بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه گیلان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

گرایش آنالیز عددی

پایان نامه دکتری

روشهای آشفتگی هوموتوپی و تکرار تغییراتی برای حل معادلات تابعی

از

حسین قزوینی

استاد راهنما

آقای دکتر جعفر بی آزار

تیر ۱۳۸۷

تقدیم به

پدر و مادر عزیز و همسر مهربانم

بسمک یا علیم

حال که با استعانت از ایزد یکتا توفیق تدوین این رساله را یافته‌ام بر خود واجب می‌دانم از تمامی عزیزانی که در طی انجام این پژوهش از راهنمایی و یاری شان بهره‌مند گشته‌ام تشکر و قدردانی کنم و برای ایشان از درگاه پروردگار مهربان آرزوی سعادت و پیروزی نمایم.

در ابتدا صمیمانه‌ترین تقدیرها تقدیم به **پدر و مادر عزیز** و **همسر مهربانم** که همواره حامی و مشوقم بوده‌اند و پیمودن روزهای سخت و آسان زندگی‌ام بدون دعای خیر و برکت وجودشان غیر ممکن بود.

از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای **دکتر جعفر بی آزار**، که با سعه صدر و صبوری مرا راهنمایی نموده و در پیشبرد این پایان نامه سعی تمام مبذول داشتند کمال تشکر را دارم.

از داوران محترم جناب آقای **پروفسور اسماعیل بابلیان** استاد محترم دانشگاه تربیت معلم تهران و جناب آقای **دکتر نصیر تقی زاده** و جناب آقای **دکتر بهروز فتحی**، اساتید محترم دانشگاه گیلان که زحمت بازخوانی و داوری این مجموعه را به عهده داشتند صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم.

از کلیه اساتید گرانقدر گروه ریاضی که در دوران تحصیل از محضرشان کسب فیض نمودم تشکر می‌نمایم.

و در نهایت از تمامی دوستان، هم کلاسی‌ها و هم دانشکده‌ای‌های گرامی‌ام که در طول این مدت افتخار مصاحبت و همفکری با آنها را داشتم صمیمانه سپاسگزاری می‌کنم.

حسین قزوینی

تیرماه هشتاد و هفت شمسی

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل سوم: معرفی روش تکرار وردشی

فصل چهارم: کاربردهای روش آشفتگی هوموتوپی و روش تکرار وردشی برای معادلات تابعی

فهرست جدول ها

عنوان **صفحه**

فهرست شکل ها

عنوان صفحه

چکیده

روشهای آشفتگی هوموتوپی و تکرار تغییراتی برای حل معادلات تابعی

حسین قزوینی

روشهای آشفتگی هوموتوپی و تکرار وردشی توسط جی- هوان خی در سالهای ۱۹۹۸ و ۱۹۹۹ برای حل معادلات تابعی پیشنهاد شده اند. روشهای عددی متداول که برای حل این گونه معادلات به کار می روند مانند روشهای تفاضلات متناهی، عناصر محدود و روشهای کلاسیک مانند روشهای سری فوریه، انتگرال فوریه و تبدیلات لاپلاس یا دارای حجم محاسبات بالا و سرعت همگرایی کند و دقت کم هستند و یا دسته ای خاص از مسایل راحل می کنند. از این رو محققان علوم و مهندسی به دنبال ارایه روشهای جدید برای حل معادلات تابعی می باشند. در این رساله روشهای آشفتگی هوموتوپی و تکرار وردشی برای حل مسایل گوناگونی از معادلات تابعی مانند معادلات دیفرانسیل معمولی و مشتقات نسبی، معادلات انتگرال و دستگاههای آن ها به کار رفته اند و برخی ایده های جدید در ضمن حل این معادلات نیز بیان می شود. کار اصلی در این رساله از فصل دوم آغاز می شود. در این فصل ابتدا مقدماتی در مورد هوموتوپی بیان می شود. در بخش دوم روش آشفتگی هوموتوپی را بیان و قضایایی در مورد یکتایی جواب و همگرایی روش برای معادلات تابعی و دستگاههای معادلات تابعی بیان و اثبات شده است. در بخش سوم روش آنالیز هوموتوپی را بیان کرده و ضمن مقایسه این دو روش نشان داده می شود که روش آشفتگی هوموتوپی حالت خاصی از روش آنالیز هوموتوپی است. در پایان این فصل یک روش جدید آشفتگی هوموتوپی را بیان کرده و کارایی این روش را برای حل معادلات تابعی بررسی شده است. در فصل سوم روش تکرار وردشی و یک اصلاح شده ی آن که مانع انجام محاسبات مشابه می شود را بیان و همگرایی روش تکرار وردشی از نقطه نظر تئوریک مورد بحث قرار گرفته است. در فصل چهارم کاربردهای روش آشفتگی هوموتوپی و روش تکرار وردشی برای حل برخی از معادلات تابعی مشهور و تعمیم این روش ها برای دستگاههای معادلات تابعی ارایه شده و در برخی موارد یک مقایسه بین این دو روش و روش جدید آشفتگی هوموتوپی بیان شده است .

کلمات کلیدی: معادلات تابعی، روش آشفتگی هوموتوپی، روش تکرار وردشی، روش آنالیز هوموتوپی، ضربگرهای لاگرانژ، تابعک اصلاح، همگرایی.

د

Abstract

Homotopy perturbation and variational iteration methods for solving functional equations

Hossein Ghazvini

To solve functional equations, variational iteration and homotopy perturbation methods have been proposed by Ji-Huan He in 1998 and 1999. Commonly numerical methods such as finite difference, finite element, and classical ones like Fourier series, Fourier integral and Laplace transformation which are used for solving these equations, either need a lot of computations and have low convergence speed and accuracy or can be used to solve only special types of problems. Hence, researchers of science and engineering look for presenting new methods for solving functional equations. In this thesis Variational iteration and Homotopy perturbation methods are used for solving various problems of functional equations such as ordinary differential equations, partial differential equations, integral equations and also systems of these equations. Some new ideas, such as modifications have been suggested while solving these equations. The main work in this thesis is started from the second chapter. In this chapter, first some preliminaries is presented about homotopy. In the second section, the homotopy perturbation method has been elaborated and some theorems about the uniqueness of the solution, and the convergence of the method for functional equations and systems of functional equations have been presented and proved. In the third section, the homotopy analysis method has been presented and besides comparing these two methods, also is showed that homotopy perturbation method is a particular case in homotopy analysis method. At the end of this chapter, a new homotopy perturbation method is presented and its effectiveness for solving functional equations is examined. In chapter three, the variational iteration method and a correction of it have been presented, and the convergence of variational iteration method has been discussed from the theoretical point of view. In chapter four, the uses of homotopy perturbation and variational iteration methods for solving certain well-known functional equations as well as the generalization of these methods for systems of functional equations have been presented and in some cases a comparison between these two methods and the new homotopy perturbation method have been illustrated .

Key words: Functional equations, Homotopy perturbation method, Variational iteration method, Homotopy analysis method, Lagrange multiplier, Correction functional, Convergence.

پیشگفتار

از آنجا که حل معادلات تابعی به ویژه در حالت غیر خطی از مباحث بسیار مهم در آنالیز عددی می باشد بسیاری از پژوهشگران علوم ریاضی و مهندسی تحقیقات خود را به این موضوع اختصاص داده اند. مباحث جدیدی که در این رساله مورد بحث قرار گرفته به شرح ذیل است

۱- تعمیم روش های آشفتگی هوموتوپی و تکرار وردشی برای حل دستگاههای معادلات تابعی و حل برخی از معادلات تابعی مهم و مشهور که در فصل چهارم بیان شده است.

۲- بررسی همگرایی روش آشفتگی هوموتوپی که در فصل دوم بخش ۲-۳ و همگرایی روش تکرار وردشی که در فصل سوم بخش ۳-۴ مورد بحث قرار گرفته است.

۳- معرفی روش جدید آشفتگی هوموتوپی برای حل معادلات تابعی و دستگاههای آنها که در فصل دوم بخش ۲-۶ بیان شده است.

۴- در فصل چهارم یک مقایسه بین سه روش ذکر شده برای برخی از معادلات تابعی بیان کرده ایم.

فصل اول

تعاریف و قضایای اولیه در حساب وردشها و معرفی برخی روشها برای حل معادلات تابعی

۱-۱ مقدمه

گاهی در رشته های مختلف علوم، مهندسی، پزشکی، اقتصاد و ... برای بیان یک مساله معین لازم است از یک مدل ریاضی استفاده شود. اغلب این مدلهای ریاضی معادلاتی شامل یک تابع مجهول و مشتق یا انتگرال آن نسبت به متغیرهای مستقل هستند. چنین معادلاتی را معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرال یا معادلات انتگرال-دیفرانسیل می نامند. در حالت کلی این گونه معادلات را معادلات تابعی می نامیم.

بدیهی است که حل این دسته از معادلات با توجه به کاربرد فراوان آن از اهمیت به سزایی برخوردار است. چون فقط حالتهای خاصی از معادلات دیفرانسیل معمولی یا معادلات دیفرانسیل جزئی یا معادلات انتگرال به وسیله روشهای تحلیلی قابل حل هستند، بنابراین برای تقریب جواب معادلاتی که به وسیله روشهای تحلیلی حل پذیر نیستند یا به سختی حل می شوند، ناچار به استفاده از روشهای عددی هستیم. بدین ترتیب معادلاتی را که جواب واقعی آنها از روشهای تحلیلی به دست می‌آید را با روشهای عددی مورد نظر حل می‌کنیم و اختلاف بین جواب واقعی و جواب تقریبی روش عددی را به دست آورده و در صورت مناسب بودن روش عددی، برای معادلات مشابه که به روش تحلیلی قابل حل نیستند، از آن استفاده می‌کنیم. از طرفی روشهای تحلیلی که معمولاً برای حل معادلات تابعی به کار می‌روند، بسیار محدود بوده و در حالات خاصی به کار می روند، همچنین در حل بسیاری از مسائل واقعی نمی‌توان آن ها را به کار برد. همچنین روشهای عددی برای معادلات ذکر شده نیز به محاسبات زیادی نیاز داشته و معمولاً خطاهای گرد کردن موجب کاهش دقت آن می‌شود.

در این فصل به طور خلاصه در مورد حساب وردشها و برخی روشهای وردشی و روش آدومین که برای حل معادلات تابعی به کار می روند بحث و مثالهای متعددی برای تبیین این روشها بیان شده است.

۱-۲ حساب وردشها

تاریخچه حساب وردشها[1] به سال ۱۶۹۶ برمی گردد وقتی که برنولی[2] مساله حداقل زمان را مورد بررسی قرار داد. در این مساله، دو نقطه A و B که در یک صفحه قرار دارند ولی در راستای قائم واقع نمی باشند، در نظر گرفته شده اند و جسمی که در A قرار دارد تحت نیروی جاذبه در امتداد منحنی C به نقطه B می رود، در ضمن اصطکاک ناچیز در نظر گرفته می شود. می توان دریافت که مسیر مورد نظر خط مستقیم نمی باشد بر خلاف این که کوتاهترین فاصله از A به B یک خط مستقیم است، برای

[1] Calculus of variations
[2] Bernoulli

این که در کمترین زمان از A به B برویم منحنی مورد نظر یک سیکلوئید است. این مساله توسط لایب نیتز[1]، نیوتن[2] و هوپیتال[3] و آبل[4] و ... حل شده است. توسعه این شاخه از ریاضیات به همراه روشهای مختص به این شاخه ریاضی، توسط اویلر در سالهای ۱۷۸۳-۱۸۰۷ انجام پذیرفت.

یکی از مسائل مهم و کاربردی در مبحث حساب وردشها این است که از بین منحنی هایی که دو نقطه را به هم وصل می کنند منحنی را پیدا کنیم که کوتاهترین طول را داشته باشد یا در حالت کلی مینیمم (ماکسیمم) مقدار بعضی از انتگرالهای داده شده را به دست آوریم.

به عنوان مثال مساله مشخص کردن منحنی که دو نقطه ی (x_1, y_1) و (x_2, y_2) را متصل می کند که طول آن مینیمم است معادل این است که یک منحنی به معادله $Y = y(x)$ با شرایط $y(x_1) = y_1$ و $y(x_2) = y_2$ تعیین نماییم به طوری که انتگرال $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}dx$ مینیمم گردد.

در حالت کلی می خواهیم منحنی $Y = y(x)$ را با شرایط $y(x_1) = y_1$ و $y(x_2) = y_2$ طوری پیدا کنیم که برای تابع معلوم $F(x, y, y')$ مقدارانتگرال

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx \qquad (1-1)$$

مینیمم یا ماکسیمم شود، که به این، مقادیر اکسترمم یا مقادیر ایستا می گویند و به $y(x)$، تابع اکسترمال[5] می گویند.

انتگرال (۱-۱) که یک مقدار اکسترمم به ازای برخی از توابع $y(x)$ را به دست می دهد یک تابعک[6] نامیده می شود.

۱-۲-۱ لم

اگر برای هر تابع دلخواه $\lambda(x)$ در $[a, b]$ داشته باشیم

$$\int_a^b \varphi(x)\,\lambda(x)\,dx = 0$$

به طوری که تابع $\varphi(x)$ در $[a, b]$ پیوسته باشد آنگاه

$$\forall x \in [a, b]\ ;\ \varphi(x) \equiv 0$$

---

[1] Leibnitz
[2] Newton
[3] Hopital
[4] Abel
[5] Extermal
[6] Functional

اثبات

از برهان خلف استفاده می کنیم. فرض می کنیم در این بازه $\varphi(x)\not\equiv 0$ در این صورت نقطه ای مانند x_0 وجود دارد که $\varphi(x_0)\not\equiv 0$. فرض کنیم $\varphi(x_0) > 0$ به دلیل پیوستگی $\varphi(x)$ در بازه $[a,b]$، یک همسایگی از x_0 مثل $[x_1, x_2]$ وجود دارد که

$$\forall x \in [x_1, x_2],\ \ \varphi(x) > 0$$

حال تابع $\lambda(x)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\lambda(x) = \begin{cases} 0 & a \leq x < x_1 \\ \varphi(x) & x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0 & x_2 < x \leq b \end{cases}$$

در این صورت داریم

$$0 = \int_a^b \lambda(x)\varphi(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} (\varphi(x))^2\, dx > 0$$

که این با فرض متناقض است، در نتیجه $\varphi(x) \equiv 0$.

۱-۳ معادله اویلر[1]

به منظور پیدا کردن منحنی $y(x)$ مورد نظر در معادله ی (۱-۱) فرض می کنیم $Y = y(x) + \varepsilon\eta(x)$ که در آن $\eta(x)$ یک تابع دلخواه و ε یک پارامتر دلخواه است، برای این که منحنی Y در $Y(x_1) = y_1$ و $Y(x_2) = y_2$ صدق کند بایستی داشته باشیم $\eta(x_2) = \eta(x_1) = 0$.

حال قرار می دهیم

$$J(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx \tag{۲-۱}$$

و $I(\varepsilon)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$I(\varepsilon) = J[Y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y(x) + \varepsilon\eta(x), y' + \varepsilon\eta'(x))\ dx = \int_{x_1}^{x_2} F_\varepsilon\, dx \tag{۳-۱}$$

تابعک ما وابسته به ε است لذا خواهیم داشت

[1] Euler's Equation

$$\frac{dI}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=0$$

$$\frac{dI}{d\varepsilon}=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial Y}\eta(x)+\frac{\partial F}{\partial Y'}\eta'(x)\right]dx$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial Y}\eta(x)+\frac{\partial F}{\partial Y'}\eta'(x)\right]dx=0$$

با انتگرال گیری جزء به جزء از جمله دوم داریم

$$\frac{dI}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial Y}\eta(x)\,dx+\frac{\partial F}{\partial Y'}\eta(x)\Big|_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial Y'}\right]dx=0$$

چون $\eta(x_1)=\eta(x_2)=0$، داریم

$$\frac{dI}{d\varepsilon}=\int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\left[\frac{\partial F}{\partial Y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial Y'}\right)\right]dx=0 \qquad (۴-۱)$$

با توجه به لم (۱-۲-۱) از رابطه (۱-۴) نتیجه می گیریم

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \qquad (۵-۱)$$

معادله(۱-۵) به معادله اویلر معروف است.

لازم به ذکر است که معادله (۱-۵)، برای اکسترمال بودن $y(x)$ یک شرط لازم است، نه شرط کافی.

به سادگی می توان دید که معادله اویلر را می توان به صورت زیر نیز نوشت

$$\frac{d}{dx}\left[F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right]-\frac{dF}{dx}=0, \qquad (۶-۱)$$

ودر حالت خاص که F فاقد x باشد یعنی $F=F(y,y')$ داریم

$$F-y'F_{y'}=c \qquad (۷-۱)$$

۱-۳-۱ مثال (مساله حداقل زمان)[۱]

در صورتی که بخواهیم کل زمان حرکت جسم را که روی منحنی از A به طرف B در حرکت است محاسبه کنیم کافی است برای یک عنصر طول کمان، ds، زمان را محاسبه کرده و در طول کمان انتگرال بگیریم.

چـــون $v=\sqrt{2gy}$ و $dT=\frac{ds}{v}=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx$ بنـــابراین، $y(x_1)=y_1$، $y(0)=0$ و $\int dT=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx$ لـــذا می توان نوشت

$$\int dT=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx,\ y(0)=0,\ y(x_1)=y_1,\ I(y(x))=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}dx$$

در این حالت داریم

$$F(x,y,y')=\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$$

چون معادله فاقد x است، معادله اویلر بصورت ساده تر $F-y'F_{y'}=c_0$ می باشد در نتیجه خواهیم داشت .

$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}-y'\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{2y'}{2\sqrt{1+y'^2}}=c_0 \Rightarrow \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}-\frac{y'^2}{\sqrt{y\,(1+y'^2)}}=c_0$$

لذا می توان نوشت

$$\frac{1+y'^2-y'^2}{\sqrt{y\,(1+y'^2)}}=c_0 \Rightarrow \sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}=\frac{1}{c_0} \Rightarrow y(1+y'^2)=\frac{1}{c_0^{\,2}}=c_1$$

حال قرار می دهیم $y'=\cot t$، داریم

$$y(1+\cot^2 t)=c_1 \Rightarrow y=c_1\sin^2 t=\frac{c_1}{2}(1-\cos 2t)$$

از طرفی می توان نوشت

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{2c_1\sin t\cos t}{\cot t}dt=2c_1\sin^2 t\,dt=c_1(1-\cos 2t)\,dt$$

بنابراین $x=\frac{c_1}{2}(2t-\sin 2t)+c_2$ و چون $y(0)=0$ لذا $c_2=0$.

حل قرار می دهیم $2t=\theta$ در نتیجه داریم

$$x=\frac{c_1}{2}(\theta-\sin\theta),$$
$$y=\frac{c_1}{2}(1-\cos\theta).$$

۱-۳-۲ نماد وردشی δ

تابع $F(x,y,y')$ را در نظر بگیرید. قرار می دهیم

$$\begin{aligned}\Delta F&=F(x,y+\varepsilon\eta,y'+\varepsilon\eta')-F(x,y,y')\\&=\frac{\partial F}{\partial y}\varepsilon\eta+\frac{\partial F}{\partial y'}\varepsilon\eta'+\cdots\end{aligned}$$

قرار می دهیم $\delta F = \dfrac{\partial F}{\partial y}\varepsilon\eta + \dfrac{\partial F}{\partial y'}\varepsilon\eta'$ حال اگر $F(x,y,y') = y$ یا $F(x,y,y') = y'$ داریم $\delta F = \delta y = \varepsilon\eta$ یا $\delta F = \delta y' = \varepsilon\eta'$ بنابراین $\delta F = \dfrac{\partial F}{\partial y}\delta y + \dfrac{\partial F}{\partial y'}\delta y'$.

همچنین δ و $\dfrac{d}{dx}$ قابل جابه جایی اند زیرا

$$\delta y' = \delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = \varepsilon\eta' = \frac{d}{dx}(\varepsilon\eta) = \frac{d}{dx}(\delta y) = (\delta y)'$$

۱-۳-۳ قضیه

همواره داریم

$$\delta\int_a^b F(x,y,y')\,dx = \int_a^b \delta F(x,y,y')\,dx\,.$$

اثبات

$$\begin{aligned}\delta\int_a^b F(x,y,y')\,dx &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\int_a^b F(x,y,y')dx\right]\delta y + \frac{\partial}{\partial y'}\left[\int_a^b F(x,y,y')dx\right]\delta y' \\ &= \int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right]dx = \int_a^b \delta F(x,y,y')\,dx.\end{aligned}$$

۱-۳-۴ خواص نماد وردشی δ

نماد وردشی δ دارای خواص زیر است

۱) $\delta(F_1 \pm F_2) = \delta F_1 \pm \delta F_2,$

۲) $\delta(F_1F_2) = F_1\delta F_2 + F_2\delta F_1,$

۳) $\delta(F_1/F_2) = (F_2\delta F_1 - F_1\delta F_2)/F_2^2,$

۴) $\delta(F)^n = n(F)^{n-1}\delta F,$

۵) $D(\delta F) = \delta(DF), D = \dfrac{d}{dx},$

۶) $\delta\int_a^b F dx = \int_a^b \delta F dx.$

حال می خواهیم یک شرط کافی برای مینیمم شدن تابعک J تعریف شده در (۱-۲) را به دست آوریم.

به این منظور برای این که $y(x)$ انتگرال

$$J(Y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} F(x,Y,Y')dx$$

را مینیمم نماید ، باید برای تمام Y های قابل قبول داشته باشیم

$$J(Y) \geq J(y) \Rightarrow J(y+\varepsilon\eta) \geq J(y)$$

حال بسط تیلور $J(y+\varepsilon\eta)$ را حول ε می نویسیم

$$J(y+\varepsilon\eta) = \int_{x_1}^{x_2} F(x,y+\varepsilon\eta,y'+\varepsilon\eta')dx$$
$$\Rightarrow J(y+\varepsilon\eta) = J(y) + \int_{x_1}^{x_2} (\varepsilon\eta\frac{\partial F}{\partial y} + \varepsilon\eta'\frac{\partial F}{\partial y'})dx + O(\varepsilon^2)$$
$$\Rightarrow J(y+\varepsilon\eta) - J(y) = \int_{x_1}^{x_2} (\varepsilon\eta\frac{\partial F}{\partial y} + \varepsilon\eta'\frac{\partial F}{\partial y'})dx + O(\varepsilon^2)$$

حال طبق تعریف δJ را می توان به صورت زیر نوشت

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} (\varepsilon\eta\frac{\partial F}{\partial y} + \varepsilon\eta'\frac{\partial F}{\partial y'})\, dx, \qquad (۸-۱)$$

با روش جزء به جزء جمله دوم رابطه (۱-۸) را محاسبه می کنیم

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \varepsilon\eta\Big[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big)\Big]dx, \qquad (۹-۱)$$

در این جا ضرب داخلی را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\langle f,g\rangle = \int_{x_1}^{x_2} f\, g\, dx, \qquad (۱۰-۱)$$

طبق تعریف (۱-۱۰) می توان نوشت

$$\delta J = \big\langle \varepsilon\eta, J'(y)\big\rangle,\ J'(y) = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big),$$

بنابراین خواهیم داشت

$$J(y+\varepsilon\eta) - J(y) = \big\langle \varepsilon\eta, J'(y)\big\rangle + O(\varepsilon^2),$$

از طرف دیگر می دانیم مشتق یک تابع مانند f در رابطه زیر صدق می کند.

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a) + O(h^2),$$

شرط لازم برای اینکه a اکسترمم تابع f باشد این است که $hf'(a) = 0$ در نتیجه

$$\big\langle \varepsilon\eta, J'(y)\big\rangle = 0 \Leftrightarrow \delta J = \int_{x_1}^{x_2} \varepsilon\eta\Big[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big)\Big]dx = 0,$$

در نتیجه طبق لم (۱-۲-۱)، داریم

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$$

بنا براین می توان نوشت

$$\delta\int_a^b F(x,y,y')\,dx=0\Leftrightarrow\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0,$$

حال با توجه به این که

$$\Delta J=J(Y)-J(y)$$

می توان نتیجه گرفت

$$\Delta J=\delta J+\frac{\varepsilon^2}{2!}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 F}{\partial\varepsilon^2}(x,y+\varepsilon\eta,y'+\varepsilon\eta')\,dx$$

از طرف دیگر داریم

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\varepsilon^2}=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\partial F}{\partial\varepsilon}\right)=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[\eta\frac{\partial F}{\partial Y}+\eta'\frac{\partial F}{\partial Y'}\right]=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}[\eta F_Y+\eta' F_{Y'}]$$

که $Y=y+\varepsilon\eta$, $Y'=y'+\varepsilon\eta'$ لذا داریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial\varepsilon^2}&=\eta\frac{\partial}{\partial\varepsilon}F_Y+\eta'\frac{\partial}{\partial\varepsilon}F_{Y'}\\&=\eta\left[\frac{\partial F_Y}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial F_Y}{\partial Y'}\frac{\partial Y'}{\partial\varepsilon}\right]+\eta'\left[\frac{\partial F_{Y'}}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial F_{Y'}}{\partial Y'}\frac{\partial Y'}{\partial\varepsilon}\right]\\&=\eta[\eta F_{YY}+\eta' F_{YY'}]+\eta'[\eta F_{Y'Y}+\eta' F_{Y'Y'}]\\&=\eta^2F_{YY}+2\eta\eta' F_{Y'Y}+\eta'^2F_{Y'Y'}\end{aligned}\tag{۱-۱۲}$$

حال برای این که $J(Y)\geq J(y)$ باشد، باید داشته باشیم

$$\Delta J\geq 0\Rightarrow\frac{\varepsilon^2}{2!}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 F}{\partial\varepsilon^2}(x,y+\varepsilon\eta,y'+\varepsilon\eta')\,dx\geq 0\tag{۱-۱۳}$$

حال J_2 را با توجه به(۱-۱۲) و (۱-۱۳) به صورت زیر تعریف می کنیم

$$J_2=\frac{\varepsilon^2}{2!}\int_{x_1}^{x_2}\left[\eta^2F_{YY}+2\eta\eta' F_{Y'Y}+\eta'^2F_{Y'Y'}\right]dx\tag{۱-۱۴}$$

بنابراین به نتایج زیر می رسیم

۱- اگر $y(x)$ بخواهد تابعک J را مینیمم نماید بایستی $J_2\geq 0$.

۲- اگر $y(x)$ بخواهد تابعک J را ماکسیمم نماید بایستی $J_2\leq 0$.