مراجعه کنید. □

مفهوم هاسدورف به طور طبیعی از مطالعه‌ی خط حقیقی ناشی نمی‌شود، بلکه بر اساس ضرورت مطالعه‌ی عمیق توپولوژی حاصل شده است.

تعریف ۱۷.۲.۱. فضای توپولوژی X را یک فضای T_1 می‌گوییم، هرگاه برای هر $x, y \in X$ و $x \neq y$، دو مجموعه‌ی باز G و H در X وجود داشته باشند که $x \in G$، $y \notin G$ و $y \in H$، $x \notin H$.

تعریف ۱۸.۲.۱. فضای X را هاسدورف یا T_2 می‌گوییم، هرگاه برای هر $x, y \in X$ و $x \neq y$، دو مجموعه‌ی باز و مجزای G و H در X وجود داشته باشند که $x \in G$ و $y \in H$. به عبارت دیگر، X یک فضای هاسدورف است، هرگاه هر دو نقطه‌ی متمایز در آن را بتوان با دو مجموعه‌ی باز و مجزا از هم جدا کرد.

تذکر ۱۹.۲.۱. *آشکارا هر فضای T_2 یک فضای T_1 است ولی هر فضای T_1 لزوماً T_2 نیست.*

نکته ۲۰.۲.۱. *زیرفضای یک فضای هاسدورف و حاصل‌ضرب هر تعداد فضای هاسدورف، هاسدورف خواهد بود.*

لم ۲۱.۲.۱. *فرض کنید X یک فضای توپولوژی، $A \subseteq X$ و Z هاسدورف باشد. در این صورت هر تابع پیوسته‌ی $f : A \to Z$ حداکثر دارای یک توسیع پیوسته‌ی $g : \overline{A} \to Z$ خواهد بود.*

تعریف ۲۲.۲.۱. فضای توپولوژی X را کاملاً منظم می‌نامیم، هرگاه برای هر مجموعه‌ی بسته‌ی A در X و هر $x \in X \setminus A$، تابع پیوسته‌ی $f : X \to [0, 1]$ وجود داشته باشد که $f(x) = 0$ و $f(A) = \{1\}$.

تذکر ۲۳.۲.۱. *آشکار است که زیرفضای هر فضای کاملاً منظم، کاملاً منظم می‌باشد.*

تعریف ۲۴.۲.۱. فضای کاملاً منظم و T_1 را فضای تیخونوف (فضای $T_{3\frac{1}{2}}$) می‌نامیم.

در این پایان‌نامه همه‌ی فضاهای توپولوژی مورد نظر را تیخونوف فرض می‌کنیم.

تعریف ۲۵.۲.۱. فضای X را یک فضای نرمال می‌نامیم، هرگاه برای هر دو مجموعه‌ی بسته و مجزای E و F در X، دو مجموعه‌ی باز و مجزای G و H در X وجود داشته باشند که $E \subseteq G$ و $F \subseteq H$.

نکته ۲۶.۲.۱. *آشکار است که هر فضای نرمال، کاملاً منظم می‌باشد.*

لم ۲۷.۲.۱ (لم یوریسون). *فضای توپولوژی X نرمال است، اگر و تنها اگر برای هر دو مجموعه‌ی بسته و مجزای F_1 و F_2 در X، تابع پیوسته‌ی $f : X \to [0, 1]$ وجود داشته باشد که $f(F_1) = \{0\}$ و $f(F_2) = \{1\}$.*

قضیه ۲۸.۲.۱. *فضای X نرمال است، اگر و تنها اگر برای هر مجموعه‌ی بسته‌ی F و هر مجموعه‌ی باز U شامل F در X، یک مجموعه‌ی باز V در X وجود داشته باشد که $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

برهان. به مرجع [۱] مراجعه کنید. □

تعریف ۲۹.۲.۱. اگر X یک فضای توپولوژی باشد و $A \subseteq X$، آن‌گاه A را فشرده می‌نامیم، هرگاه هر پوشش باز برای A دارای یک زیرپوشش متناهی برای A باشد.

تعریف ۳۰.۲.۱. فرض کنید X فضای توپولوژی باشد. گردایه‌ی $\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ را دارای خاصیت اشتراک متناهی می‌گوییم، هرگاه اشتراک هر تعداد متناهی از عناصر $\mathcal{A}$ ناتهی باشد. وقتی $\cap_{G \in \mathcal{A}} G \neq \emptyset$، آن‌گاه می‌گوییم $\mathcal{A}$ اشتراک ناتهی دارد و می‌نویسیم $\cap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

قضیه ۳۱.۲.۱. *برای فضای توپولوژی X، احکام زیر معادل‌اند:*

۱) *فضای توپولوژی X فشرده است؛*

۲) *هر گردایه از مجموعه‌های بسته با خاصیت اشتراک متناهی، دارای اشتراک ناتهی است.*

برهان. به مرجع [۱] مراجعه کنید. □

قضیه ۳۲.۲.۱. *احکام زیر برقرارند:*

۱) *هر مجموعه‌ی بسته دریک فضای فشرده، فشرده است؛*

۲) *هر زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی یک فضای هاسدورف، بسته است.*

برهان. به مرجع [۱] مراجعه کنید. □

قضیه ۳۳.۲.۱. *هر فضای فشرده و هاسدورف، نرمال است.*

برهان. به مرجع [۱] مراجعه کنید. □

قضیه ۳۴.۲.۱. *اگر X و Y دو فضای توپولوژی، $f : X \to Y$ یک تابع پیوسته و $A \subseteq X$ در X فشرده باشد، آن‌گاه $f(A)$ نیز در Y فشرده است.*

برهان. به مرجع [۱] مراجعه کنید. □

نکته ۳۵.۲.۱. *فرض کنید X فضایی فشرده، فضای Y هاسدورف و تابع $f : X \to Y$ پیوسته باشد. در این صورت f یک تابع بسته است.*

قضیه ۳۶.۲.۱. *فضای حاصل‌ضرب $\prod_{\alpha \in S} X_\alpha$ فشرده است، اگر و تنها اگر برای هر $\alpha \in S$، X_α فشرده باشد.*

برهان. به مرجع [۱] مراجعه کنید. □

تعریف ۳۷.۲.۱. فضای X فشرده موضعی است، اگر هر همسایگی از یک نقطه‌ی فضای X، شامل یک همسایگی فشرده از آن نقطه باشد.

نکته ۳۸.۲.۱. *فضای X فشرده موضعی است، هرگاه هر نقطه در X دارای یک همسایگی فشرده باشد.*

تعریف ۳۹.۲.۱. فرض کنید X فضای هاسدورف و فشرده موضعی باشد که فشرده نیست و $x^* \notin X$. قرار می‌دهیم $X^* = X \cup \{x^*\}$. توپولوژی زیر را روی X^* قرار می‌دهیم.

۱) X^* در X^* باز است؛

۲) هر مجموعه‌ی باز در X در X^* نیز باز است؛

۳) $X^* \setminus A$ که $A \subseteq X$ در X فشرده است، در X^* نیز باز می‌باشد. X^* فشرده و هاسدورف است. همچنین X در X^* چگال می‌باشد. X^* را فشرده شده‌ی تک نقطه‌ای X می‌نامیم.

گزاره ۴۰.۲.۱. *هر فضای هاسدورف و فشرده موضعی، کاملاً منظم است.*

برهان. با توجه به تعریف فشرده‌سازی تک نقطه‌ای به سادگی اثبات می‌شود. □

گزاره ۴۱.۲.۱. *هر فضای هاسدورف و فشرده، فشرده موضعی است.*

برهان. واضح است. □

توجه می‌کنیم عکس گزاره‌ی ۴۱.۲.۱، لزوماً برقرار نیست. به عنوان مثال، فضای $\mathbb{R}$ با توپولوژی معمولی، هاسدورف و فشرده موضعی است ولی فشرده نمی‌باشد.

نکته ۴۲.۲.۱. *هر زیرفضای باز (بسته) یک فضای فشرده موضعی، فشرده موضعی است.*

قضیه ۴۳.۲.۱. *هرگاه فضای T هاسدورف و $X \subseteq T$ در T چگال باشد، آن‌گاه هر همسایگی فشرده در X یک همسایگی در T خواهد بود.*

برهان. به مرجع [۷] مراجعه کنید. □

نتیجه ۴۴.۲.۱. *هرگاه X در فضای هاسدورف T چگال باشد و $p \in X$ یک نقطه‌ی منفرد X باشد، آن‌گاه p یک نقطه‌ی منفرد T نیز خواهد بود.*

نتیجه ۴۵.۲.۱. *هرگاه X فشرده موضعی و T هاسدورف بوده و X در T چگال باشد، آن‌گاه X در T باز است.*

برهان. به مرجع [۷] مراجعه کنید. □

۳.۱ حلقه‌ی توابع پیوسته روی یک فضا

معرفی حلقه‌ی توابع پیوسته

در این بخش، با حلقه‌ی توابع پیوسته آشنا خواهیم شد و دو مجموعه‌ی مهم در فضای توپولوژی X؛ یعنی، صفرمجموعه‌ها و متمم آن‌ها را معرفی کرده و به بیان ویژگی‌های اساسی آن‌ها که کاربردهای فراوان دارند، می‌پردازیم.

نمادگذاری. فرض کنید $(S,\leq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی باشد. هرگاه $a,b\in S$ و $\sup\{a,b\}$ (کوچکترین عضو $c\in S$ که $a\leq c$ و $b\leq c$) موجود باشد، آن‌گاه آن را با نماد $a\vee b=\sup\{a,b\}$ نمایش می‌دهیم. به طور مشابه، هرگاه $\inf\{a,b\}$ (بزرگترین عضو $d\in S$ که $d\leq a$ و $d\leq b$) موجود باشد، آن‌گاه آن را با نماد $a\wedge b=\inf\{a,b\}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۳.۱. مجموعه‌ی جزئاً مرتب $(S,\leq)$ را یک مشبکه می‌نامیم، هرگاه برای هر $a,b\in S$، $a\vee b$ و $a\wedge b$ در S موجود باشند و $A\subseteq S$ را یک زیرمشبکه‌ی S می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $a,b\in A$، $a\vee b$ و $a\wedge b$ در S به A متعلق باشد.

تعریف ۲.۳.۱. تابع $f:A\to B$ را که A و B دو مشبکه می‌باشند، یک همریختی مشبکه‌ای می‌نامیم، هرگاه برای هر $a,b\in A$ داشته باشیم $f(a\wedge b)=f(a)\wedge f(b)$ و $f(a\vee b)=f(a)\vee f(b)$.

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنید حلقه‌ی R با ترتیب جزئی $\leq$ دارای دو ویژگی زیر باشد:

۱) هرگاه $a,b\in R$ و $a\leq b$، آن‌گاه برای هر $x\in R$، $a+x\leq b+x$؛

۲) هرگاه $a,b\in R$، $a\geq 0$ و $b\geq 0$، آن‌گاه $ab\geq 0$.

در این صورت $(R,\leq)$ را یک حلقه‌ی جزئاً مرتب می‌نامیم.

فرض کنید $\mathbb{R}$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی و X یک مجموعه‌ی دلخواه باشد. دو عمل جمع و ضرب را روی $\mathbb{R}^X = \{f;\ f : X \to \mathbb{R}\}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

برای هر $f, g \in C(X)$ و $x \in X$، داریم $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ و $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

به راحتی می‌توان نشان داد که $\mathbb{R}^X$ با عمل جمع و ضرب تعریف شده، یک حلقه است که توابع ثابت صفر و یک به ترتیب صفر و یک آن می‌باشد. ترتیب $\leq$ روی $\mathbb{R}^X$ را در نظر بگیرید؛ اگر برای هر $f, g \in C(X)$ که $f \leq g$، آن‌گاه به ازای هر $x \in X$، $f(x) \leq g(x)$. در این صورت $(\mathbb{R}^X, \leq)$ یک حلقه‌ی جزئاً مرتب و مشبکه نیز می‌باشد. حال فرض کنیم X یک فضای توپولوژی باشد، مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته مانند f از $\mathbb{R}^X$ به $\mathbb{R}$ تشکیل یک حلقه می‌دهد که به حلقه‌ی توابع پیوسته معروف است و آن را با نماد $C(X)$ نشان می‌دهیم. $C(X)$ یک مشبکه بوده که ضمناً زیرمشبکه‌ی $\mathbb{R}^X$ نیز می‌باشد. مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته و کراندار روی فضای توپولوژی X، یک زیرحلقه‌ی $C(X)$ است که این حلقه را با $C^*(X)$ نشان می‌دهیم. $C^*(X)$ نیز زیرمشبکه‌ی $C(X)$ می‌باشد.

تعریف ۴.۳.۱. هرگاه برای فضای توپولوژی X، $C(X)$ با $C^*(X)$ برابر باشد، آن‌گاه فضای X را شبه فشرده می‌نامیم.

لم ۵.۳.۱. *هر فضای فشرده، شبه فشرده است.*

تعریف ۶.۳.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژی باشد و $f \in C(X)$. در این صورت $Z(f) = Z_X(f) = \{x \in X :\ f(x) = 0\}$ را یک صفرمجموعه در X می‌نامیم. مجموعه‌ی همه‌ی صفرمجموعه‌ها را با $Z(X)$ نمایش می‌دهیم؛ یعنی، $Z(X) = \{Z(f) :\ f \in C(X)\}$. همچنین یک متمم‌صفرمجموعه در فضای توپولوژی X، مجموعه‌ای است که متمم آن، یک صفرمجموعه باشد.