



وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه تبریز

دانشکده مهندسی برق

پایان نامه کارشناسی ارشد

مهندسی برق قدرت

عنوان:

بهینه‌سازی ادوات الکترومغناطیسی با استفاده از روش جریان سطحی

نگارنده:

ابراهیم حسام

استاد راهنما:

دکتر مهدی اره‌پناهی

مهرماه ۱۳۹۱

این همه در حق است چه پدر و مادر و همسر و فرزندان، همه

و این همه، هر که در حق است چه پدر و مادر و همسر و فرزندان، همه

و این همه در حق است چه پدر و مادر و همسر و فرزندان، همه

و این همه در حق است چه پدر و مادر و همسر و فرزندان، همه

رد چاں بی پین دین ز به ره ره رس ن ساری دیم، نه دین اجام این

پایان نامه ز بیم ردیدد برم اردن ساس ساس ساس ساس، ا دیبام.

به رسم ادب ددر ساقی، بر ددرم ق دیم او اسد او سدر سدر ام، ا ساقی

د سهدی اده ساقی نه بر نه پین دین ساقی ن بدددر دن اجام این پوره به

نه ساقی سید سهد سیدان یرده ز، در بدددر نه ساقی

رددهاں رددهدی زده سده به ام.

سین او، ساری دین ساقی ساقی اجام سدن رسا سدر د سدن سار

سبزی زده ساقی ام.

چکیده

اغلب طراحان ماشین‌های الکتریکی به بهینه‌سازی ادوات الکترومغناطیسی توجه کرده و تلاش می‌کنند راندمان، ضریب توان و ... آن‌ها را اصلاح کنند. طراحی و شکل‌بندی ادوات الکترومغناطیسی برای طراحان مسئله مهمی است که بایستی این هدف با روش مناسبی ارائه گردد. در این راستا باید معادلات میدان به یکی از روش‌های عددی حل شده و میدان الکترومغناطیسی مورد تحلیل قرار گیرد، تا با در نظر گرفتن پارامترهای میدان مغناطیسی محاسبه شده بتوان تغییرات مناسبی در طراحی ایجاد کرد و بهینه‌سازی ادوات الکترومغناطیسی را بهبود بخشید.

روش جریان سطحی (Surface Current Method(SCM)) یکی از روش‌های حل عددی برای تحلیل و بررسی میدان‌های الکترومغناطیسی است که بر اساس جایگزین کردن مرزهای ماده فرومغناطیسی با منابع جریان سطحی و محاسبه کردن تعداد و مقدار این چگالی‌ها پایه‌ریزی شده است. چگالی شار در هر نقطه از محیط حل مسئله برابر اثر منابع جریان و چگالی‌های جریان سطحی بر روی مرز است و چون جریان‌های سطحی در این روش محاسبه شده‌اند، نیرو براحتی از روش قانون نیروی لورنتز محاسبه می‌شود. روش اجزاء محدود (Finite Element Method(FEM)) در حالت کلی دارای حل عددی با دقت بسیار خوبی است، اما اگر ابعاد مسئله بزرگ باشد، تعداد مش‌های مورد استفاده برای رسیدن به دقت مورد نظر و مدت زمان حل فوق‌العاده طولانی می‌شود و گاهی بدلیل بعد بزرگ ماتریس‌های ایجاد شده واگرایی رخ می‌دهد. بنابراین استفاده از FEM در بهینه‌سازی برخی ادوات الکترومغناطیسی که نیاز به تحلیل‌های مکرر دارند، گزینه مناسبی نیست. روش جریان سطحی (SCM) با حل معادلات الکترومغناطیسی و استفاده از مش‌های یک‌بعدی، در مورد بهینه‌سازی ادوات الکترومغناطیسی می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد و با مدیریت آسان در شکل‌بندی هندسی ادوات الکترومغناطیسی، این هدف را انجام می‌دهد. SCM مانند یک ابزار طراحی، کارایی ماشین‌های الکتریکی را اصلاح می‌کند و با تغییرات در طراحی این ماشین‌ها، بهینه‌سازی را انجام می‌دهد.

در این پایان‌نامه ابتدا به مطالعه و بررسی دقیق روابط موجود در SCM و روش به‌کار گرفته شده در آن پرداخته می‌شود. سپس با در نظر گرفتن این روابط به شبیه‌سازی و استفاده از این روش پرداخته خواهد شد. در این رساله به بررسی و محاسبه توزیع میدان مغناطیسی چهار نوع ماشین الکتریکی با استفاده از SCM پرداخته می‌شود. سه نوع ساختار قطعه الکترومغناطیسی ساده، موتور رلوکتانسی تک‌فاز و رله الکترومغناطیسی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند که پاسخ‌های آنها با FEM مقایسه شده‌اند. بهینه‌سازی رله الکترومغناطیسی در دو حالت ساختاری یکبار بدون آهن‌ریا و بار دیگر با اضافه کردن آهن‌ریا به ساختار آن توسط دو الگوریتم بهینه‌سازی ژنتیک و الگوریتم جستجوی مستقیم انجام شده است و نتایج با حل پارامتری در FEM مقایسه شده است.

الگوریتم ارائه شده در این پایان‌نامه بر روی رله الکترومغناطیسی اعمال شده است. از نتایج بدست آمده مشخص است که با استفاده از الگوریتم ارائه شده، ادوات الکترومغناطیسی قادر به بهینه‌سازی خواهند بود و با توجه به تابع هدف مورد نظر این بهینه‌سازی انجام می‌گیرد. الگوریتم ارائه شده در این پروژه برای بهینه‌سازی ادوات الکترومغناطیسی انعطاف‌پذیر بوده و قابلیت اجرا بر روی هر قطعه دلخواه را دارد.

کلمات کلیدی: الکترومغناطیسی- بهینه‌سازی- تحلیل استاتیک- روش اجزاء محدود- روش جریان سطحی

عنوان	صفحه
۱) مقدمه و اهداف پروژه	۱
(-	
(- روش‌های عددی و	
۱-۲-۱) روش‌های حل تحلیلی (روش‌های دقیق):	۲
۲-۲-۱) روش‌های حل عددی (روش‌های تقریبی):	۳
۳-۲-۱) روش تفاضل محدود	۳
۴-۲-۱) روش مدار معادل مغناطیسی	۴
۵-۲-۱) روش اجزاء محدود	۵
۶-۲-۱) روش جریان سطحی	۷
(-	
(-	
(-	
۲) روش جریان سطحی	۱۳
(-	
(-	
۱-۲-۲) میدان تولید شده توسط مش‌ها	۱۶
۲-۲-۲) میدان تولید شده توسط منابع	۱۷
(-	
۱-۳-۲) محاسبه ماتریس $[M]$	۲۰
۲-۳-۲) محاسبه بردار $[B'_{x,i}]$	۲۱
۳-۳-۲) محاسبه بردار $[J''_i]$	۲۱
۴-۳-۲) محاسبه بردار پتانسیل و چگالی شار در هر نقطه	۲۲
۵-۳-۲) محاسبه نیرو	۲۲
(-	
(-	
(-	
۱-۶-۲) SCM-a	۲۶
۲-۶-۲) SCM-b	۲۶
(-	

۲۸ تحلیل میدان مغناطیسی توسط SCM	(-
	(-
 سازی یک الکترومغناطیسی ساده	(-
 پارامتری ادوات الکترومغناطیسی SCM	(-
 موتور رلوکتانسی تکفاز	(-
 و گیری	(-
۵۰ استفاده از SCM در بهینه‌سازی	(-
	(-
 فرایند سازی	(-
 هدف	(-
 الگوریتم‌ ی سازی	(-
۵۴ الگوریتم ژنتیک (۱-۴-۴)	
۵۵ الگوریتم جستجوی مستقیم (۲-۴-۴)	
 رله الکترومغناطیسی	(-
 محدودیت‌های در شده در این پروژه و نحوه آن	(-
 سازی رله الکترومغناطیسی الگوریتم ی	(-
 رله الکترومغناطیسی آهن‌ربا	(-
 سازی رله الکترومغناطیسی آهن‌ربا GA و DSA	(-
 و گیری	(-
۷۱ نتیجه‌گیری و پیشنهادات	(-
 گیری	(-
 پیشنهادات	(-
۷۵ منابع و مراجع	
۷۹ پیوست ۱: معرفی الکترومغناطیس	(-
	(-
 ای الکترومغناطیس	(-
 معادلات ماکسول	(-
 شکست میدان ی	(-
 قانون بیوساوار	(-
 قانون نیروی لورنتز	(-

۸۳ پیوست ۲: بررسی الگوریتم‌های بهینه‌سازی
	(-
 الگوریتم ژنتیک
۸۳ تابع ارزیابی (۱-۲-۸)
۸۴ عملگرهای ژنتیک (۲-۲-۸)
۸۴ عملگر تولید مثل (۳-۲-۸)
۸۵ مؤلفه‌های ژنتیک (۴-۲-۸)
۸۵ جمعیت (۵-۲-۸)
۸۵ نرخ عملگر ضربدردی (C) (۶-۲-۸)
۸۵ نرخ جهش ناگهانی (M) (۷-۲-۸)
۸۶ شرط توقف الگوریتم (۸-۲-۸)
۸۷ شباهت‌ها و تفاوت‌های GA با الگوریتم‌های بهینه‌سازی قدیمی (۹-۲-۸)
۸۷ نکات مهم در هنگام کار کردن با GA (۱۰-۲-۸)
	(- الگوریتم ی
۸۹ مرحله جستجو (۱-۳-۸)
۹۰ مرحله سرشماری (۲-۳-۸)
۹۰ بروزرسانی پارامترها (۳-۳-۸)
۹۰ خاتمه (۴-۳-۸)
۹۰ نحوه استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی در MATLAB (۵-۳-۸)
	(- الگوریتم سازی کلونی مورچه
	(- الگوریتم آب‌کاری فلزات سازی شده
	(- ی
۹۵ جستجوی تابوی چند منظوره (۱-۶-۸)
	(- سازی ذرات

فهرست شکل‌ها

شکل	صفحه
شکل (۱-۱)	مش‌بندی تفاضل محدود برای دو متغیر وابسته x و t ۴
شکل (۲-۱)	مدار معادل مغناطیسی یک آهن‌ربا ۵
شکل (۳-۱)	ناحیه حل در مختصات X, Y ۶
شکل (۴-۱)	تقسیم بندی ناحیه حل با مش‌های مثلثی ۶
شکل (۵-۱)	تقسیم بندی مرز ماده فرومغناطیس (μ_2) با مش‌های تک‌بعدی ۸
شکل (۱-۲)	انحراف بردار شدت میدان مغناطیسی ۱۴
شکل (۲-۲)	جریان‌های سطحی بر روی مرز ماده فرومغناطیسی ۱۵
شکل (۳-۲)	منبع جریان چهارضلعی ۱۸
شکل (۴-۲)	منبع جریان دایروی ۱۹
شکل (۵-۲)	جهت مرزها برای تقسیم‌بندی مش‌ها ۲۳
شکل (۶-۲)	الگوریتم محاسبه میدان توسط SCM ۲۵
شکل (۱-۳)	قطعه الکترومغناطیسی ساده ۲۹
شکل (۲-۳)	مش‌بندی در FEM ۳۰
شکل (۳-۳)	مش‌بندی اولیه و شماره مرزها در SCM ۳۰
شکل (۴-۳)	شماره و جهت مرزها ۳۱
شکل (۵-۳)	مش‌بندی نهایی ۳۳
شکل (۶-۳)	چگالی شار مماسی ناشی از منبع در مرکز مش‌ها (مش‌بندی اولیه) ۳۳
شکل (۷-۳)	چگالی شار مماسی ناشی از منبع در مرکز مش‌ها (مش‌بندی نهایی) ۳۴
شکل (۸-۳)	توزیع چگالی جریان‌های سطحی ۳۴
شکل (۹-۳)	توزیع شار فقط ناشی از منابع جریان‌های سطحی بر روی مرز ۳۵
شکل (۱۰-۳)	توزیع شار در ساختار مغناطیسی ساده با ۳۱۱ مش توسط SCM ۳۶
شکل (۱۱-۳)	توزیع شار در ساختار مغناطیسی ساده با ۱۱۲۲ مش توسط FEM ۳۶
شکل (۱۲-۳)	چگالی شار (B_x, B_y) در فاصله هوایی توسط SCM ۳۷
شکل (۱۳-۳)	چگالی شار (B_x, B_y) در فاصله هوایی توسط FEM ۳۷
شکل (۱۴-۳)	توزیع شار بدون میانگین تابع شکل با ۳۰۵ مش توسط SCM ۳۸
شکل (۱۵-۳)	ابعاد اولیه قطعه الکترومغناطیسی و متغیرها و راستای تغییر متغیرها (x_1, y_1) ۳۹
شکل (۱۶-۳)	تحلیل پارامتری برای محاسبه نیروی اعمالی توسط SCM و FEM ۴۱
شکل (۱۷-۳)	ابعاد موتور رلوکتانسی تک‌فاز ۴۲

فهرست شکل‌ها

۴۳ شکل ۳-۱۸) زاویه مغناطیس‌شوندگی آهن‌ربا
۴۴ شکل ۳-۱۹) چگالی شار مماسی ناشی از منابع در مرکز هر مش
۴۴ شکل ۳-۲۰) توزیع چگالی جریان‌های سطحی
۴۵ شکل ۳-۲۱) توزیع شار ناشی از فقط آهن‌ربا توسط SCM برای $\theta_{m1} = 0^\circ$
۴۵ شکل ۳-۲۲) توزیع شار ناشی از فقط آهن‌ربا توسط FEM برای $\theta_{m1} = 0^\circ$
۴۶ شکل ۳-۲۳) توزیع شار ناشی از آهن‌ربا توسط SCM برای $\theta_{m2} = 90^\circ$
۴۶ شکل ۳-۲۴) توزیع شار ناشی از آهن‌ربا توسط FEM برای $\theta_{m2} = 90^\circ$
۴۷ شکل ۳-۲۵) توزیع شار در موتور رلوکتانسی با ۳۸۱ مش توسط SCM برای $\theta_{m1} = 0^\circ$
۴۷ شکل ۳-۲۶) توزیع شار در موتور رلوکتانسی با ۱۳۳۴ مش توسط FEM برای $\theta_{m1} = 0^\circ$
۴۸ شکل ۳-۲۷) توزیع شار در موتور رلوکتانسی با ۳۸۱ مش توسط SCM برای $\theta_{m2} = 90^\circ$
۴۸ شکل ۳-۲۸) توزیع شار در موتور رلوکتانسی با ۱۳۳۴ مش توسط FEM برای $\theta_{m2} = 90^\circ$
۵۲ شکل ۴-۱) فرایند بهینه‌سازی در SCM
۵۶ شکل ۴-۲) رله الکترومغناطیسی
۵۸ شکل ۴-۳) ساختار اولیه سیستم الکترومغناطیسی (قبل از بهینه‌سازی)
۵۸ شکل ۴-۴) ساختار نهایی سیستم الکترومغناطیسی (بعد از بهینه‌سازی)
۵۹ شکل ۴-۵) مقادیر نیروی اعمالی یوک و وزن قسمت متغیر
۶۰ شکل ۴-۶) مقادیر تابع هدف
۶۰ شکل ۴-۷) تغییرات ابعاد ساختار
۶۱ شکل ۴-۸) تعداد مش‌ها بر روی مرز ماده فرومغناطیسی در SCM و FEM
۶۱ شکل ۴-۹) مقایسه مقادیر نیرو توسط SCM و FEM
۶۲ شکل ۴-۱۰) رله الکترومغناطیسی با آهن‌ربا
۶۳ شکل ۴-۱۱) توزیع شار در ساختار اولیه توسط SCM
۶۴ شکل ۴-۱۲) توزیع شار در ساختار اولیه توسط FEM
۶۴ شکل ۴-۱۳) ساختار اولیه (قبل از بهینه‌سازی)
۶۵ شکل ۴-۱۴) ساختار نهایی (بهینه شده) توسط DSA
۶۵ شکل ۴-۱۵) ساختار نهایی (بهینه شده) توسط GA
۶۶ شکل ۴-۱۶) تابع هدف
۶۶ شکل ۴-۱۷) مقادیر نیروی اعمالی به یوک
۶۷ شکل ۴-۱۸) وزن ساختار
۶۷ شکل ۴-۱۹) تغییرات ابعاد ساختار

فهرست شکل‌ها

- شکل ۴-۲۰) تغییرات ابعاد منابع تولید میدان ۶۸
- شکل ۴-۲۱) تعداد مش‌ها بر روی مرز ماده فرومغناطیسی ۶۸
- شکل ۴-۲۲) مقایسه مقادیر نیرو توسط FEM و SCM ۶۹
- شکل ۷-۱) شدت میدان الکتریکی ۷۹
- شکل ۷-۲) شدت میدان مغناطیسی ۷۹
- شکل ۷-۳) چگالی جریان سطحی ۸۰
- شکل ۷-۴) شکست میدان مغناطیسی در بین مرز دو ماده با نفوذپذیری مختلف ۸۱
- شکل ۷-۵) قانون بیوساوار ۸۲
- شکل ۸-۱) اپراتور ژنتیکی تقاطع یک نقطه‌ای ۸۴
- شکل ۸-۲) اپراتور ژنتیکی تقاطع یک نقطه‌ای ۸۴
- شکل ۸-۳) اپراتور ژنتیکی تقاطع یکنواخت ۸۴
- شکل ۸-۴) اپراتور ژنتیکی جهش ۸۵
- شکل ۸-۵) چرخه پایه‌ی الگوریتم ژنتیک ۸۶
- شکل ۸-۶) فرایند بهینه‌سازی با استفاده از DSA ۸۹
- شکل ۸-۷) استفاده از ابزار بهینه‌سازی در MATLAB برای DSA ۹۱
- شکل ۸-۸) مسیر اجرای toolbox ۹۱
- شکل ۸-۹) نمایش ورودی‌ها و خروجی‌های ابزار بهینه‌سازی ۹۲
- شکل ۸-۱۰) الگوریتم جستجوی تابو ۹۵
- شکل ۸-۱۱) الگوریتم جستجوی تابوی چندمنظوره ۹۵
- شکل ۸-۱۲) الگوریتم بهینه‌سازی اجتماع ذرات ۹۷

فهرست جداول

صفحه	جدول
۲۹	جدول ۱-۳: مشخصات ساختار مغناطیسی
۳۲	جدول ۲-۳: مش بندی مرزها در SCM
۳۲	جدول ۳-۳: مش بندی در FEM
۴۰	جدول ۴-۳: مشخصات شبیه سازی
۴۰	جدول ۵-۳: مقایسه نیروها
۴۱	جدول ۶-۳: تعداد مش ها $y_1 = 60$
۴۱	جدول ۷-۳: تعداد مش ها $y_1 = 100$
۴۳	جدول ۸-۳: مشخصات موتور رلوکتانسی تکفاز
۵۷	جدول ۱-۴: مقادیر کمیات و محدودیت ها
۶۳	جدول ۲-۴: مقادیر کمیات و محدودیت های رله با آهن ربا

فصل اول

(مقدمه و اهداف پروژه)

- (مقدمه

دانشمندان و مهندسين برای حل مسائل میدان‌های مغناطیسی تعدادی فن‌آوری یا تکنیک‌هایی را به کار می‌برند، این تکنیک‌ها می‌توانند در سه دسته آزمایشی، تحلیلی و عددی طبقه‌بندی شوند. تکنیک‌های آزمایشی گران، زمانبر و برخی اوقات خطرناک هستند و معمولاً در تغییر پارامتری اجازه انعطاف‌پذیری زیادی ندارند. کاربرد این روش‌های عددی فقط به مسائل مرتبط با الکترومغناطیس محدود نمی‌شود، بلکه در مسائل مختلفی مانند علم صوت شناسی^۱، انتقال گرما^۲، سیالات^۳ و ... استفاده می‌شوند [۱].

برای تحلیل و بررسی ادوات الکترومغناطیسی مانند ماشین‌های الکتریکی بایستی معادلات ماکسول^۴ حل شوند و با توجه به شرایط مرزی و محدوده‌ای که مسائل در آن قرار می‌گیرند، به طور عمومی نمی‌توان از حل تحلیلی استفاده کرد. در بسیاری از موارد حل تحلیلی بسیار پیچیده و زمان‌بر است مانند مسائلی که دارای ساختار پیچیده هندسی می‌باشند. روش‌های عددی به عنوان راه‌حلی برای حل این مسائل، مناسب می‌باشند [۲]. برای معرفی روش‌های حل عددی لازم است تا اشاره‌ای به روابط الکترومغناطیس و معادلات ماکسول شود که در پیوست ۱ معرفی خواهند شد. بنابراین در این فصل اشاره مختصری به چند روش حل عددی می‌شود و سپس تاریخچه روش جریان سطحی بررسی خواهد شد و در آخر اهداف و ساختار پایان‌نامه معرفی می‌شوند.

- (روش‌های حل تحلیلی و حل عددی

دانشمندان برای حل معادلات ماکسول و مسائل میدان تعدادی فن‌آوری یا تکنیک‌هایی را بکار می‌برند. این روش‌ها می‌توانند در ۳ دسته آزمایشی، تحلیلی و عددی طبقه‌بندی شوند. روش‌های آزمایشی، گران‌قیمت، وقت‌گیر و برخی اوقات خطرناک هستند و معمولاً در تغییر پارامترها اجازه انعطاف‌پذیری زیادی را ندارند.

از روش‌های حل تحلیلی و روش‌های حل عددی می‌توان برای حل مسائل الکترومغناطیس استفاده کرد.

- - (روش‌های حل تحلیلی (روش‌های دقیق):

به ندرت اتفاق می‌افتد که مسائل الکترومغناطیس به روش‌های حل تحلیلی، حل شوند و به جواب قابل قبولی برسند و در بسیاری از موارد نیز حل تحلیلی بسیار پیچیده، حجیم و فوق‌العاده زمانبر است. برخی از این روش‌ها عبارتند از [۳]:

- تفکیک متغیرها
- بسط سری‌ها
- تطبیق نگاشت

1 Acoustic

2 Heat Transfer

3 Fluid

4 Maxwell

- حل انتگرال
- روش انحراف

این روش‌ها ممکن است در حل مساله موفق نباشند اگر:

- ✓ مسئله خطی نباشد و خطی‌سازی بر روی نتایج اثر جدی بگذارد و یا عواملی مانند اشباع و جریان‌های گردابی در نظر گرفته شوند.
- ✓ ناحیه مورد تحلیل پیچیده باشد، مانند زمانی که اثر شیار در ماشین‌های الکتریکی در نظر گرفته می‌شود.
- ✓ شرایط مرزی به زمان وابسته بوده و پیچیده باشند.
- ✓ محیط ناهمگن باشد.

در چنین شرایطی برای بدست آوردن یک حل عمومی، روش‌های حل عددی به عنوان تنها گزینه موجود انتخاب می‌شوند.

- - (روش‌های حل عددی (روش‌های تقریبی):

روش‌های حل عددی، بطور معمول تقریبی بوده و بایستی در اهداف مهندسی دارای دقت کافی و زمان حل مناسبی باشند. روش‌های حل عددی معرفی شده در این پروژه عبارتند از:

- روش تفاضل محدود
- روش مدار معادل مغناطیسی
- روش اجزاء محدود
- روش جریان سطحی

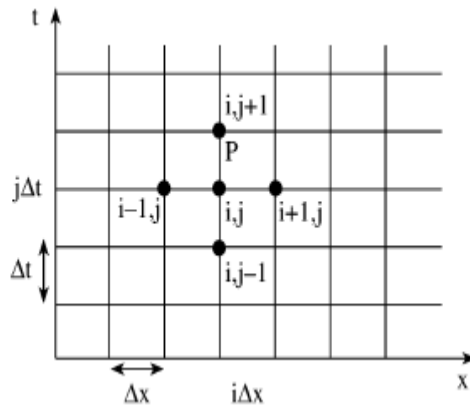
از آنجایی که در این روش‌ها از تقریب استفاده می‌شود، بایستی با توجه به نوع کاربرد دقیق‌ترین روش را استفاده کرد.

- - (روش تفاضل محدود^۱

روش تفاضل محدود (FDM)، اولین بار توسط A.Thom در سال 1920s استفاده شد که به حل معادلات هیدرودینامیک غیرخطی پرداخت [۴].

FDM به آسانی قابل فهم بوده و بارها مورد استفاده قرار گرفته و عموماً قابل اجراست. در این روش معادلات تفاضل محدود جایگزین معادلات دیفرانسیل جزئی می‌شوند. نحوه کار این روش به این صورت است که ابتدا ناحیه حل به یک شبکه از گره‌ها تقسیم‌بندی می‌شود، که این شبکه می‌تواند دایره‌ای یا مستطیلی باشد.

سپس یک دستگاه مختصات مانند شکل ۱-۱ ایجاد کرده که دارای مش‌هایی با عرض Δt و طول Δx می‌باشند. لزوماً نباید Δx و Δt با هم برابر باشند.



شکل (۱-۱) مش‌بندی تفاضل محدود برای دو متغیر وابسته x و t

حول نقطه P نقاطی را در نظر گرفته و برای هر یک از نقاط، یک معادله دیفرانسیل تفاضلی نوشته می‌شود که این معادلات در راستای x و t در نقطه (i, j) به صورت معادلات (۱-۱) و (۲-۱) می‌باشند:

$$\Phi_x \Big|_{i,j} \approx \frac{\Phi_{(i+1,j)} - \Phi_{(i-1,j)}}{2\Delta x} \quad (1-1)$$

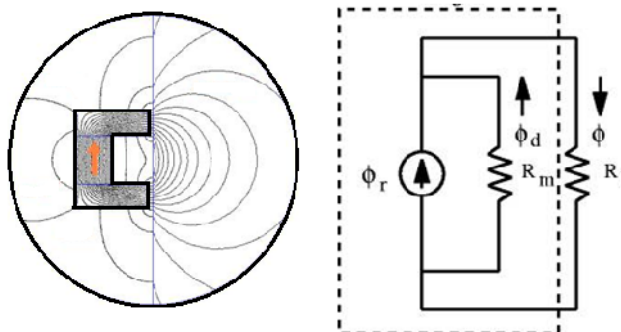
$$\Phi_t \Big|_{i,j} \approx \frac{\Phi_{(i,j+1)} - \Phi_{(i,j-1)}}{2\Delta t} \quad (2-1)$$

این روش برای مسائلی که اشکال پیچیده‌ای دارند یا مرزهای ناهمواری دارند، به دلیل وجود خطا مناسب نیست [۵].

۱-۱- روش مدار معادل مغناطیسی^۱

روش مدار معادل مغناطیسی (MEC)، از سال ۱۹۶۷s معرفی شده و هنوز مانند FEM گسترش نیافته است. در این روش از مدار معادل مغناطیسی استفاده شده و با رسم مسیر عبور شارهای مغناطیسی و شارهای نشتی، رلوکتانس‌های موجود در این مسیرها محاسبه می‌شوند [۶].

در شکل ۲-۱ یک آهن‌ربا به همراه خطوط شار در نظر گرفته شده است که با روش مدار معادل مغناطیسی مدل شده و مسیرهای عبور شار مشاهده می‌شود.



شکل ۲-۱ مدار معادل مغناطیسی یک آهن‌ریا

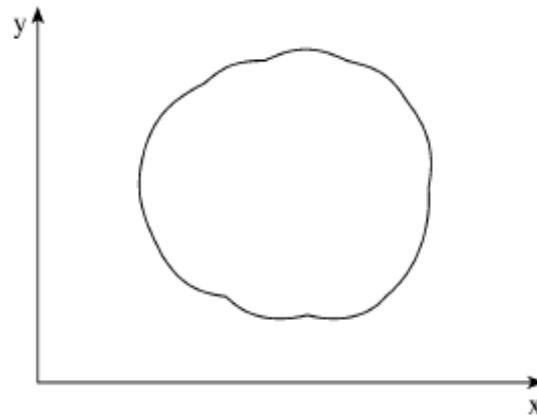
در شکل ۲-۱ مشاهده می‌شود که آهن‌ریا منبع تولید شار است و شار ایجاد شده از مسیر ماده مغناطیسی و هوا عبور می‌کند. برای عبور از این مسیرها بایستی رلوکتانس این دو مسیر را مدل‌سازی کرد. بنابراین مدار معادل این آهن‌ریا با یک منبع تولید شار و رلوکتانس‌های آهن‌ریا و هوا بصورت موازی مدل می‌شود. بر اساس محاسبه رلوکتانس‌های موجود در مسیر شار، در نهایت برای کل ناحیه، رلوکتانس‌ها بصورت یک شبکه محاسبه شده و با یکدیگر محاسبه می‌شوند و ماتریسی با ابعاد بزرگ بدست می‌آید که باید حل شود. بطور خلاصه در این روش تمرکز بر روش‌های مدل‌سازی رلوکتانس مسیرهای اصلی شار است [۷].

- - (روش اجزاء محدود)

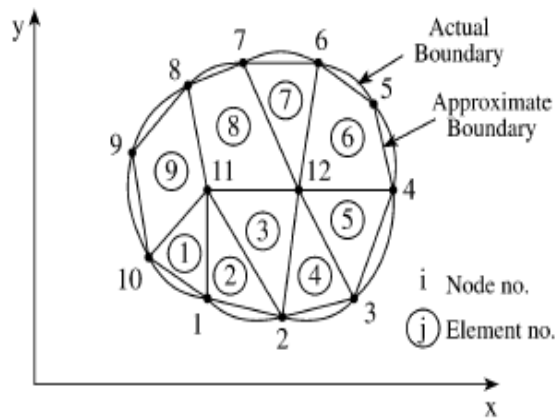
روش اجزاء محدود (FEM)، یکی از روش‌های حل عددی است که از پر قدرترین روش‌های حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی بوده و ناحیه حل را به قسمت‌های کوچکتری (مش) تقسیم می‌کند و معادلات ماکسول را برای هر مش حل کرده و شار یا پتانسیل مغناطیسی (پارامترهای مجهول معادلات ماکسول) هر مش را بدست آورده و در نهایت با یکدیگر جمع می‌کند تا نتایج برای کل ناحیه بدست آید [۸].

اصول کار FEM، تحلیل ساختاری میدان است. اگرچه روش عملیات ریاضی در سال 1943s توسط Courant ارائه شده بود، ولی این روش تا سال 1968s برای مسائل الکترومغناطیس استفاده نمی‌شد [۹].

روش حل توسط FEM به این صورت است که به طور مثال ناحیه حلی مانند شکل ۳-۱ انتخاب شده و این ناحیه به مش‌های مثلثی در شکل ۴-۱ تقسیم می‌شود.



شکل (۳-۱) ناحیه حل در مختصات x,y



شکل (۴-۱) تقسیم بندی ناحیه حل با مش‌های مثلثی [۹]

شکل مش‌ها بستگی به شکل هندسی مسئله دارد، اما معمولاً برای پوشش بهتر دایره‌ها، مش‌ها به صورت مثلثی انتخاب می‌شوند. با توجه به موقعیت و شکل هندسی ناحیه حل، یک ماتریس سختی^۱ حاصل می‌شود که ابعاد آن به تعداد مش‌ها وابسته است و در شکل ۴-۱ تعداد این مش‌ها برابر ۹ ($j = 9$) است. در رابطه (۳-۱) ماتریس سختی نشان داده شده است:

$$[C] = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{j1} & \cdots & C_{jj} \end{pmatrix} \quad (3-1)$$

برای هر ناحیه معادلات ماکسول حل شده و پتانسیل مغناطیسی برای هر مش بدست می‌آید، که پتانسیل مغناطیسی مش‌ها با یکدیگر جمع شده و توزیع پتانسیل در کل ناحیه حل طبق رابطه (۴-۱) محاسبه می‌شود.

1 Stiffness Matrix