بسم الله الرحمن الرحیم

۴۸۸۴۳

دانشگاه مازندران

دانشکدهٔ علوم پایه

موضوع:

مطالعه وجود و یکتایی و رفتار مجانبی جوابهای مثبت برای یک معادله بیضوی روی تمام $\mathbb{R}^N$

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

استاد راهنما:

دکتر قاسم علیزاده افروزی

استاد مشاور:

دکتر منوچهر زند

نگارش:

سید ربیع موسویان خطیر

بهمن ۸۱

«بسمه تعالی»

دانشگاه مازندران
معاونت آموزشی
تحصیلات تکمیلی

«ارزشیابی پایان‌نامه در جلسه دفاعیه»

دانشکده علوم پایه

نام و نام‌خانوادگی : سیدربیع موسویان خطیر شمارهٔ دانشجوئی : ۷۹۵۲۴۷۸۰۹

رشته تحصیلی : ریاضی محض مقطع : کارشناسی‌ارشد سال تحصیلی : ۸۲-۸۱

عنوان پایان‌نامه : مطالعه وجود و یکتایی و رفتار مجانبی جوابهای مثبت برای یک معادله بیضوی روی تمام R^N

تاریخ دفاع : چهار شنبه ۸۱/۱۰/۱۱

نمره پایان‌نامه (به عدد) : ۱۸/۴۰

نمره پایان‌نامه (به حروف) : هیجده و چهل صدم

هیأت داوران

استاد راهنما : دکتر قاسم علیزاده افروزی امضاء

استاد مشاور : دکتر منوچهر زند امضاء

استاد مدعو : دکتر عبدالعلی نعمتی امضاء

استاد مدعو : دکتر محسن علیمحمدی امضاء

نماینده کمیته تحصیلات تکمیلی : دکتر حسن حسین‌زاده امضاء

موضوع پایان نامه:

«مطالعه وجود و یکتائی و رفتار مجانبی جوابهای مثبت برای یک معادله بیضوی روی تمام $\mathbb{R}^N$»

سپاس بیکران و حمد بی قیاس به درگاه خداوند متعال

تقدیر و تشکر

از جناب آقای دکتر قاسم علیزاده افروزی استاد راهنما، به پاس زحمات بی شائبه و راهنمایی های علمی بی دریغ خود مرا بی نصیب نفرموده اند تقدیر و تشکر می نمایم.

تقدیر و تشکر

از مدیر گروه ریاضی آقای دکتر عبدالعلی نعمتی حسین آبادی و استاد محترم آقای غلامرضا کریم پور و استاد مشاور آقای دکتر منوچهر زند که تجربیات مفید خود را در اختیارم نهاده اند

تقدیم به

پدر و مادر والامقام و همسرعزیزم که برای رسیدن به این هدف کمک شایانی به اینجانب نموده اند.

چکیدهٔ مطالب:

در این پایان‌نامه معادله جمعیت:

$$u_t(x,t)= d\Delta u(x,t) + g(x)u(x) - u^2(x);\ x\in IR^N \qquad ,\quad t > 0$$

را بحث می‌کنیم که تابع u به تراکم جمعیت وابسته و پارامتر dمثبت است که به میزان نشر جمعیت وابسته است و جواب‌های حالت پایدار معادله قبلی بایستی در معادله زیر صدق کند:

$$-\Delta u(x)= \lambda[g(x)\,u(x) - u^2(x)]\ ;\ x \in IR^N$$

برای بررسی معادلات بالا کافی است معادله بیضوی دیریکلهٔ زیر را بررسی کنیم:

$$-\Delta u(x)= \lambda g(x)\, u(x);\ x\in\Omega$$

$$u(x) =0\ ; \qquad x\in\partial\Omega$$

که Ω یک دامنهٔ در IR^N است. که در این معادلـــه بـــه λ_1 از دنبالـهٔ مقـادیر ویـژهٔ $\{\lambda_n\}$که اولین مقدار ویژهٔ مثبت می‌باشد مقدار ویژهٔ اصلی گوییم و تـابع ویـژهٔ مربوطه‌اش تابع‌ویژهٔ اصلی می‌نامیم و رفتار مجانبی λ_1 و $u(x)$ جواب معادلهٔ دیریکله را بررسی می‌کنیم.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول

۱-۱- آشنایی با معادلات دیفرانسیل ۱
۱-۲- مفاهیم اولیه و اساسی ۳
۱-۳- معرفی فضاهای مختلف و کاربردی (باناخ – هیلبرت – ... و L^p ...) ۸
۱-۴- اتحادهای گرین ، تابع گرین و پتانسیل نیوتنی تابع ۱۳
۱-۵- پیوستگی هولدر ۱۸
۱-۶- فضاهای سوبولف ، عملگرهای خطی ۲۴

فصل دوم

۲-۱- مقدمه ۳۸
۲-۲- مسائل با مقدار مرزی بیضوی خطی ۳۹
۲-۳- مقادیر ویژه و توابع ویژه عملگر ۴۰
۲-۵ مقادیر ویژه اصلی ۴۲
۲-۶- مقادیر ویژه اصلی مسایل با شرط کرانه ای دیریکله ۴۴

فصل سوم

مقدمه ۵۷
۳-۱- دامنهٔ کراندار با شرط مرزی دیریکله ۵۸
۳-۲- دامنهٔ کراندار با شرط مرزی نویمن ۶۷
۳-۳- پیدا کردن جوابهای مثبت در IR^N ۷۱

فصل چهارم

۴-۱- مقدمه ۸۴

۴-۲- جوابهای مثبت مجانبی ۸۵

۴-۳- شکل لاپلاسین جواب مسأله دیریکله وقتی متقارن شعاعی باشد ۹۱

۴-۵- میانگین کروی و بررسی رفتار مجانبی جوابها وقتی که جواب متقارن شعاعی نباشد. ۹۳

۴-۱۱- رفتار مجانبی جوابهای مثبت ۱۱۳

۴-۱۴- یکتایی جواب برای مسأله دیریکله ۱۲۷

۴-۱۵- تابع آزمون و معرفی بعضی از نمادها ۱۳۳

۴-۱۶- قضیه همگرایی تسلطی لبگ ۱۳۳

۴-۱۸- عدم وجود جواب برای مسأله دیریکله ۱۳۶

فصل اول

۱-۱- آشنایی با معادلات دیفرانسیل

۱-۱-۱- تعریف معادله دیفرانسیل جزیی (معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزیی = partial differntial equation):

یک معادله، شامل یک تابع u از چندین متغیر و مشتقات جزیی شان می باشد. یعنی برای تابع N متغیرهٔ $u(x_1,x_2,...,x_N)$ داشته باشیم:

$$F(x_1,x_2,...,x_N,u_{x_1},u_{x_2},...,u_{x_N},u_{x_1x_1},u_{x_1x_2},...)=0 \quad (1)$$

به عنوان مثال معادلات ذیل را معرفی می کنیم:

$$u_t = ku_{xx} \quad (2)$$

$$u_{tt} = c^2u_{xx} \quad (3)$$

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \quad (4)$$

که معادلات بالا، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی برای توابع دو متغیره، هستند معادله (۲) ، معادلهٔ گرمایی یک بعدی از u که نمایندهٔ درجهٔ حرارت هدایت میله است.

معادلهٔ (۳) ، معادله موج یک بعدی است و معادله (۴) معادلهٔ لاپلاس دو بعدی است.

قابل ذکر است که معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی را با علامت اختصاری PDE نشان می دهند. مرتبهٔ (۱) بالاترین مرتبه مشتق از معادله است.

به علاوه اگر معادله (۱) به صورت خطی وابسته به u و مشتقات باشد، گویند معادله خطی است. اگردر معادله (۱) ، همهٔ مشتقات u به صورت خطی با ضرایب وابسته به فقط x واقع شود معادله را نیم خطی گویند. اگر همهٔ

بزرگترین درجهٔ مشتقات u به صورت خطی با ضرایب وابسته به فقط x و u و پایین ترین درجهٔ مشتقات u باشد آنگاه معادله را شبه خطی گویند.

معادله (۲) و (۳) و (۴) معادلات خطی هستند. یک مثال ساده از یک PDE درجهٔ اول $u_t + \alpha(u)u_x = 0$ است. وقتی $\alpha(u) \equiv \alpha(cons\tan t)$ یک ثابت است معادله قبل یک معادله خطی به نام معادله انتقال (حمل و نقل) است.

برای مثال وقتی $\alpha(u) \equiv u$ معادله را « نامریی برگر » می نامند که در مطالعهٔ جریان ذرات (نقاط مادی) یک بعدی یا داشتن چسبندگی صفر سیال، یافت می شود.

و نیز یک مثال از درجهٔ یک غیر خطی PDE، $u_x{}^2 + u_y{}^2 = c^2$ است که آن را معادلهٔ « ایکونال » از اپتیک های هندسی است. ما می توانیم معادلات (۲) و (۳) و (۴) را به ابعاد بالاتر نیز گسترش دهیم.

برای آنکه یک PDE جواب منحصر به فردی داشته باشد، ما باید شرایط اضافه را تحمیل کنیم که این کار را شرایط جانبی نامند. روی جواب، اینها به شکل شرطهای اولیهٔ یا شرطهای کرانداری و یا ترکیبی از این دو هستند. این بدون تردید خانواده معادلات دیفرانسیل معمولی (ODES) می باشد که یک معادله دیفرانسیل درجهٔ اول شرایط اولیه احتیاج دارد و یک معادله دیفرانسیل درجهٔ دوم یا دو شرط اولیه یا یک شرط کرانه ای در یک مرز یک فاصلهٔ کراندار لازم دارد.

۱-۱-۲- عملگر لاپلاس

به عملگر $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_N^2}$ روی IR^N عملگر لاپلاس گوییم، آنگاه می توانیم معادلات (۲) و (۳) و (۴) را به صورت کلی زیر بنویسیم:

$$u_t = k\Delta u \qquad (۵)$$

$$u_{tt} = c^2 \Delta u \qquad (۶)$$

$$\Delta u = 0 \qquad (۷)$$

معادلهٔ (۵) نشر گرما توسط یک جسم N – بعدی است، معادلهٔ (۶) اگر $N=۲$ باشد امواج سطح آب است و اگر $N=۳$ باشد صدا یا امواج نور را نشان می دهد.

و معادله (۷) یعنی $\Delta u = 0$ ، معادلهٔ لاپلاس N – بعدی نامیده می شود.

البته معادلات (۵) ـ (۷) خیلی خصوصی هستند و ممکن است چگونگی رفتار بیشتر معادلات پیچیده که در کاربردها اتفاق می افتد را از خود بپرسیم. ما می توانیم تابع f را به این معادلات اضافه کنیم که این معادلات غیر همگن می شوند. به عنوان مثال معادله: $\Delta u = f$.

یک معادله لاپلاس غیر همگن است.

معادلهٔ $\Delta u = f(x,u)$ که f وابسته به u است را معادله نیم خطی پوآسن گوییم.

و به معادله $\nabla^2 u = f$ که f تابعی معلوم و u مجهول و $\nabla \equiv (\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_N})$ است را معادلهٔ دیفرانسیل پوآسن می نامند.

۱-۲- مفاهیم اولیه و اساسی

۱-۲-۱- تعریف دامنه در IR^N

زیر مجموعهٔ Ω در IR^N را که همبند و باز باشد یک دامنه گوییم. یعنی نقاط $x,y \in \Omega$ توسط یک منحنی در Ω می توانند وصل شوند و برای $x \in \Omega$ ، $B_r(x) \subset \Omega$ را داریم، مشروط به این که r به اندازهٔ کافی کوچک وجود دارد.

تمام نقاط Ω و نیز نقاط حدی Ω را بستار Ω گویند و با علامت $\overline{\Omega}$ نشان می دهند یعنی: $\overline{\Omega}=\Omega\bigcup\Omega'$

(Ω'مجموعه نقاط حدّی Ω است)

۱-۲-۲- مرز مجموعه

از یک دامنهٔ Ω مجموعه نقاط حدی Ω که در Ω نیستند را مرز مجموعه Ω گفته ،آن را با $\partial\Omega$ نشان می دهند. یعنی $\partial\Omega=\overline{\Omega}\setminus\Omega$ ("$\setminus$" علامت تفریق مجموعه است) اگر $\Omega= IR^N$ باشد، آنگاه $\partial\Omega=\Phi$ است و اگر Ω یک مجموعهٔ کراندار باشد، آنگاه $\partial\Omega$ نیز یک مجموعهٔ کراندار است.

به طوری که $\partial\Omega$ شاید کاملاً یک مجموعهٔ پیچیده باشد اما برای قشنگی دامنه ها Ω و $\partial\Omega$ باید ابررویهٔ $(N-1)$–بعدی باشد.

۱-۲-۳- تعریف

مجموعه توابع پیوسته روی دامنهٔ Ω را با $C(\Omega)$ نشان می دهیم. آندسته از توابعی که مشتق مرتبهٔ اول آنها پیوسته باشند با $C^1(\Omega)$ نمایش می دهیم و متشابهاً برای $k\in IN$ ، $C^k(\Omega)$ همهٔ توابعی که همه مشتقات تا مرتبهٔ k ام آنها پیوسته باشند، است.

تابعی را هموار یا متعلق به C^∞ روی دامنهٔ Ω گویند اگر برای هر عدد صحیح مثبت r ، متعلق به ردهٔ C^r باشد.

مجموعهٔ $C(\overline{\Omega})$ متشکل است از توابعی چون f به طور پیوسته به $\overline{\Omega}$ توسیع می یابد. و $C^1(\overline{\Omega})$ متشکل از توابعی چون f که f و مشتق مرتبهٔ اول f به طور پیوسته به $\overline{\Omega}$ توسیع می یابند.

و به طور متشابه $C^k(\overline{\Omega})$ تعریف می شوند.

گاهی اوقات در مورد توابع پیوسته ای که در Ω کراندارند ولی نمی توانند به طور پیوسته به $\overline{\Omega}$ توسیع یابند، اینها را با $C_B(\Omega)$ نمایش می دهیم. و لذا توجه می کنیم که $C_B(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$

برای مشتق گیری نمایش های مختلف استفاده می شود به نامهای $u_x, \frac{\partial u}{\partial x}, \partial_x u$ که همگی مشتق نسبی u نسبت به x بیان می کند.

ما توابع $N-$ بردار مقداری همانند نگاشت هایی از IR^N به IR^N را در نظر خواهیم گرفت. برای مثال $C(\Omega, IR^N)$ شامل توابع پیوسته $N-$ برداری مقدار روی دامنۀ Ω می باشد.

۱-۲-۴- تعریف محمل یک تابع پیوسته

محمل (Support) یک تابع پیوسته f روی IR^N، بستار مجموعه نقاطی از IR^N که f غیر صفر شود، می باشد و با suppf نشان می دهند:

$$\text{suppf} = \overline{\{x \in IR^N, f(x) \neq 0\}}$$

مجموعه ای در IR^N کراندار است اگر در یک گوی $B_R(0)$ با R به اندازه کافی بزرگ مشمول باشد.

چون مجموعه های بسته و کراندار در IR^N فشرده اند لذا اگر suppf کراندار باشد، گویند که f محمل فشرده دارد.

بنابراین گویند f محمل فشرده دارد اگر محمل f کراندار باشد.

مجموعۀ $C_0(IR^N)$ متشکل از توابع پیوسته f است که f محمل فشرده دارد و به طور مشابه $C_0(\Omega)$ متشکل از توابع پیوسته روی Ω که محمل آن یک زیر مجموعه فشرده از Ω است، می باشد و $C_0^k(\Omega)$ نیز به طریق مشابه تعریف می شود.

۱-۲-۵- انتگرال پذیری تابع f روی دامنهٔ Ω

اگر تابع f روی یک دامنهٔ Ω تعریف شود، آنگاه f روی Ω انتگرال پذیر است چنانچه $\int_{\Omega}|f(x)|dx$ تعریف شده، متناهی باشد. مجموعهٔ همهٔ چنین توابع انتگرال پذیررا با $L^1(\Omega)$ نشان می دهیم.

حال فضای دیگری که از توابع که به طور موضعی انتگرال پذیر هستند را در نظر می گیریم به عبارت دیگرمجموعه ای ازتوابع که روی هر زیر مجموعهٔ فشرده از Ω انتگرال پذیر هستند ولزومی ندارد در زیر مجموعه ای کراندار یا متناهی انتگرال پذیر باشندرابا $L^1_{loc}(\Omega)$ نشان می دهیم.

نتیجه:

$$\begin{cases} C_{\circ}(\Omega)\subset L^1(\Omega) \\ C(\Omega)\subset L^1{}_{loc}(\Omega) \end{cases}$$

(زیرا توابع پیوسته روی مجموعه فشرده مقدار بیشینه و کمینه را می گیرند)

به طور کلی توابع در $L^1(\Omega)$ یا $L^1{}_{loc}(\Omega)$ ممکن است روی نقاط تکین دارای ناپیوستگی باشد اما چنان نیست که در همگرایی انتگرال مؤثر باشند.

۱-۲-۶- تعریف

فرض کنیم Ω یک دامنه باشد تابع زیر را در نظر می گیریم:

$$f:\Omega\times IR^N\to IR$$

$$(x,u)\to f(x,u)$$

می گوییم f در شرط کارا تئودری صدق می کند اگر

(۱) نگاشت $u\to f(x,u)$ برای تقریباً همه xهای در Ω پیوسته باشد.