دانشگاه بیرجند

دانشکده علوم ریاضی و آمار

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی ، گرایش تحقیق در عملیات

عنوان

یک دیدگاه صفحه برشی برای حل مسأله‌ی برنامه‌ریزی چند هدفی کسری غیر خطی صحیح

استاد راهنما

دکترحسن حسن‌پور

استاد مشاور

دکتر مسعود امان

نگارنده

فاطمه جاهد

شهریور ۱۳۹۱

چکیده

در این پایان‌نامه مسائل برنامه‌ریزی چندهدفی کسری غیرخطی(درجه دوم) صحیح به عنوان بخش مهمی از مسائل برنامه‌ریزی چندهدفی مورد بحث قرار گرفته است. روش مورد بحث که اساس آن روش صفحه برش می‌باشد، با استفاده از ویژگی شبه یکنوا بودن توابع کسری غیرخطی موجود در مسأله، تمام نقاط غیرتسلطی مسأله‌ی برنامه‌ریزی چندهدفی کسری غیرخطی صحیح را پیدا می‌کند. در این روش یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی کسری غیرخطی صحیح تک‌هدفی با یکی از توابع هدف مسأله‌ی چندهدفی در نظر گرفته می‌شود و روش صفحه برش برای آن مورد استفاده قرار می‌گیرد. برش‌های مطرح شده کل یک یال از ناحیه‌ی شدنی را بررسی کرده و سپس حذف می‌کند به‌طوری که قسمت‌های حذف‌شده دوباره ظاهر نمی‌شوند؛ که با توجه به فرض بسته و کران‌دار بودن ناحیه‌ی شدنی منجر به همگرایی الگوریتم در تعداد متناهی تکرار می‌شود.

واژگان کلیدی: برنامه‌ریزی کسری، برنامه‌ریزی چندهدفی، برنامه‌ریزی صحیح، نقاط کارا، نقاط فرین.

تعداد صفحات پایان نامه: ۷۴

تقدیم به:

پدر و مادر مهربانم

که نگاهشان به وسعت آسمان است،

همسر عزیزم

که مهرش تابنده تر از مهر است

و

خواهر مهربان و دو برادر عزیزم

که وجودشان گرمابخش زندگیم است.

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی ثمری لحظه ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می داری.

تو می دانی و همه می دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته ام می درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه هایم احساس می کنم. نمی توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله های ضعیف و افتاده، پنهان کرده ام دریاب، دریاب.

تو می دانی و همه می دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی همراه، جهاد بی سلاح، کار بی پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی دنیا، مذهب بی عوام، عظمت بی نام، خدمت بی نان، ایمان بی ریا، خوبی بی نمود، گستاخی بی خامی، قناعت بی غرور، عشق بی هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی آنکه دوست بدانند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنهاشوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن هاست...

---

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس و ستایش مخصوص پروردگار جهانیان است

خداوند را شاکرم که به من نعمت حیات بخشید و توفیق عنایت نمود تا گامی هر چند کوچک در راه علم بردارم.

از تمامی معلمان و اساتید گرامی که در طول دوران تحصیل مرا در کسب دانش و معرفت یاری نمودند، تشکر می نمایم؛ به ویژه:

از استاد راهنمای گرانقدرم جناب آقای دکتر حسن پور که همواره از راهنمایی های ارزنده شان بهره مند شده ام صمیمانه سپاسگزارم و از خداوند متعال طول عمر با عزت و توفیق روزافزون برای ایشان مسئلت می نمایم.

از استاد مشاور ارجمندم جناب آقای دکتر امان که زحمت مشاوره ی این پایان نامه را پذیرفتند بسیار سپاسگزارم.

از جناب آقای دکتر وزیری و سرکار خانم دکتر نصرآبادی که زحمت مطالعه و داوری این پایان نامه را برعهده گرفتند قدردانی می کنم.

از خانواده عزیزم به ویژه همسرم که همواره حامی و مشوق من بودند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

در پایان از تمامی دوستانم به ویژه خانم ها الهام حسین زاده، سحر مسگران و زهرا حسن پور که در طول این تحقیق صادقانه اطلاعاتشان را در اختیارم قرار دادند نهایت سپاس را دارم. خاطره ی زیبای همکلاسی های خوبم خانم ها احمدی، حسن پور، خزاعی، رمضان زاده، صاحبی و آقایان عبدالله زاده و کیانی هیچگاه از ذهنم پاک نخواهد شد. از هم اتاقی های خوبم خانم ها زکیه حیدری، زهرا ذاکر و زهرا نادی که در این مدت دورانی پر از خاطره های خوب و دوست داشتنی را برایم به ارمغان گذاشتند بسیار سپاسگزارم.

فاطمه حامد

شهریور ۱۳۹۱

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

اکثر تصمیم‌گیری‌های مدیران تحت تأثیر عوامل مختلف کمی و کیفی قرار دارد که عموماً این عوامل با یکدیگر در تعارض هستند. اشتباه و عدم دقت در تصمیم‌گیری مستلزم پرداخت هزینه‌ی خطا می‌باشد. هرچه قدرت و اختیار مدیریت بیشتر باشد هزینه‌ی تصمیم غلط نیز بالاتر خواهد بود. برای پیشگیری از خطا در تصمیم‌گیری و پرداخت هزینه‌های گزاف آن، نیاز به روش‌های قوی در این زمینه می‌باشد. از این رو روش‌های برنامه‌ریزی چندهدفی در سه دهه‌ی گذشته بسیار مورد توجه محافل علمی و کاربردی بوده است.

پژوهش در زمینه‌ی روش‌های حل مسائل برنامه‌ریزی صحیح چندهدفی در مقایسه با مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفی با متغیرهای پیوسته محدود بوده است [۱، ۸، ۱۰، ۲۴]. یکی از دلایل این امر، این است که وجود متغیرهای گسسته در مسائل برنامه‌ریزی چندهدفی، حتی اگر خطی باشند حل آن‌ها را مشکل‌تر می‌کند.

پیش از این تحقیقات گسترده‌ای در زمینه‌ی مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفی انجام شده است و دیدگاه‌های بسیاری برای حل آن‌ها ارائه شده است [۷، ۹، ۲۳، ۲۵]. اخیراً محققان در زمینه‌ی نمونه‌های پیچیده‌تر مانند برنامه‌ریزی چندهدفی غیرخطی [۵، ۱۷]، بهینه‌سازی چندهدفی گسسته [۶، ۱۳، ۱۵، ۱۶] و مسائل برنامه‌ریزی چندهدفی کسری [۴، ۱۱، ۱۲، ۱۴] کار می‌کنند. برنامه‌ریزی کسری موضوعی است که کاربرد زیادی در مسائل جهان واقعی دارد، به عنوان مثال می‌توان به مسأله‌ی تخصیص منابع، مسأله‌ی انتخاب سهام، مسأله‌ی بارگیری کالا و مسائل فرآیندهای تصادفی اشاره کرد.

بررسی‌های انجام‌شده توسط شیبل [۲] [۱۹، ۲۰] و اسنیدویچ [۳] [۲۲] نشان می‌دهد که تعداد قابل ملاحظه‌ای از مسائل تصمیم‌گیری به‌طور مستقیم یا غیر مستقیم با مسائل برنامه‌ریزی کسری یک‌هدفی یا چندهدفی در ارتباط هستند، ولی در نظر گرفتن فقط یک تابع هدف در بسیاری از مواقع با مسائل جهان واقعی سازگاری ندارد.

---
[۲] Schaible
[۳] Sniedovich

آنچه در این تحقیق خواهد آمد به قرار زیر است:

در فصل اول، پس از معرفی مسأله‌ی بهینه‌سازی چندهدفی و مفهوم جواب بهینه‌ی پارتو برای این نوع مسائل، دو روش برای حل این گونه مسائل بیان شده است. سپس توابع محدب و تعمیم آن‌ها بررسی شده‌اند.

در فصل دوم، مسأله‌ی برنامه‌ریزی کسری غیرخطی و مسأله‌ی برنامه‌ریزی کسری غیرخطی صحیح مورد بررسی قرار گرفته است و روشهایی برای حل این مسائل به همراه مثال ارائه شده است.

در فصل پایانی، پس از معرفی مسأله‌ی برنامه‌ریزی چندهدفی کسری غیرخطی صحیح، الگوریتمی بر اساس روش صفحه برش، برای حل این‌گونه مسائل ارائه شده است.

فصل ۱
مفاهیم اولیه

.

۱.۱ مقدمه

در این فصل ابتدا با مسأله‌ی بهینه‌سازی چندهدفی و مفهوم جواب کارا برای این نوع مسائل آشنا می‌شویم، و دو روش برای حل این گونه مسائل مطرح می‌کنیم. سپس مسأله‌ی برنامه‌ریزی صحیح چندهدفی را معرفی می‌کنیم. در ادامه به معرفی توابع محدب و تعمیم آن‌ها می‌پردازیم، و با بیان چند قضیه این توابع را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲.۱ تعاریف مقدماتی

در این زیربخش، برخی از تعاریف مقدماتی مورد نیاز را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱. [۲] مجموعه بردارهای a_1، a_2، ...، a_k با بعد n **مستقل خطی** گفته می‌شوند هرگاه $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j = 0$ نتیجه دهد که به ازای $j = 1, 2, \ldots, k$، $\lambda_j = 0$.
اگر مجموعه‌ای از بردارها مستقل خطی نباشند، **وابسته‌ی خطی** نامیده می‌شوند.

تعریف ۲.۲.۱. [۲] فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ است. **رتبه‌ی سطری** ماتریس A مساوی با ماکزیمم تعداد سطرهای مستقل خطی A است. **رتبه‌ی ستونی** ماتریس A مساوی با ماکزیمم تعداد ستون‌های مستقل خطی A است.
می‌توان نشان داد که رتبه‌ی سطری یک ماتریس مساوی با رتبه‌ی ستونی آن ماتریس است، و بنابراین **رتبه‌ی ماتریس** A مساوی با ماکزیمم تعداد سطرهای (یا ستون‌های) مستقل خطی آن است.

تعریف ۳.۲.۱. [۲] یک **ابرصفحه** در $\mathbb{R}^n$ یک مجموعه به‌صورت $\{x \mid p.x = k\}$ است که در آن p یک بردار ناصفر در $\mathbb{R}^n$ و k یک اسکالر است. به بیان دیگر، یک ابرصفحه شامل تمام نقاط $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ است که در معادله‌ی $\sum_{j=1}^{n} p_j x_j = k$ صدق می‌کنند.

تعریف ۴.۲.۱. [۲] گوییم یک مجموعه از ابرصفحه‌ها مستقل خطی هستند هرگاه ماتریس ضرایب آن‌ها رتبه‌ی کامل سطری داشته باشد.

تعریف ۵.۲.۱. [۲] یک **نیم‌فضا** در $\mathbb{R}^n$ یک مجموعه به‌صورت $\{x \mid p.x \leq k\}$ است که در آن p یک بردار ناصفر در $\mathbb{R}^n$ و k یک اسکالر است. یک نیم‌فضا می‌تواند به‌صورت مجموعه نقاط $\{x \mid p.x \geq k\}$ نیز نمایش داده شود.

تعریف ۶.۲.۱. [۲] یک مجموعه **چندوجهی** اشتراک تعداد متناهی از نیم‌فضاها است. یک چندوجهی را می‌توان با $\{x \mid Ax \leq b\}$ نشان داد که در آن Aیک ماتریس $m \times n$ و b یک بردار m-تایی است.
اگر $p.\bar{x} = k$، آن‌گاه محدودیت $p.x \leq k$ از چندوجهی S در نقطه‌ی $\bar{x} \in S$ **فعال** خوانده می‌شود.

تعریف ۷.۲.۱. [۲] مجموعه‌ی چندوجهی S را در نظر بگیرید. نقطه‌ی $\bar{x} \in S$ را نقطه‌ی فرین (نقطه‌ی رأسی یا نقطه‌ی گوشه‌ای) S می‌گویند هرگاه $\bar{x}$ روی n ابرصفحه‌ی مستقل خطی از S قرار بگیرد.

۳.۱ بهینه‌سازی چند هدفی

انسان در زندگی روزمره تصمیمات بسیاری می‌گیرد. این تصمیمات از مسائل شخصی و فردی تا مسائل بزرگ و کلان را شامل می‌شود. در اکثر مسائل تصمیم‌گیری عموماً اهداف و عوامل متعددی مطرح است و فرد تصمیم‌گیرنده سعی می‌کند بین چند گزینه‌ی موجود، بهترین گزینه را انتخاب نماید.
در زیر چند نمونه از تصمیم‌گیری‌های چند معیاره در مراحل مختلف زندگی ذکر می‌گردد. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود این تصمیمات تحت تأثیر چندین معیار و عامل قرار دارند:
- **انتخاب شغل**: این امر بستگی به ماهیت شغل، شخصیت فرد، میزان حقوق، محل کار، موفقیت‌های شغلی و ... دارد.
- **انتخاب محل سکونت**: این مسأله تحت تأثیر قیمت منزل، فاصله‌ی آن تا محل کار، سکوت و آرامش محله و... است.

-**انتخاب موشك برای نیروی هوایی**: این امر از عواملی چون سرعت، برد، قابلیت اطمینان، دقت عملکرد، هزینه و ... تأثیر می‌پذیرد.
-**توسعه‌ی منابع آب**: توسعه‌ی سدها و منابع آبی در کشورها بستگی به عواملی مانند هزینه‌ی احداث سد، صدمات ناشی از سیل در صورت عدم وجود سد، هزینه‌ی خشکسالی در صورت عدم وجود سد، استفاده از آب سد در زمین‌های کشاورزی و مصرف شهری، توسعه‌ی نیروگاه‌ها و تولید برق و ... دارد.[۲۶]
در تحقیق در عملیات این نوع مسائل به عنوان مسائل تصمیم‌گیری چند معیاره [۱](MCDM) شناخته شده است.
با توجه به مسائل بالا در می‌یابیم که تصمیم‌گیری چند معیاره در زندگی بشر کاربردهای زیادی دارد و انسان به طور ناخواسته در شبانه روز تعداد زیادی از این‌گونه تصمیمات می‌گیرد که برخی از آنها نیاز به بررسی و دقت بیشتری دارد، چون خطا در آنها هزینه‌ی بالایی خواهد داشت.
مسائل تصمیم‌گیری از نظر ساختار به دو گروه تقسیم می‌شوند:
-تصمیم‌گیری چند مشخصه‌ای [۲](MADM) : در این گروه، مسأله‌ی تصمیم‌گیری دارای چند گزینه‌ی مشخص است و تصمیم بر اساس چند مشخصه‌ی معلوم اتخاذ می‌شود. مدل‌های گسسته یعنی مدل‌هایی که در آن گزینه ها به‌طور صریح تعریف شده‌اند، مانند انتخاب یك منزل مناسب از بین چند منزل و یا انتخاب یك فناوری مناسب از بین چند فناوری موجود، در این گروه قرار می‌گیرند.
- تصمیم‌گیری چند هدفی [۳](MODM) : در این گروه، برای مسأله‌ی تصمیم‌گیری مجموعه‌ای از اهداف مختلف و محدودیت‌ها تعریف می‌شود. مدل‌های پیوسته یعنی مدل‌هایی که در آن گزینه ها به طور ضمنی (تلویحی) تعریف شده‌اند در این گروه قرار می‌گیرند. مانند تعیین عمر بهینه‌ی یك قطعه برای تعویض، به طوری که هزینه کاهش یافته و قابلیت اطمینان بیشتر گردد.
بهینه‌سازی چند هدفی [۴](MOO) بخشی از رویکرد تصمیم‌گیری چندهدفی است. مسأله‌ی بهینه‌سازی چندهدفی همانند مسأله‌ی بهینه‌سازی تک هدفی مجموعه محدودیت‌هایی دارد که ناحیه‌ی شدنی را تعیین می‌کند.
مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی چندهدفی [۵](MOLP) نوع خاصی از مسائل بهینه‌سازی چندهدفی می‌باشد که در آن توابع هدف و همچنین قیدهایی که ناحیه‌ی شدنی را می‌سازند خطی هستند. ساختار

[۱] Multiple Criteria Decision Making
[۲] Multiple Attribute Decision Making
[۳] Multiple Objecvive Decision Making
[۴] Multiple Objective Optimization
[۵] Multiple Objective Linear Programming

کلی چنین مسائلی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}(MOLP)\quad & \max \quad \{c^1x = z_1(x)\}\\ & \max \quad \{c^2x = z_2(x)\}\\ & \qquad \vdots \\ & \max \quad \{c^rx = z_r(x)\}\\ & \quad s.t. \quad x \in X \subseteq \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

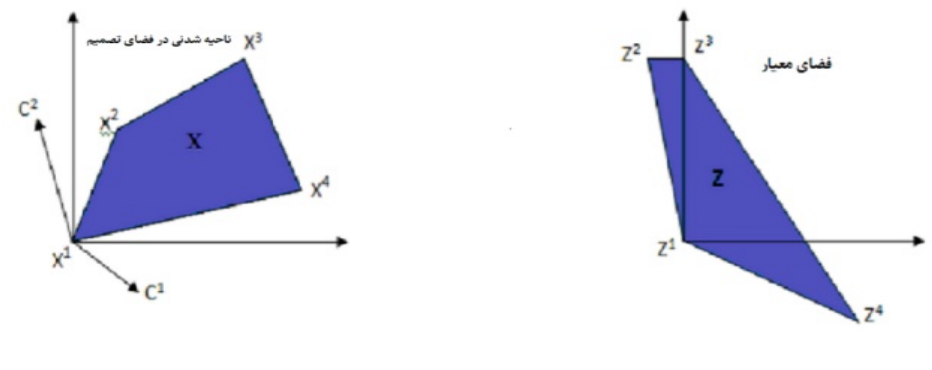
یا:

$$\text{"}\max\text{"} \quad \{Cx = z \ : \ x \in X\}$$

که در آن X یک چندوجهی، r تعداد اهداف، c^k گرادیان k امین تابع هدف، و z_k مقدار k امین تابع هدف می‌باشد. به فضای n بعدی اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ فضای تصمیم گفته می‌شود و X ناحیه‌ی شدنی در این فضاست. "max" نشان می‌دهد که هدف، بیشینه‌کردن همه‌ی اهداف به طور همزمان می‌باشد. C ماتریس ضرایب توابع هدف، ماتریسی $r \times n$ با سطر k ام c^k، و z برداری در $\mathbb{R}^r$ با مؤلفه‌ی k ام z_k است.
در مسأله‌ی (MOLP) که X ناحیه‌ی شدنی آن در فضای تصمیم است، فضای معیار (Z) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z = \{\ z \in \mathbb{R}^r \mid z = Cx \ \ , \ \ x \in X\}$$

هر $x \in X$ یک بردار جواب و $z = (z_1(x), ..., z_r(x))^T$ بردار معیار آن نام دارد. در واقع فضای معیار مجموعه‌ی تمام بردارهای معیار شدنی می‌باشد. به ازای هر نقطه در ناحیه‌ی شدنی X، یك نقطه در فضای معیار Z وجود دارد.



شکل ۱.۱: ارتباط بین فضای تصمیم و فضای معیار در یک مسأله‌ی بیشینه‌سازی دوهدفی

اگر مفهوم بهینگی برای مسأله‌ی تک‌هدفی را مستقیماً برای برنامه‌ریزی چندهدفی بکار بریم، به مفهوم جواب بهینه‌ی کامل زیر خواهیم رسید.

تعریف ۱.۳.۱. [۲۳] $x^* \in X$ **جواب بهینه‌ی کامل** برای مسأله‌ی (MOLP) گفته می‌شود هرگاه برای هر $x \in X$، به ازای $k = 1, ..., r$ داشته باشیم $z_k(x^*) \geq z_k(x)$.

در مسائل بهینه‌سازی چندهدفی با توجه به تعارض اهداف با یکدیگر، معمولاً یافتن نقطه‌ای که تمام اهداف را به طور همزمان بهینه کند، عملی نیست. بنابراین به جای جواب بهینه‌ی کامل، یك مفهوم جواب جدید بنام جواب بهینه‌ی پارتو[۶] یا جواب کارا[۷] بر اساس ایده‌ی اقتصاددان ایتالیایی، ویلفرد پارتو [۸] معرفی می‌گردد.

تعریف ۲.۳.۱. [۲۳] $x^* \in X$ **جواب بهینه‌ی پارتو** برای مسأله‌ی (MOLP) نامیده می‌شود هرگاه $x \in X$ وجود نداشته باشد به طوری که به ازای $k = 1, ..., r$، $z_k(x) \geq z_k(x^*)$ و برای حداقل یك اندیس h داشته باشیم $z_h(x) > z_h(x^*)$.

علاوه بر بهینگی پارتو، بهینگی پارتوی ضعیف نیز به عنوان یك مفهوم جواب کمی ضعیف‌تر از بهینگی پارتو تعریف می‌شود.

تعریف ۳.۳.۱. [۲۳] $x^* \in X$ یک **جواب بهینه‌ی پارتوی ضعیف** [۹] برای مسأله‌ی (MOLP) نامیده می‌شود هرگاه $x \in X$ دیگری وجود نداشته باشد به طوری که به ازای هر $k = 1, ..., r$، داشته باشیم $z_k(x) > z_k(x^*)$.

فرض کنید X^{CO}، X^P و X^{WP} به ترتیب نشان‌دهنده‌ی مجموعه‌ی جواب‌های بهینه‌ی کامل، بهینه‌ی پارتو و بهینه‌ی پارتوی ضعیف باشند. به آسانی می‌توان دید که:

$$X^{CO} \subseteq X^P \subseteq X^{WP}.$$

مشابه مفهوم جواب بهینه‌ی پارتو در فضای شدنی (فضای تصمیم)، مفهومی نیز در فضای هدف داریم که در تعریف زیر ارائه شده است.

[۶] Pareto optimal solution
[۷] Efficient solution
[۸] Wilfred Pareto
[۹] Weak Pareto optimal solution

تعریف ۴.۳.۱. [۲۳] فرض کنیم $z^1, z^2 \in Z$ دو بردار معیار باشند. می‌گوییم z^1 بر z^2 غالب است یا z^2 تحت تسلط z^1 قرار دارد هرگاه $z^1 \geq z^2$ و $z^1 \neq z^2$. یعنی به ازای $k = 1, ..., r$ داشته باشیم $z_k^1 \geq z_k^2$ و برای حداقل یك اندیس h، $z_h^1 > z_h^2$. به عبارتی $\bar{z} \in Z$ را بردار **غیرمغلوب** گوییم هرگاه $z \in Z$ وجود نداشته باشد که بر $\bar{z}$ غلبه داشته باشد. در غیر این‌صورت $\bar{z}$ را یك بردار **مغلوب** می‌نامیم.

مفهوم غالب بودن عموماً برای بردارهای واقع در فضای معیار به‌کار می‌رود، در حالی که مفهوم کارا بودن برای بردارهای جواب در فضای تصمیم به‌کار می‌رود. با توجه به تعریف، نقطه‌ی $x^* \in X$ جواب بهینه‌ی پارتو است اگر بردار معیار آن در Z غیرمغلوب باشد. مجموعه‌ی تمام جوابهای بهینه پارتو مجموعه‌ی بهینه‌ی پارتو نامیده می‌شود.

۱.۳.۱ روش‌های کلاسیك حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفی

بعضی از روش‌های رایج کلاسیک عبارتند از: روش مجموع وزنی [۱۰]، روش الفبایی [۱۱]، برنامه‌ریزی آرمانی [۱۲]، روش $e-$محدودیت (روش قیدی)[۱۳]، روش تابع مطلوبیت [۱۴] [۲۶].
این روش‌ها معمولاً متکی بر اطلاعاتی درباره‌ی اهداف مانند وزن اهداف و اولویت نسبی آن‌ها هستند. در این بخش دو روش برای حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفی معرفی می‌شود.

روش مجموع وزنی

این روش همان طور که از نامش پیداست با در نظر گرفتن یک بردار وزن $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_r)$، مجموع وزن‌دار توابع هدف را به صورت $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k c^k x$ تشکیل داده و آن را به عنوان تابع هدف جدید در نظر می‌گیرد. وزن هرهدف معمولاً به اهمیت نسبی آن هدف و عامل مقیاس در مسأله‌ی مورد نظر بستگی دارد.
پس از تعیین وزن و نرمال‌سازی اهداف، مسأله‌ی چندهدفی استاندارد به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\max \quad \{\lambda^T C x \ : \ x \in X\},$$

که در آن مجموعه‌ی بردارهای وزنی ممکن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^r \ : \ \lambda_k > 0, \quad k = 1, ..., r, \quad \sum_{k=1}^{r} \lambda_k = 1\}.$$

[۱۰] Weighted Sum Method
[۱۱] Lexicografic
[۱۲] Goal Programming
[۱۳] e -Constraint
[۱۴] Utility Function Method

قضیه ۱.۳.۵. [۱۸] *اگر* $x^* \in X$ *یك جواب بهینه‌ی پارتو برای مسأله‌ی* $(MOLP)$ *باشد، آن‌گاه برداری مانند* $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_r) \geq \mathbf{0}$ *موجود است به طوری که* x^* *جواب بهینه‌ی مسأله وزنی نظیر است.*

قضیه ۱.۳.۶. [۱۸] *اگر* $x^* \in X$ *یك جواب بهینه برای مسأله‌ی وزنی به ازای برداری مانند* $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_r) > \mathbf{0}$ *باشد، آن‌گاه* x^* *یك جواب بهینه‌ی پارتو برای مسأله‌ی* $(MOLP)$ *است.*

مزایا و معایب روش مجموع وزنی: از مزایای روش مجموع وزنی سادگی کاربرد آن است. همچنین استفاده از روش مجموع وزنی برای ارزیابی مقدار شایستگی جواب‌ها در الگوریتم‌های ژنتیك مفید است. اما در بسیاری از موارد تخمین دقیق بردار وزن ممکن نیست و تعیین آن به میزان خبرگی و نظر تصمیم‌گیرنده بستگی دارد. همچنین مجموعه‌ی بردارهای وزنی بهینه نه تنها به تابع مطلوبیت تصمیم‌گیرنده (که تابعی است که بردارهای فضای معیار را به خط حقیقی می‌نگارد و مقدار بیشتر تابع به ازای یک بردار معیار، نشان‌دهنده‌ی مطلوبیت بیشتر آن بردار برای تصمیم‌گیرنده است)، بلکه به

- طول نسبی گرادیان های تابع هدف،
- شکل هندسی ناحیه شدنی،
- میزان وابستگی توابع هدف به یکدیگر

نیز بستگی دارد که هر یک از این موارد به نوبه‌ی خود کاربرد روش مجموع وزنی را با مشکل مواجه می‌کند. همچنین کاربرد این روش در شرایطی که فضای جواب محدب نیست، توأم با مشکلاتی است. با وجود این معایب، سادگی روش مجموع وزنی باعث شده است که استفاده از این روش به طور مستقل یا ترکیبی برای حل مسائل بهینه سازی چند هدفی با استقبال گسترده روبرو شود.

روش $e-$ **محدودیت**

در این روش سعی بر پیدا کردن یك نقطه‌ی بهینه در یك فضای شدنی کاهش‌یافته است. به این طریق که یکی از اهداف مسأله به صورت زیر برای بیشینه‌سازی انتخاب می‌شود، در حالی که سایر اهداف باید بزرگ‌تر یا مساوی یك مقدار مشخص باشند. یعنی مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی (تک‌هدفی) زیر حل می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \{c^i x = z_i\} \\ s.t. \quad & c^k x \geq e_k \qquad k = 1, ..., r\ ,\ k \neq i \\ & x \in X. \end{aligned}$$

در این روش باید دقت نمود که کران‌های توابع هدف به گونه‌ای باشند که مسأله‌ی تک هدفی حاصل جواب قابل قبول داشته باشد.
قابل توجه است که ممکن است روش $e-$محدودیت نقاط بهینه‌ی پارتوی فرین را پیدا نکند و جواب‌ها نقاط مرزی باشند. زیرا در این روش به خاطر اضافه کردن محدودیت به مسأله، ناحیه‌ی شدنی کوچك‌تر شده که ممکن است منجر به یافتن نقاط مرزی غیرفرین شود.

قضیه ۱.۳.۷. [۱۸] *اگر $x^* \in X$ جواب بهینه‌ی منحصر به فرد مسأله‌ی $e-$محدودیت به ازای e_k که $k = 1, ..., r$ و $k \neq i$ باشد، آن‌گاه x^* یك جواب بهینه‌ی پارتو برای مسأله‌ی $(MOLP)$ است.*

قضیه ۱.۳.۸. [۱۸] *اگر $x^* \in X$ یک جواب بهینه‌ی پارتو برای $(MOLP)$ باشد، آن‌گاه x^* یك جواب بهینه برای مسأله‌ی $e-$محدودیت به ازای اعدادی مانند e_k که $k = 1, ..., r$ و $k \neq i$ است.*

۱.۳.۲ مسأله‌ی برنامه‌ریزی صحیح چندهدفی

مسأله‌ی برنامه‌ریزی صحیح چندهدفی(MOIP) [۱۵]، نوع خاصی از مسائل بهینه‌سازی چندهدفی می‌باشد که در آن متغیرهای تصمیم باید عدد صحیح باشند. ساختار کلی چنین مسائلی به صورت زیر است:

$$
\begin{array}{lll}
(MOIP) & \max & f_1(x) \\
 & \max & f_2(x) \\
 & & \cdot \\
 & & \cdot \\
 & & \cdot \\
 & \max & f_k(x) \\
 & s.t. & x \in X \subseteq \mathbb{R}^n,
\end{array}
$$

که در آن k تعداد اهداف، X مجموعه‌ی جواب‌های شدنی یا همان فضای تصمیم است که به ازای هر $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$، $x_i \geq 0$ و صحیح می‌باشد.

[۱۵] Multiple Objective Linear Programming

۴.۱ توابع محدب و تعمیم آن‌ها

تعریف ۱.۴.۱. [۳] فرض کنید S یک مجموعه‌ی غیرتهی در $\mathbb{R}^n$ باشد. تابع $f : S \to \mathbb{R}$ و $\bar{x} \in intS$ را در نظر بگیرید. اگر برداری مانند $\bigtriangledown f(\bar{x})$ به‌نام بردار گرادیان و تابعی مانند $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به طوری که

$$f(x) = f(\bar{x}) + \bigtriangledown f(\bar{x})^t(x - \bar{x}) + \parallel x - \bar{x} \parallel \alpha(\bar{x}, x - \bar{x}) \quad \forall x \in S$$

که در آن $\lim_{x \to \bar{x}} \alpha(\bar{x}, x - \bar{x}) = 0$، تابع f را در $\bar{x}$ مشتق‌پذیر گوییم.
اگر تابع f در تمام نقاط مجموعه‌ی S مشتق‌پذیر باشد، آن را روی S **مشتق‌پذیر** گوییم.
توجه کنید که اگر f در $\bar{x}$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه فقط یک بردار گرادیان وجود دارد که به شکل

$$\bigtriangledown f(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n} \right)^t \equiv (f_1(\bar{x}), \ldots, f_n(\bar{x}))^t$$

است که در آن $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} \equiv f_i(\bar{x})$ مشتق جزئی f نسبت به x_i در $\bar{x}$ می‌باشد.

تعریف ۲.۴.۱. [۲] مجموعه‌ی S در $\mathbb{R}^n$ **محدب** گفته می‌شود هرگاه به ازای هر دو نقطه‌ی مفروض $x_1, x_2 \in S$ و هر $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم:

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S.$$

تعریف ۳.۴.۱. [۲] فرض کنید $S \subseteq \mathbb{R}^n$ یک مجموعه‌ی محدب غیرتهی باشد. در این صورت

الف) تابع f را روی S **محدب** گوییم هرگاه به ازای هر $x_1, x_2 \in S$ و هر $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

ب) تابع f را روی S **محدب اکید** گوییم هرگاه به ازای هر $x_1, x_2 \in S$ که $x_1 \neq x_2$ و هر $\lambda \in (0, 1)$ داشته باشیم:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

پ) تابع f را روی S **شبه محدب** گوییم هرگاه به ازای هر $x_1, x_2 \in S$ و هر $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}.$$

ت) تابع f را روی S **شبه محدب اکید** گوییم هرگاه به ازای هر $x_1, x_2 \in S$ که $f(x_1) \neq f(x_2)$ و هر $\lambda \in (0,1)$ داشته باشیم:

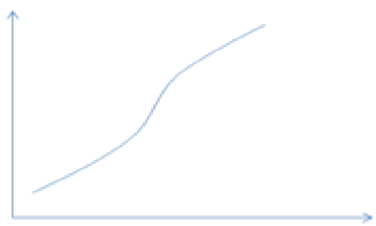
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \max\{f(x_1), f(x_2)\}.$$

ث) تابع f را **به‌طور صریح شبه محدب** گوییم هرگاه f روی S، شبه محدب و شبه محدب اکید باشد.

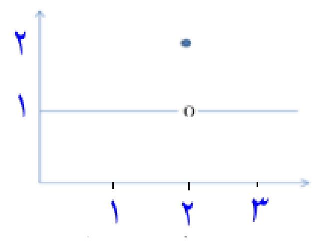
ج) تابع مشتق‌پذیر f را روی S **محدب‌نما** گوییم هرگاه به ازای هر $x_1, x_2 \in S$ که $\nabla f(x_1)^t(x_2 - x_1) \geq 0$، داشته باشیم $f(x_2) \geq f(x_1)$. یا به‌طور معادل، اگر $f(x_2) < f(x_1)$ آن‌گاه $\nabla f(x_1)^t(x_2 - x_1) < 0$.

همچنین تابع f روی مجموعه‌ی S، مقعر، مقعر اکید، شبه مقعر، شبه مقعر اکید و مقعرنما نامیده می‌شود هرگاه $-f$ روی S به ترتیب محدب، محدب اکید، شبه محدب، شبه محدب اکید و محدب نما باشد. علاوه بر این تابع f را **به‌طور صریح شبه یکنوا** نامیم اگر f، به‌طور صریح شبه مقعر و به‌طور صریح شبه محدب باشد.

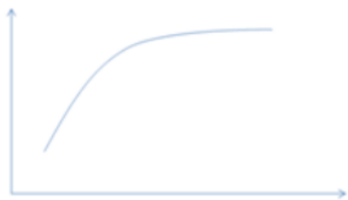
شکل‌های زیر مثال‌هایی در زمینه‌ی تعاریف فوق می‌باشند.



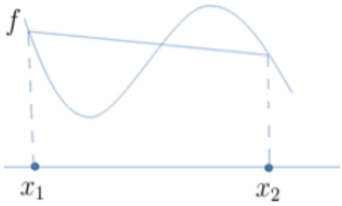
شکل ۲.۱: شبه مقعر، شبه مقعر اکید، شبه محدب، شبه محدب اکید، مقعرنما



شکل ۳.۱: شبه محدب اکید است ولی شبه محدب نمی‌باشد



شکل ۵.۱: مقعر، شبه مقعر، شبه مقعر اکید، مقعرنما، شبه محدب



شکل ۴.۱: هیچ‌یک از توابع تعریف ۳.۳.۱ نمی‌باشد

از تعریف ۳.۴.۱ نتیجه می‌شود که هر تابع محدب اکید، یک تابع محدب است. ولی هر تابع شبه محدب اکید، لزوماً شبه محدب نمی‌باشد. برای توضیح تابع شکل ۴.۱ را ملاحظه کنید، با توجه به تعریف این تابع شبه محدب اکید است. اما این تابع شبه محدب نمی‌باشد، زیرا به ازای $x_1 = 1$ و $x_2 = 3$، $f(x_1) = f(x_2) = 1$ و $f(1/2x_1 + 1/2x_2) = f(2) = 2$، بنابراین $f(1/2x_1 + 1/2x_2) > f(x_1)$.

قضیه ۴.۴.۱. [۳] *فرض کنید S یک مجموعه‌ی چندوجهی فشرده‌ی غیرتهی در $\mathbb{R}^n$ و f تابعی پیوسته و شبه محدب روی S باشد. مسأله‌ی ماکزیمم‌سازی f را روی S در نظر بگیرید. در این صورت جواب بهینه‌ای برای این مسأله وجود دارد که یک نقطه‌ی فرین S است.*

قضیه ۵.۴.۱. [۳] *فرض کنید S یک مجموعه‌ی محدب غیرتهی در $\mathbb{R}^n$ و f تابعی شبه مقعر اکید روی S باشد. مسأله‌ی ماکزیمم‌سازی f را روی S در نظر بگیرید. در این صورت اگر $\bar{x}$ یک جواب بهینه‌ی موضعی باشد، آن‌گاه $\bar{x}$ یک جواب بهینه‌ی سراسری است.*

قضیه ۶.۴.۱. [۳] *فرض کنید S یک مجموعه‌ی محدب باز غیرتهی در $\mathbb{R}^n$ و f تابعی مشتق‌پذیر روی S باشد. اگر f روی S محدب‌نما باشد، آن‌گاه f روی S شبه محدب و شبه محدب اکید است (به عبارت دیگر f روی S به‌طور صریح شبه محدب است).*

قضیه ۷.۴.۱. [۳] *فرض کنید S یک مجموعه‌ی محدب غیرتهی باشد و $f(x) = \dfrac{Cx + \alpha}{Dx + \beta}$ به‌طوری‌که روی S، $Dx + \beta \neq 0$. در این صورت f روی S محدب‌نما و مقعرنما می‌باشد.*