به نام خدا

دانشکده علوم پایه

گروه فیزیک

(گرایش نظری)

سیستمهای کوانتومی حل پذیر شبه کامل

از:

نارملا آقاجانی اولوئی

استاد راهنما:

دکتر حسین پناهی

شهریور

۱۳۸۸

فهرست مطالب:

عنوان | شماره صفحه

فهرست اشکال:

شماره صفحه

عنوان

چکیده

عنوان: سیستمهای کوانتومی حل پذیر شبه کامل
نگارنده: نارملا آقاجانی

در این پایان نامه مدلهای کوانتومی حل پذیر شبه کامل، با استفاده از روشهای جبری مطالعه می شود. برای این مدلها تنها می توان قسمتی از طیف سیستم را برای یک مقدار معین پارامتر j بدست آورد. در حقیقت، در این سیستمها پتانسیل به پارامتر j وابسته بوده و ماتریس هامیلتونین با درایه های غیر صفر به صورت ساختار بلوک قطری نوشته می شود. سپس بلوک متناهی را با استفاده از مولدهای گروه لی، مثل $SU(2)$ ، با ضرایب ثابت باز نویسی کرد. بنابراین با قطری کردن بلوک متناهی، از نظر تحلیلی قسمتی از طیف ویژه مقادیر و ویژه توابع متناظر را تعیین می کنیم. مدلهای حل پذیر شبه دقیق ابعاد بالاتر نیز با استفاده از مولدهای جبر لی $SU(3)$ ، $SO(3)$ و $SU(2)\times SU(2)$ مطالعه می شود و برخی از این پتانسیلها که روی فضای ریمان با تانسور متریک تعریف می شود، بدست آورده می شود .

در روش دیگری اشوردیز تمام مراحل را در یک مرحله جمع می کند. نقطه شروع این روش یک فرض است، مجموعه ای از توابع تحلیلی وابسته به تعدادی پارامتر عددی که با معادله مورد بررسی تطبیق داده می شود. بنابراین می توانیم مسئله را حل کنیم.

همچنین تناظر بین مدلهای حل پذیر شبه دقیق و مجموعه ای از چندجمله ایهای متعامد را مطالعه می کنیم. مشاهده می شود که معادله ویژه مقداری یک مجموعه از چندجمله ایها را ایجاد می کند که این چندجمله ایها در یک رابطه بازگشتی سه جمله ای صدق می کنند. همچنین تمام چندجمله ایهای بعد از چندجمله ای بحرانی، که از مرتبه j است، به حاصل ضرب دو چندجمله ای تبدیل می شود که یکی از آنها چندجمله ای بحرانی می باشد. صفرهای چندجمله ای بحرانی، ویژه مقادیر شبه کامل انرژی مدل کوانتوم مکانیکی حل پذیر شبه دقیق می باشد.

در نهایت، سیستم حل پذیر شبه دقیقی را با جزئیات بیشتر مورد مطالعه قرار داده ایم که ویژه توابع برای یک پتانسیل داده شده دارای گرههای زوج و فرد یکسانی است. مشاهده کرده ایم که در چنین حالتی می توان دو مجموعه مستقل از چندجمله ایهای متعامد را تعیین کرد.

واژه های کلیدی:
گروههای دینامیکی، چندجمله ایهای متعامد، پتانسیل حل پذیرشبه کامل.

Abstract

Title: Quasi-Exactly Solvable Quantum Systems

Author: Narmela Aghajani

In this thesis, by using algebraic methods, the quasi-exactly solvable (QES) quantum models are studied. For these models, one can find only a part of the spectrum of the system for a given value of the parameter j. In fact, in such system, the potential depends on parameter j and the Hamiltonian's matrix with non-vanishing elements can be written as a block structure. Then, we can rewrite the finite block by using the generators of a Lie group, as SU(2), with the constant coefficients. By diagonalaizing the finite block, we analytically determine part of the spectrum eigen values and the corresponding eigen functions. The QES quantum models, in higher dimension are also studied by using the generators of SU(3), SO(3) and $SU(2)\times SU(2)$ Lie algebra. A number of the potentials associated to these models are also obtained which are defined over a Riemannian space with a metric tensor.

In another method, the Ushveridze program fuses all steps into one. The starting point of the program is an ansatz, a set of analytic functions depending on a few numerical parameters, to be fitted with the equation under consideration. So, the problem is solvable.

Further, we study the correspondence between QES models and sets of orthogonal polynomials. It is shown that the eigen value-equation generates a set of polynomials, where these polynomials satisfy a three-term recursion relation. Moreover, all polynomials beyond a critical polynomial, which are in order of j, factor into a product of two polynomials, one of which is critical polynomial. The zeros of the critical polynomial are the quasi-exact energy eigenvalues of the quantum-mechanical QES model.

Finally, we study in some detail a QES system for which the energy eigenstates for levels with odd as well as even number of nodes are known for a given potential. We show that in this case one can obtains two independent sets of orthogonal polynomials.

Key words:

Dynamical groups, Orthogonal polynomials, Quasi-exactly solvable potential.

فصل اول

مقدمه

مقدمه

از دیر باز بدست آوردن پاسخهای دقیق در فیزیک بسیار مشکل بوده است، در حقیقت درمورد تمام علوم با چنین مشکلی مواجه هستیم. بسیاری از نمونه های حل شده ، که در کتب درسی فیزیک آورده شده اند حالتهای نادری هستند و فقط تعداد کمی از آنها قادر به توصیف اصول پایه ای میدانهای خاص خود می باشند، اما همین تعداد اندک برای روشهای تقریبی جهت توصیف مسائل واقعی بسیار کاربرد دارند.

اخیرا کشف شده است که حل تحلیلی مسائل اساسی مکانیک کوانتومی امکان پذیر است، اما فقط قادر به حل قسمتی از طیف انرژی هستیم و تنها برای مقادیر ویژه ای از پارامترهای اصلی مسئله می توانیم پاسخ را تعیین کنیم. در ابتدا مشخص شد که مسئله دو الکترون متحرک در پتانسیل نوسانگر خارجی از این نوعند [۱و۲]، بعدها کشف شد که معادله *شرودینگر* دو بعدی الکترون متحرک در میدان کولنی جاذب یا دافع و میدان مغناطیسی همگن نیز خصوصیات مشابهی از خود نشان می دهند [۳–۵] و به تازگی تعمیم این مسائل به حالت دو بعدی *کلین–گوردون* [۶] و *دیراک* [۷] نیز کشف شده است.

مراحل حل این نمونه ها بدین ترتیب است که معادله دیفرانسیل (شرودینگر ، کلین–گوردون و دیراک) بر طبق روش استانداردی حل می شود، سپس رفتار مجانبی سیستم مشخص شده و معادله ای برای این قسمت نوشته می شود که بتوان به سریهای توانی متغیر اصلی بسط داد. جالب اینجاست که ظاهرا از روش حل مسائل حل پذیر فاصله می گیریم، چرا که بجای *رابطه بازگشتی* دو جمله ای برای ضرایب سزیهای توانی که قبلا در مسائل حل پذیر با آنها مواجه بودیم، رابطه بازگشتی سه جمله ای داریم. پیچیدگی رابطه بازگشتی اجازه نمی دهد که بهنجارش ویژه توابع را تضمین کنیم. بنابراین می توان شرط

مناسبی را برای بهنجارش در نظر گرفت، این شرط با انتخاب یک چند جمله ای و در نتیجه قطع سریها در مرتبه معین متغیر برقرار می شود. بدین ترتیب می توان پاسخهای دقیقی را برای مسئله اصلی ، اما فقط برای انرژیهای معین و برای مقادیر خاص از پارامتر های مسئله تعیین کرد. برای نمونه هایی که در بالا ذکر شد، این پارامترها، فرکانس پتانسیل نوسانگر و میدانهای مغناطیسی خارجی می باشند.

پس از تحلیلهایی که انجام شد، سرانجام فیزیکدانان و ریاضیدانها دریافتند که مسائل کوانتوم مکانیکی یاد شده تنها نمونه هایی از مسائلی هستند که *حل پذیر شبه دقیق* نامیده می شوند [۸-۱۹]. اینها بخشی از مسائل کوانتوم مکانیکی اند که ویژه حالتهای متعدد دقیقی برای آنها پیدا شده است. دلیل حل پذیر شبه دقیق بودن معمولا وجود یک ترکیب نهفته جبر لی در مسئله می باشد [۱۰-۱۷]. تعداد هامیلتونینهای *حل پذیر* که ویژه توابع و طیف آنها را بتوان با هر روشی تعیین کرد، محدود می باشند و این تعداد کم قادر به پاسخ گویی نیازهای مختلف فیزیک کوانتومی مدرن نمی باشند. در عوض مدلهای حل پذیر شبه دقیق برد وسیعی از مسائل فیزیک نظری را در بر می گیرند که از آن جمله می توان به نظریه *میدانهای کوانتومی همدیس* [۲۰] و فیزیک حالت جامد اشاره کرد. بنابراین دور از انتظار نیست که روشهای مختلفی جهت ساخت این مدلها بوجود آید که یکی از این روشها، تقریب بر اساس تقارن دینامیکی نهفته در هامیلتونین می باشد. به عنوان نمونه برای حرکت یک بعدی، این تقارن از گروه SU(2) پیروی می کند و از گروههای SU(2)×SU(2) ، SO(3) و SU(3) می توان برای تعمیم به دو بعد بهره جست. استفاده از جبر SU(2) در سیستمهای حل پذیر شبه دقیق اولین بار در سال ۱۹۸٤ انجام گرفت[۲۱].

فصل بندی پایان نامه بدین ترتیب است: در فصل دوم سعی خواهیم کرد با در نظر گرفتن هامیلتونین بلوک قطری، شکل کلی آنرا بصورت ترکیبی از مولدهای گروه بیان کرده و راجع به تابع موج و فاز موهومی بحث خواهیم کرد. از ساده ترین شکل پتانسیل حل پذیر شبه دقیق آغاز می کنیم، تا به معرفی این پتانسیلها بپردازیم. بدین منظور از گروه SU(2) کمک خواهیم

گرفت. ترکیب پیچیده تری را نیز برای پتانسیل در نظر گرفته، حل خواهیم کرد. گذر کوتاهی بر پتانسیلهای حل پذیر خواهیم داشت و یک فهرست خلاصه ای از انواع پتانسیلهای حل پذیر شبه دقیق ارائه خواهد شد. فصل سوم تعمیم به فضای دو بعدی را شامل می شود، این تعمیم با استفاده از گروههای SU(2)×SU(2) ، SO(3) و SU(3) انجام می گیرد. اینجا با *معادله شرودینگر گونه* مواجه خواهیم شد و نقش متریک و *تانسور خمیدگی* ظاهر می شود. فصل چهارم مربوط به تقریب معرفی شده ازطرف *توربینر* و *اوشوردیز* می باشد، که با در نظر گرفتن شکل خاصی از تابع موج برای حالت یک بعدی و بدست آوردن نقاط صفر آن اقدام به حل پتانسیل حل پذیر شبه دقیق کرده اند. نقاط صفر را مشابه ذراتی در یک سیستم کلاسیکی در نظر گرفته اند و بدین ترتیب روش جالبی را برای حل پتانسیلهای حل پذیر شبه دقیق ارائه کرده اند. فصل پنجم از نقش *چند جمله ایهای متعامد* برای حل مدلهای حل پذیر شبه دقیق سخن می گوید. دو روش مشابه در این فصل گنجانده شده است. تابع موج بصورت مجموعه ای از چند جمله ایهای متعامد تعریف می شود، که با قرار گرفتن در معادله شرودینگر به یک رابطه بازگشتی سه جمله ای خواهیم رسید. با بدست آوردن چند جمله ایها، متوجه تکرار یکی از آنها خواهیم شد که بصورت ضریبی در چند جمله ایهای بعدی حضور دارد. این چند جمله ای را چند جمله ای بحرانی نامند. صفرهای چند جمله ای بحرانی، ویژه مقادیر انرژی را به ما خواهد داد، که به تبع آن ویژه توابع متناظر را نیز خواهیم داشت و در نهایت فصل ششم شامل نتیجه گیری و ارائه پیشنهادات می باشد.

فصل دوم

بررسی مدلهای حل پذیر شبه دقیق

یک بعدی

بررسی مدلهای حل پذیر شبه دقیق یک بعدی

(۲-۱) مفهوم حل پذیر شبه دقیق یا جبر پاره ای

می دانیم که هر مسئله کوانتوم مکانیکی، طی سه مرحله قابل حل می باشد، ابتـدا درجـات آزادی مناسـب را انتخـاب کـرده و شرایط مرزی را برقرار می کنیم، سپس هامیلتونین را نوشته و در نهایت ویژه مقادیر و ویژه توابع متناظر را بدست می آوریـم. معمولا هامیلتونین، عملگر دیفرانسیلی مرتبه دوم می باشد، در نتیجه مسئله ویژه مقداری به حل معادله دیفرانسیلی مرتبـه دوم، تحت شرایط مرزی معین تقلیل می یابد. کاملا مشخص است که این روش جبری نیست.

در حالت کلی اگر بتوانیم از نظر تحلیلی طیفی را بیابیم که به شکل یک تابع صـریح از پارامترهـای وارد شـده در هـامیلتونین باشد، مسئله حل پذیر و در غیر این صورت حل ناپذیر خواهد بود.

هامیلتونین H را به صورت یک ماتریس با ابعاد نامتناهی در نظر می گیریم:

$$H=\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} & \dots \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \qquad (۲-۱)$$

بدین منظور یک مجموعه دلخواه از توابع متعامد ψ_i را انتخاب می کنیم، بطوری که در شـرایط مـرزی صـدق کنـد، در ایـن صورت می توانیم عناصر ماتریس هامیلتونین را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$h_{ij}=\langle\psi_i|H|\psi_j\rangle. \qquad (۲-۲)$$

درحالت کلی همه عناصر ماتریس غیر صفرند.

بدین ترتیب حل مسئله طیفی، به قطری سازی ماتریس $\{h_{ij}\}$ با ابعاد نامتناهی تقلیل می یابد. ویـژه توابـع هـامیلتونین، ویـژه بردارهای ماتریس $\{h_{ij}\}$ هستند. متأسفانه بر خلاف ماتریسهای متناهی، قوانین جبری متداولی برای قطری کـردن ماتریـسهای $\{h_{ij}\}$ با ابعاد نامتناهی وجود ندارد. مسائل حل پذیر شناخته شده، بدین ترتیب قابل تـشخیص انـد کـه مـاتریس $\{h_{ij}\}$ آنهـا شکل خاصی دارد و می توان آنرا به روش جبری قطری کرد. معروفترین مثال از این نوع، *نوسانگر هارمونیک* مـی باشـد، کـه هامیلتونین آنرا می توان بدین صورت نوشت:

$$H = \frac{1}{2}\left(a^{+}a + \omega\right). \tag{۲-۳}$$

a و a^{+} عملگرهای *دیفرانسیلی خطی* هستند، که به ترتیب زیر آنها را معرفی می کنیم:

$$\begin{aligned} a &= \omega x + \frac{d}{dx}, \\ a^{+} &= \omega x - \frac{d}{dx}. \end{aligned} \tag{۲-۴}$$

این دو عملگر در جبر *هایزنبرگ* صدق می کنند:

$$\left[a, a^{+}\right] = 2\omega. \tag{۲-۵}$$

اگر *عملگر کاهنده* a روی تابع موج اولیه ψ_0 اثر کند، مقدار صفر را به ما خواهد داد، که با حل معادله دیفرانسیلی مرتبه اول ψ_0 بدست می آید، یعنی:

$$\begin{aligned} a\,\psi_0 &= 0, \\ \psi_0 &= \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\omega x^2}{2}\right). \end{aligned} \tag{۲-۶}$$

می توانیم ψ_n را بر حسب *عملگر افزاینده* a^{+} و تابع موج اولیه به صورت زیر بدست آوریم:

$$\psi_n = \left(n!(2\omega)^n\right)^{-1/2}\left(a^+\right)^n \psi_0. \tag{۲-۷}$$

بنابراین در این پایه، برای هامیلتونین نوسانگر هماهنگ، ماتریس قطری زیر بدست می آید:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\omega & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{3}{2}\omega & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{5}{2}\omega & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \tag{۲-۸}$$

که ψ_n ویژه توابع هامیلتونین خواهد بود.

پتانسیل مورس، پتانسیل پاشل-تلر و پتانسیل کولن با سد گریز از مرکز نمونه های دیگری از مسائل حل پذیر می باشند [۱٤] که هامیلتونین آنها ترکیبی از مولدهای گروه SU(2) می باشد و به طریق مشابه قابل حل هستند.

بطور خلاصه می توان گفت که نظریه کلاسیکی معادله شرودینگر شامل دو حالت متفاوت است، یکی قطری سازی کامل هامیلتونین به روش جبری، مشابه معادله (۲-۸) که این حالات بسیار نادرند و حالت دیگری که در معادله (۲-۱) با h_{ij} های غیر قطری غیرصفر بیان شده است. دوباره متذکر می شویم که در حالت کلی قطری سازی ماتریس $\{h_{ij}\}$ بصورت جبری انجام نمی گیرد، بنابراین روش جدیدی در ارتباط با (۲-۸) و (۲-۱) را که در دو دهه اخیر شناخته شده، به صورت زیر مورد بررسی قرار می دهیم.

فرض کنید که ماتریس $\{h_{ij}\}$ ساختار بلوکی به شکل زیر داشته باشد:

$$H \to \{h_{ij}\} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1N} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2N} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{N1} & h_{N2} & \dots & h_{NN} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & & h_{ij} \neq 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & & & \end{bmatrix}. \tag{۲-۹}$$

که N عدد صحیح ثابتی است و بلوک گوشه چپ بالا ماتریس N×N می باشد، در صورتیکه بلوک غیر صفر گوشه سمت راست پائین، ماتریسی با ابعاد نامتناهی است. با انجام دستورالعمل ارائه شده در این روش، می توان بلوک متناهی را قطری کرد [۱٤]. عملیات انجام شده در این روش کاملا جبری بوده و فقط برای ماتریسهای متناهی برقرار است، به عبارت دیگر، برای ماتریس (۲-۹) از نظر تحلیلی یک قسمت از ویژه مقادیر طیف و ویژه توابع متناظر را به روش جبری تعیین می کنیم. در این فرمالیسم برای هر هامیلتونین مورد نظر، از *تقارن دینامیکی* نهفته شده در هر مسئله کمک گرفته می شود و یک روش منظم، مطمئن و عملی برای ایجاد ساختار بلوکی (۲-۹) مدل حل پذیر شبه دقیق ارائه می شود. به بیان دقیقتر، جبری سازی مربوط به قسمتی از طیف هامیلتونین است و می توان آنرا به ترکیب درجه دوم از مولدهای یک گروه با ابعاد متناهی کاهش داد.

گروهی مثل G با تعداد متناهی از مولد T^a که $a = 1,2,\dots,\nu$ را در نظر بگیرید، بطوریکه $\nu = \dim G$. حال فرض کنید که گروه G دارای نمایش با ابعاد متناهی $\{R_j\}$ باشد. اگر بتوانیم هامیلتونین H را به ترکیبی از مولدهای T^a با ضرایب ثابت کاهش دهیم، داریم:

$$H = \sum_{a,b} C_{ab} T^a T^b + \sum_a C_a T^a. \tag{۲-۱۰}$$

این هامیلتونین، ترکیب مورد نظر (۲-۹) را خواهد داشت، که اساس محاسبه $\{h_{ij}\}$ را فراهم می کند. بدین منظور اگر

تابع حالت سیستم را به صورت زیر در نظر بگیریم و (۲-۱۰) را روی آن اعمال کنیم،

$$\{|\psi_i\rangle\} = \{R_j \text{ عناصر } + \text{مجموعه دلخواهی از فضای متعامد}\},$$

آنگاه عمل مولـدهای T^a روی عناصـر $\{R_j\}$، بلـوک متنـاهی N×N معادلـه (۲-۹) را خواهـد داد و از اثـر (۲-۱۰) روی مجموعه فضای متعامد، عناصر غیر قطری صفر را خواهیم داشت. بدین ترتیب با انتخاب درسـت تـابع حالـت و اثـر (۲-۱۰) روی آن می توان ماتریس (۲-۹) را ایجاد کرده و اقدام به حل مسئله نمود.

(۲-۲) انتقال فاز موهومی

در این مرحله پیش از پرداختن به فرمالیسم اشاره شده در بخش قبل، مطلب دیگری را مورد بحـث قـرار مـی دهـیم. قابلیـت سیستم در برابر تبدیلات پیمانه ای مکرر مد نظر ماست. می دانیم که از نظر مکانیک کوانتومی سیستمی با ارزشتر است که در برابر تبدیلات پیمانه ای، انعطاف بیشتری از خود نشان دهد و این بدین معنی است کـه امکـان انـدازه گیریهـای متعـدد روی سیستم وجود داشته و بنابراین می توان پاسخ دقیقتری بدست آورد.

بدین منظور فرض کنید، معادله شرودینگر را برای تعیین حالات پایای سیستم بصورت زیر داشته باشیم:

$$H\psi(x_i) = E\psi(x_i), \qquad (۱۱-۲)$$

که:

$$H = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 + V(x_i), \qquad (۱۲-۲)$$

و x_i نشان دهنده مختصات دکارتی است. $V(x_i)$ انرژی پتانسیل و $\psi(x_i)$ تابع موج می باشد.

شرط نرمالیزاسیون تابع موج به ترتیب زیر بیان می شود، که در آن π_i تابع وزن معادله دیفرانسیل است:

$$\int |\psi(x_i)|^2 \pi_i dx_i = 1. \qquad (۱۳-۲)$$

اگر x_i ها نامتناهی باشند، (۲-۱۳) بصورت نمایی در فواصل دور نزول خواهد کرد.

روشن است که معادله (۲-۱۱) تحت تبدیل $\psi(x_i) \to \psi(x_i)\exp(i\alpha)$ که α یک فاز ثابت است، ناوردا باقی مـی مانـد.

ولی اگر یک تبدیل با فاز وابسته به مکان، به صورت زیر اعمال شود:

$$\psi(x_i) = \tilde{\psi}(x_i) e^{i\alpha(x_i)}, \qquad (۱٤-۲)$$

آنگاه رابطه (۲-۱۱) به صورت زیر خواهد شد:

$$\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + iA_i(x)\right)^2 + V(x)\right]\tilde{\psi} = E\tilde{\psi},$$
$$A_i = \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}. \qquad (۱٥-۲)$$

ملاحظه می شود که با تعریف تابع موج جدید $\tilde{\psi}$، مشتق ∂_i با مـشتق همـوردای $\partial_i + iA_i$ جـایگزین مـی شـود، کـه A_i پتانسیل برداری است. همچنین می توان براحتی دید که معادله (۲-۱۵) تحت تبدیلات پیمانه ای مجدد ناورداست، یعنی اگر:

$$\tilde{\psi}(x_i) \to \tilde{\psi}(x_i) e^{i\beta(x_i)}, \qquad (۱٦-۲)$$

آنگاه تنها پتانسیل برداری به شکل زیر تغییر می کند و در شکل کلی معادله تغییری حاصل نمی شود:

$$A_i \to A_i + \frac{\partial \beta}{\partial x_i}. \qquad (۱۷-۲)$$

بنابراین پیمانه ای مناسب است که با داشتن حل معادله (۲-۱۵) برای پیمانه دلخواه، بتوان همواره به معادله شرودینگر مربـوط به پیمانه $A_i = 0$ بازگشت.

تبدیل پیمانه ای (۲-۱٤) یکانی است، این باعث می شود که چگالی احتمال تغییر نکند. این مسئله چندان مورد پسند

نیست، چرا که قصد داریم تحلیل بیشتری روی سیستم انجام دهیم و احتمالات مختلف را بررسی کنیم. بدین منظور فاز را موهومی فرض می کنیم، در این صورت تبدیل، یکانی نخواهد شد. البته این فرض تا زمانی برقرار است که به هم ارزی معادلات (۲-۱۱) و (۲-۱۵) به ازاء هر α خدشه ای وارد نشود.

فرض کنید که تابع α، موهومی محض است یعنی $\alpha = ia$ (a حقیقی)، در این صورت رابطه (۲-۱٤) به رابطه زیر تبدیل خواهد شد:

$$\psi(x) = \tilde{\psi}(x)e^{-a(x)}. \tag{۱۸-۲}$$

با استفاده از این تبدیل، معادله (۲-۱۵) به شکل زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} &H_G\tilde{\psi} = E\tilde{\psi}, \\ &H_G = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} - A_i(x)\right)^2 + V(x), \\ &A_i = \frac{\partial a}{\partial x_i}. \end{aligned} \tag{۱۹-۲}$$

همچنین امکان ایجاد تبدیلات پیمانه ای مجدد روی سیستم، همواره وجود دارد. به فرض اگر تبدیل زیر را روی سیستم اعمال کنیم:

$$\tilde{\psi}(x_i) \to \tilde{\psi}(x_i)e^{-b(x)}, \tag{۲۰-۲}$$

تنها پتانسیل برداری تغییر کرده و باز هم مثل حالت قبل شکل کلی معادله تغییری نخواهد کرد:

$$A_i \to A_i + \frac{\partial b}{\partial x_i}. \tag{۲۱-۲}$$

همانطوری که مشاهده می کنید، هر گاه $A_i = 0$ شود، به تابع موج و معادله شرودینگر اصلی خواهیم رسید. پس موهومی فرض کردن α نه تنها به ناوردایی معادله شرودینگر تحت تبدیلات پیمانه ای صدمه ای وارد نمی کند، بلکه با یکانی

نشدن این تبدیل و به دنبال آن تغییر کردن چگالی احتمال، امکان اندازه گیریهای بیشتری را به ما خواهـد داد. در بخـش بعـد این تبدیل برای پتانسیل (۲-۳٦) بکار برده می شود.

(۲-۳) ساده ترین مسئله حل پذیر شبه دقیق

نوسانگر ناهماهنگ یک بعدی با پتانسیل x^6، ساده ترین مسئله حل پذیر شبه دقیق می باشد. ساده ترین *گروه غیرآبلی* گـروه SU(2) است و سه مولد SU(2) را می توان به شکل توابع خطی عملگر دیفرانسیلی $\frac{d}{d\xi}$ به صورت زیر بیان کرد:[۱٤]

$$
\begin{aligned}
T^{+} &= 2j\xi-\xi^{2}\left(\frac{d}{d\xi}\right),\\
T^{0} &= -j+\xi\left(\frac{d}{d\xi}\right),\\
T^{-} &= \frac{d}{d\xi},
\end{aligned}
\qquad (۲۲-۲)
$$

که ξ بیانگر مختصات فضای خمیده بوده و مولدها روی چند جمله ایهای ξ اثر می کنند. j نیزیک عـدد صـحیح یـا نیمـه صحیح است. براحتی می توان دید که نسبتهای جا بجایی زیر برای گروه SU(2) برقرارند:

$$
\begin{aligned}
\left[T^{+},T^{-}\right] &= 2T^{0},\\
\left[T^{+},T^{0}\right] &= -T^{+},\\
\left[T^{-},T^{0}\right] &= T^{-}.
\end{aligned}
\qquad (۲۳-۲)
$$

از طرفی می دانیم همه نمایشهای متناهی SU(2) را می توان به کمک یک عدد صحیح یا نیمه صحیح که همان اسپین اسـت، رده بندی کرد. بعد نمایش اسپین j ، 2j+1 می باشد، پس اگر مولدهای SU(2) را در نظر بگیریم، رابطه نمـایش ابعـاد آن بصورت زیر خواهد بود،

$$
R_{j}=\left\{\xi^{0},\xi^{1},\dots,\xi^{2j}\right\}, \qquad (۲٤-۲)
$$