دانشگاه علم و صنعت ایران

دانشکدهٔ ریاضی

زیرمدولهای اول

نگین مهرداد

پایان نامه: برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض

استاد راهنما: دکتر حمید آقاتولایی

شهریورماه ۱۳۷۷

بەنام یگانه آفریدگار جهان

تقدیم به:

مادر و پدر عزیزم

که تمامی موفقیتهایم را مدیون

و مرهون آنان می‌باشم

چکیده:

این پایان نامه برداشتی از مقالات [۱] و [۳][۱] می باشد و از سایر مقالات و کتب نیز جهت شرح هرچه بیشتر مطالب استفاده شده است. پایان نامه شامل یک مقدمه و سه فصل می‌باشد. در مقدمه، خلاصه‌ای مختصر از مطالب اساسی در مورد زیرمدولهای اول عنوان شده است. فصل اول شامل تعاریف و قضایای مقدماتی است. در فصل دوم نقش فضاهای برداری در ساختار زیرمدولهای اول، شکلهای مختلف و نحوه ساختن آنها اشاره شده است. در فصل سوم به‌طور خاص روی اشتراک این نوع زیرمدولها بحث و خواص آنها در حالتیکه مدولها متناهی مولد و ضربی و حلقه نوتری، ددکیند یا s.t.r.f هستند مورد بحث قرار داده شده است. لازم به‌ذکر است که تمام این تحقیقات در حالتیکه مدول یکانی و حلقه جابجایی و یکدار است انجام شده است.

۱- در فهرست آورده شده است.

تقدیر و تشکر

سپاسی زدامان گل پاک‌تر ز آوای بلبل تربناک‌تر

نخست سپاس بی‌مرّ، از خدای بزرگ دارم که شاگردی از خِرمن بی‌پایان دانش و فرهنگ استادان بزرگوار و اندیشمندان گرانمایه‌ای شده‌ام که امروز هرچه دارم شبنمی از دریای بی‌کران گوهربار آن فرزانگان می‌باشد و لذا بر خود بایسته می‌دانم که از جنابان:

۱ـ از آقای دکتر حمید تولایی که راهنمایی کامل در تهیه این پایان‌نامه نموده‌اند، تشکر نمایم.

۲ـ از آقای دکتر علیرضا ذکائی که قبول زحمت فرمودند و به‌عنوان داور پایان‌نامه تشریف آوردند کمال تشکر و سپاسگذاری را می‌نمایم.

۳ـ از سرکار خانم دکتر بتول جذبی، ریاست محترم دانشکده ریاضی و همچنین از آقای دکتر خسرو مالک‌نژاد، مدیریت محترم تحصیلات تکمیلی و آقای دکتر محمدرضا مختارزاده عضو هیئت علمی دانشکده ریاضی؛ که در طول مدت تحصیل همواره راهنمای مثمرالثمری برای اینجانب بوده‌اند کمال تشکر را دارم.

همچنین از انسانهای وارسته‌ای که به‌هرگونه در گذراندن این پایان‌نامه، اینجانب را یاری نموده‌اند، چون آقایان: مرتضی رستگارپناه، محمدرضا کوشا، یونس مروارید و نیز مرکز پژوهشهای علمی و صنعتی ایران که در تهیه مقالات، کتب مرجع و چاپ و تایپ پایان‌نامه مرا یاری نموده‌اند، صمیمانه سپاس خود را تقدیم می‌دارم. همچنین در پایان از سرکار خانم بتول یوسفی؛ مسئول آموزش دورهٔ تحصیلات تکمیلی، که همواره راهنمایی شایسته برای اینجانب بوده‌اند تشکر می‌نمایم.

فهرست مطالب

مقدمه:

در سال ۱۹۸۴؛ Chin. pi. lu مقاله‌ای تحت عنوان زیرمدولهای اول نوشت و در این مقاله روی خواص این نوع زیرمدولها بحث کرد. در سال ۱۹۸۶، M.E.Moore و R.L.Mccasland، مقاله‌ای در مورد اشتراک زیرمدولهای اول روی مدولهای متناهی مولد به چاپ رساندند و ساختارهایی را برای زیرمدولهای اول عنوان نمودند. در سال ۱۹۹۲ مجدداً مقاله‌ای تحت عنوان زیرمدولهای اول و مقاله دیگری با عنوان زیرمدولهای اول روی مدولهای نوتری به‌چاپ رساندند و به‌مطالعه و ارتباط بین فضاهای برداری و زیرمدولهای اول پرداختند. همزمان با چاپ این دو مقاله Patrick. F. smith و James Jenkin مقاله‌ای تحت عنوان رادیکال اول یک مدول روی، حلقه‌های جابجایی نوشتند.

در این پایان نامه بطور مشروح روی نتایج این مقالات بحث شده است. فصل اول شامل تعاریف و قضایای مقدماتی است. در فصل دوم زیرمدولهای اول از مدولهای آزاد بررسی می‌شود و شرایطی راکه یک زیرمدول اول به‌عنوان هسته یک مدول می‌باشد مطرح و بررسی شده است و ثابت می‌شود اگر P یک زیرمدول به‌عنوان هسته یک مدول باشد، یک همریختی می‌توان روی مدولهای آزاد پیدا کرد که P هسته آن همریختی باشد. لازم به‌ذکر است که نتایج در حالتی که حلقه یک PID یا مدول یک فضای برداری باشد به‌دست می‌آید. همچنین روی ارتفاع زیرمدولهای اول و زیرمدولهای h– ماکزیمال بحث شده است و ثابت می‌شود در یک حلقه PID

هر مدول بسته اول است و بدین طریق رابطه‌ای بین زیرمدولهای بسته و زیرمدولهای P-ماکزیمال به‌دست می‌آید که از نتایج مهم این فصل می‌باشد. از نتایج مهم دیگر، که به‌دست آمده است، نوع ساختاری زیرمدولهای اول است که چگونه با داشتن یک ایده‌آل و یک حلقه نوتری یا یک مدول متناهی مولد و یا یک مدول لاسکرین می‌توان به‌یک زیرمدول اول دست پیدا کرد. در فصل سوم شرایطی را که رادیکال یک زیرمدول اول است مورد بررسی قرار داده شده است و همچنین با تعریف پوشش یک زیرمدول ثابت می‌شود که اگر B یک زیرمدول رادیکال باشد آنگاه $M\text{-}radB=\langle E_A(B)\rangle$ و یا اگر R یک حلقه PID و B یک زیرمدول سرهٔ R مدول A باشد و $dimA=dimB$ در این صورت $M\text{-}radB=\langle E_A(B)\rangle$ و نیز وقتی A یک R مدول متناهی مولد باشد همواره $\sqrt{(B : A)}=(\langle E_A(B)\rangle : A)=(M\text{-}radB : A)$. و بالاخره در پایان با تعریف رادیکال اول یک مدول، ثابت می‌شود که یک حوزه صحیح نوتری مثل R از بعد سراسری متناهی یک حلقه s.t.r.f است اگر و تنها اگر یک حوزه صحیح ددکیند باشد.

فصل اول

تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف حلقه (۱ـ۱): یک حلقه $<R , + , \circ>$ مجموعه‌ای است چون R با دو عمل دوتایی جمع و ضرب تعریف‌شده در R به‌طوری که اصول موضوعه زیر برقرار باشد:

۱. $<R , +>$ گروه آبلی است.

۲. ضرب شرکت‌پذیر است.

۳. به‌ازاء هر c و b و a از R داشته باشیم:

قانون توزیع‌پذیری چپ $\quad b (a + c) = (ab) + (ac)$

و

قانون توزیع‌پذیری راست $\quad (a + b) c = (ac) + (bc)$

تعریف (۱ـ۲): فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت می‌گوئیم زیرمجموعه $H \subseteq R$ یک ایده‌آل حلقه R است اگر:

۱. $\varnothing \neq H$

۲. $\forall a_1 , a_2 \ ; \ a_1 , a_2 \in H \Rightarrow a_1 \pm a_2 \in h$

و

$\forall r \ ; \ r \in R \ , \ \forall a \ ; \ a \in H \quad ra \in H \quad ar \in H$

و می‌نویسیم $H \lhd R$.

تعریف (۱ـ۳): ایده‌آل I از حلقه R را سره (واقعی) می‌گوئیم هرگاه: $I \neq R$ و می‌نویسیم $I \subsetneqq R$.

تعریف (۱ـ۴): ایده‌آل P از حلقه R را اول گوئیم هرگاه:

$\forall a , b \ ; \ a , b \in R , ab \in P \Rightarrow a \in P$ یا $b \in P$

تعریف (۱ـ۵): حلقه R را یک حوزه صحیح می‌گوئیم هرگاه:

$\forall a, b \; ; \; a, b \in R \; : \; ab = 0 \Rightarrow a = 0$ یا $b = 0$

لم (۱ـ۶): فرض کنید P یک ایده‌آل حلقه R باشد در این صورت P ایده‌آل اول است اگر و تنها اگر $\frac{R}{P}$ حوزه صحیح باشد.

اثبات: به مرجع [۱۴] مراجعه شود. ■

تعریف (۱ـ۷): حلقه R را جابه‌جایی گوئیم هرگاه:

$\forall a, b ; \; a, b \in R \; : \; ab = ba$

تعریف (۱ـ۸): ایده‌آل سرهٔ m از حلقه R را یک ایده‌آل ماکزیمال می‌گوئیم هرگاه m درون هیچ ایده‌آل سره از R قرار نگیرد.

تعریف (۱ـ۹): حلقه R را یکدار گوئیم هرگاه: $\exists a \in R : a \neq 0, \forall b \in R: ab=ba=b$ و در این صورت a را با ۱ نمایش می‌دهیم.

تعریف (۱ـ۱۰): عضو $a \neq 0$ از حلقه جابه‌جایی و یکدار R را وارون‌پذیر می‌گویند، هرگاه عضو b در R موجود باشد بطوری که $ab = ba = 1$ و اصطلاحاً a را یکه می‌گوئیم.

تعریف (۱ـ۱۱): منظور از ایده‌آل تولیدشده توسط عضو a از حلقه جابه‌جایی و یکدار R مجموعه‌ای به‌شکل زیر است:

$<a> = \{ ra \; : \; r \in R \}$

تعریف (۱ـ۱۲): حلقه جابه‌جایی و یکدار R را میدان گوئیم هرگاه هر عضو ناصفر آن دارای وارون‌ضربی باشد.

لم (۱ـ۱۳): اگر m یک ایده‌آل حلقه R باشد در این صورت m ماکزیمال است اگر و تنها اگر $\frac{R}{m}$ میدان باشد.

اثبات: به مرجع [۱۴] مراجعه شود. ■

تعریف (۱-۱۴): حلقه R را یک حوزهٔ ایده‌آل اصلی گوئیم، هرگاه R یک حوزه صحیح باشد و هر ایده‌آل آن توسط یک عضو تولید شود.

[Principal Ideal Domain - PID]

تعریف (۱-۱۵): حلقه R را حوزهٔ تجزیه یکتا می‌گویند، هرگاه R یک حوزه صحیح باشد و هر عضو آن را بتوان به‌صورت حاصلضرب متناهی و منحصربه‌فرد از عناصر اول نوشت.

[Unique Factorization Domain - UFD]

تعریف (۱-۱۶): در حلقه R می‌گوئیم عنصر a، عنصر b را می‌شمارد و می‌نویسیم $a|b$، هرگاه:

$$\exists u \in R : b = ua$$

تعریف (۱-۱۷): عنصر p در حلقه جابه‌جایی و یکدار R را اول گوئیم هرگاه:

$$p|ab \Rightarrow p|a \quad \text{یا} \quad p|b$$

لم (۱-۱۸): ایده‌آل تولیدشده توسط یک عنصر اول در یک حلقه یکدار و PID، یک ایده‌آل اول است.

اثبات: به مرجع [۱۴] مراجعه شود. ■

تعریف (۱-۱۹): عنصر p در حلقه جابه‌جایی و یکدار R را تحویل‌ناپذیر گوئیم هرگاه:

از $a , b \in R \ , \ p = ab$

بتوان نتیجه گرفت که a یکه است یا b یکه است.

لم (۱-۲۰): در هر حلقه PID هر عنصر اول تحویل‌ناپذیر است.

اثبات: به مرجع [۱۴] مراجعه شود. ■

لم (۱-۲۱): در هر حلقه PID، ایده‌آل تولیدشده توسط یک عنصر تحویل‌ناپذیر یک ایده‌آل ماکزیمال است.

اثبات: به مرجع [۱۴] مراجعه شود. ■

لم (۱ـ۲۲): هر حلقه PID یک حلقه UFD است.

اثبات: به مرجع [۱۴] مراجعه شود. ■

تعریف (۱ـ۲۳): ایده‌آل I از حلقه R را یک ایده‌آل رادیکال می‌گویند هرگاه: $I=\sqrt{I}$ که در آن:

$$\sqrt{I}=\{ a\in R : \exists n \quad a^n\in I\}$$

تعریف (۱ـ۲۴): فرض کنید R یک حلقه یکدار بوده و M یک گروه آبلی جمعی باشد. اگر تابعی مانند ϕ موجود باشد بطوری که در شرایط زیر صدق کند می‌گوئیم M یک R مدول چپ است:

$$\phi : R\times M \longrightarrow M$$

$$\forall r\in R \;,\; \forall m\in M \quad \phi((r,x)) = rx$$

۱) $\forall r_1 , r_2 \;;\; r_1 , r_2 \in R \;,\; \forall x \;;\; x\in M \quad (r_1 + r_2)\,x = r_1 x + r_2 x$

۲) $\forall r \;;\; r\in R \;,\; \forall x_1 , x_2 \;;\; x_1 , x_2 \in M \quad r\,(x_1 + x_2) = r x_1 + r x_2$

۳) $\forall r_1 , r_2 \;;\; r_1 , r_2 \in R \;,\; \forall x \;;\; x\in M \quad (r_1 r_2)\,x = r_1 (r_2 x)$

۴) $\forall x \;;\; x\in M \quad 1 . x = x$

به همین ترتیب می‌گویند M یک R مدول راست است، اگر تابع ϕ موجود باشد بطوری که:

$$\phi : M\times R \longrightarrow M$$

$$\forall r\in R \;,\; \forall x\in M \quad \phi((x,r)) = xr$$

و شرایط زیر برقرار باشد:

۱) $\forall x \;;\; x\in M \;,\; \forall r_1 , r_2 \;;\; r_1 , r_2 \in R \quad x\,(r_1 + r_2) = x r_1 + x r_2$

۲) $\forall r \;;\; r\in R \;,\; \forall x_1 , x_2 \;;\; x_1 , x_2 \in M \quad (x_1 + x_2)\,r = x_1 r + x_2 r$

۳) $\forall r_1 , r_2 \;;\; r_1 , r_2 \in R \;,\; \forall x \;;\; x\in M \quad x\,(r_1 r_2) = (x r_1)\,r_2$

۴) $\forall x \; ; \; x \in M \quad x . 1 = x$

لازم به ذکر است که تمامی خواصی که برای یک R مدول چپ برقرار است برای R مدول راست نیز برقرار است. اگر حلقه R جابه‌جایی باشد با تعریف اینکه $ar = ra$ $(r \in R , a \in M)$، R مدول چپ و راست یکی است و می‌گوئیم M یک R مدول است. در این پایان‌نامه فرض بر این است که R یک حلقه جابه‌جایی و یکدار می‌باشد.

تعریف (۱-۲۵): فرض کنید M یک R مدول بوده و N یک زیرمجموعه غیرخالی از M باشد. در این صورت می‌گوییم N یک زیرمدول M است و می‌نویسیم $N \leqq M$، هرگاه دو شرط زیر توأماً برقرار باشد:

۱) $\forall x_1 , x_2 \; ; \; x_1 , x_2 \in N \quad x_1 + x_2 \in N$

۲) $\forall r \; ; \; r \in R \; , \; \forall x \; ; \; x \in N \quad rx \in N$

تعریف (۱-۲۶): منظور از زیرمدول تولیدشده توسط m از R مدول M، مجموعه‌ای به‌شکل زیر است:

$$Rm = \langle m \rangle = \{ rm \; : \; r \in R \}$$

و در این صورت $\langle m \rangle$ را یک زیرمدول دوری می‌گوئیم.

تعریف (۱-۲۷): فرض کنیم B و C دو زیرمدول از R مدول A باشند، دراین صورت منظور از $(B : C)$ مجموعه‌ای به‌صورت زیر است:

$$(B:C) = \{ r \in R \; ; \; rC \subseteq B \}$$

لم (۱-۲۸): فرض کنید A یک R مدول و C و B زیرمدولهای A باشند، در این صورت $(B:C)$ یک ایده‌آل از حلقه R است.

اثبات: اولاً $0 \in (B:C)$ لذا $(B:C) \neq \emptyset$ ،

ثانیاً

$$\forall r \;;\; r \in (B:C) \Rightarrow \forall c \in C \;;\; rc \in B \;,\; \forall a \;;\; a \in R$$

$$\Rightarrow \quad rac \in B \quad \forall c \Rightarrow ra \in (B:C)$$

ثالثاً

$$\forall a_1, a_2 \;;\; a_1, a_2 \in (B:C) \Rightarrow \forall x \in C \qquad a_1 x \in B \;,\; a_2 x \in B \;,\; B \leq A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_1 x + a_2 x) = (a_1 + a_2) x \in B \Rightarrow a_1 + a_2 \in (B:C)$$

لذا $(B:C)$ یک ایده‌آل است. ■

تذکر (۱-۲۹): منظور از نابودساز یک مدول مثل A، $(AnnA) = (0:A)$ می‌باشد.

تعریف (۱-۳۰): فرض کنید P یک زیرمدول از R مدول A باشد. می‌گوئیم P یک زیرمدول سرهٔ A است، هرگاه $P \neq A$ و می‌نویسیم $P \lneq A$.

تعریف (۱-۳۱): فرض کنید P یک زیرمدول سره از R مدول A باشد در این صورت می‌گوئیم P یک زیرمدول اول A است، هرگاه $ra \in P$ $(r \in R , a \in A)$ نتیجه می‌دهد که $r \in (P:A)$ یا $a \in P$.

قرارداد (۱-۳۲): مجموعه همه زیرمدولهای اول از R مدول A را با spec A نشان می‌دهیم.

قرارداد (۱-۳۳): مجموعه همه ایده‌آلهای اول حلقه R را با spec R نشان می‌دهیم.

لم (۱-۳۴): اگر $A = R$ آنگاه هر زیرمدول اول A یک ایده‌آل اول حلقه R است و هر ایده‌آل اول حلقه R یک زیرمدول اول A است.

اثبات: فرض می‌کنیم P یک ایده‌آل اول حلقه R باشد. در این صورت چون $A = R$ پس A یک حلقه است و P یک ایده‌آل اول حلقه A می‌شود. اکنون ادعا می‌کنیم P یک زیرمدول اول A می‌شود. اولاً P یک زیرمدول A است زیرا A روی خودش یک R مدول است و:

$$\forall a_1, a_2 \;;\; a_1, a_2 \in P \;;\; P \lhd R \Rightarrow a_1 + a_2 \in P$$