بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

عنوان:
جبرهای گورنشتین و کوهمولوژی هاچیلد

استاد راهنما:

دکتر رضا سزیده

دانشجو:

سولماز شیرازی زوارق

آذر ۱۳۹۰

با سپاس و احترام تقدیم به:

پدر فداکارم

مادر دلسوزم

داداش وحید عزیزم و خواهر مهربانم

تقدیر و تشکر

سپاس و ستایش معبود یگانه را که پرتو الطاف بی‌شمارش بر لحظه لحظه‌ی زندگی‌ام ساطع و آشکار است. حمد و ثنا می‌گزارم او را که فکرت و اندیشه را در بستر روحم روان ساخت و بهره‌گیری از خوان گسترده‌ی دانش اساتیدم بویژه استاد راهنمای گرامیم جناب آقای دکتر رضا سزیده را نصیب و روزی‌ام گردانید. در نهایت از پدر و مادر عزیزم سپاس‌گزاری می‌کنم که با به وجود آوردن شرایط مناسب مرا یاری نمودند.

سولماز شیرازی زوارق

فهرست مندرجات

چکیده

به دنبال یافتن شرایطی برای پیدا کردن G- بعد متناهی همبافت‌ها هستیم که این مطلب در آخر بخش ثابت می‌شود. با استفاده از مطالب قبل، G- بعد را برای همریختی‌ها تعریف و با استفاده از این تعریف، همریختی‌های گورنشتین و شبه— گورنشتین را تعریف می‌کنیم سپس مدولهای وارون‌پذیر را تعریف و ویژگی‌های آنها را بررسی می‌کنیم و در ادامه به پیدا کردن رابطه بین مدولهای وارون‌پذیر و همریختی‌های گورنشتین و شبه— گورنشتین می‌پردازیم. از طریق کوهمولوژی هاچیلد، درجه دو، درجه تعالی و درجه نسبی یک همریختی را تعریف و رابطه بین آنها را بررسی می‌کنیم. در ادامه نیز هم— بعد یک حلقه را تعریف و رابطه بین درجه دو، عمق و بعد را پیدا می‌کنیم. همریختی‌های کوهن— ماکولی را تعریف و رابطه بین مدولهای وارون‌پذیر، همریختی‌های گورنشتین و کوهن— ماکولی را بررسی می‌کنیم و در آخر «قضیه ساختار» برای جبرهای گورنشتین را بررسی می‌کنیم.

مقدمه

هر یک از خانواده‌های اصلی حلقه‌های جابه‌جایی نوتری منظم، اشتراک کامل، گورنشتین و کوهن– ماکولی– به وسیله بعضی از ویژگی‌های موضعی که در هر ایده‌آل ماکسیمال نیاز به بررسی دارند، تعریف می‌شوند. از این رو ضروری است، برای این ویژگیهای مدولهای متناهی و جبرهای متناهی روی میدان‌ها یک سری ویژگیهای عمومی و مشترک تعریف کنیم، به طوریکه تنها آن دسته از ویژگیهای مورد نظر لحاظ شود. هدف این است که یک سری از آزمونهای کلی و عمومی ارائه دهیم که در وضعیتها و موقعیتهای کلی‌تر و نسبی‌تر نیز قابل اجرا باشند.
نمادهای مورد استفاده به صورت زیر خواهد بود:

K یک حلقه نوتری جابه‌جایی است و $\sigma : K \to S$ یک همریختی یکدست از حلقه‌هاست، یعنی به طور اساسی از نوع متناهی است.

به σ کوهن– ماکولی یا گورنشتین گوئیم، هرگاه فیبر حلقه‌ها ویژگی‌های متناظر را داشته باشد (برای جزئیات بخش ۲ را نگاه کنید). از قضیه ۳.۱.۵ می‌توان به نتیجه زیر دست یافت که:
$\mathrm{garde}_P S$ کوچکترین عدد طبیعی n است که $\mathrm{Ext}^n_P(S,P) \neq ۰$.

قضیه ۱.۰.۰ فرض می‌کنیم SpecS همبند و $K \to P \to S$ یک تجزیه از σ باشد به طوری که در آن P حلقه چندجمله‌ای موضعی $K[x_۱, ..., x_d]$ و P- مدول S، مدول متناهی باشد.

نگاشت σ کوهن– ماکولی است هرگاه به ازای $g = \ \mathrm{grade}_P S$ داشته باشیم:

$$\mathrm{Ext}^n_P(S,P) = 0 \qquad , \qquad g < n \leq g+d \ \text{به ازای}$$

برعکس، اگر σ کوهن– ماکولی باشد آنگاه به ازای $n \geq g$، $\mathrm{Ext}^n_P(S,P) = 0$. همریختی σ گورنشتین است اگر و تنها اگر همریختی σ کوهن– ماکولی و S- مدول $\mathrm{Ext}^g_P(S,P)$ وارون‌پذیر باشد.

بنابراین تشخیص نگاشتهای کوهن– ماکولی آسان بوده و ویژگیهای مشخصه‌ی آنها این است که با درجه‌بندی تعیین شده کوهمولوژی که به صفر میل می‌کند، مشخص می‌شوند. این ویژگی به خاطر ساختار متناهی نتیجه می‌شود. از طرف دیگر، شرط لازم این شناسایی، وجود ویژگی‌های گورنشتین در ساختار $\mathrm{Ext}^g_P(S,P)$ به عنوان یک مدول روی S است، که از طریق داده‌های متناهی معین نمی‌شود. (قضیه ۱۰.۱.۵ را ببینید) رویکردی که برای حل این مسأله در پیش گرفته‌ایم تا حدودی به خاطر برخورداری آنها از ویژگی‌های همولوژیکی منظم کنونی می‌باشد. بدین ترتیب که ویژگیهای همولوژیکی S را به صورت مدول روی پوشش جبری $S^e = S \otimes_K S$ مورد مطالعه قرار می‌دهیم که روی S از طریق همریختی ضربی $\mu = S \otimes_K S \to S$ اثر می‌کند. معمولاً $\dim S$ نمایانگر بعد کرول S است. برای ایده‌آل اول q از S ما فرض می‌کنیم $tr\deg_k(S/q)$ نمایانگر درجه تعالی میدان خارج قسمتی S/q روی تصویر K است.

قضیه بعدی، همریختی‌های گورنشتین را برحسب ویژگی‌های مدولهای Ext روی $S \otimes_k S$ مشخص می‌کند حتی بدون اینکه σ کوهن– ماکولی باشد.

قضیه **۲.۰.۰** همریختی $\sigma : K \to S$ گورنشتین است اگر و تنها اگر S- مدول $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{Ext}^n_{S^e}(S,S^e)$ وارون‌پذیر باشد.

این نتیجه در قضیه ۲۷.۱.۳ وجود دارد که اثباتش به ویژگی‌های همریختی‌های شبه گورنشتین بستگی دارد و در [۸] تعریف شده و مورد مطالعه قرار گرفته است و با معیار فاکسبی در

مورد G- بعد متناهی که از قضیه ۱۷.۱.۲ به دست می‌آید، تقویت می‌شود. یکی از ویژگی‌های مطرح شده در قضیه ۲.۰.۰ این است که همه مدولهای $\mathrm{Ext}^n_{S^e}(S,S^e)$ باید وارون‌پذیر باشند که این فرض، بکارگیری قضیه را مشکل کرده است.

قضیه **۳.۰.۰** به ازای هر ایده‌آل ماکسیمال q از S و به ازای $t = tr\deg_k(S\mathfrak{q}/\mathfrak{q}S\mathfrak{q})$،

$$\mathrm{Ext}^t_{S^e}(S,S^e)_\mathfrak{q} \neq 0$$

اگر SpecS همبند و σ کوهن‌ـ ماکولی باشد، آنگاه به ازای $n \neq t$، $\mathrm{Ext}^n_{S^e}(S,S^e) = 0$.

قضیه ۳.۰.۰، از قضیه‌های ۸.۱.۴، ۹.۱.۵ و ۱.۱.٦ به دست می‌آید که اثبات آنها به ویژگی‌های مدول‌های $\mathrm{Ext}^n_{S^e}(S,S^e)$ بستگی دارد. فرمول‌های ارائه شده، مکمل فنون کلاسیکی ساده‌سازی یا کاهش قطری است که این مطلب در [۱۲] ثابت شده و بخش ۳.۴ نیز مجدداً مورد استفاده قرار می‌گیرد. انتظار می‌رود که آخرین مطلب قضیه ۳.۰.۰ یک وارون قوی را به عنوان نتیجه، موجب شود.

نتیجه **۴.۰.۰** هرگاه SpecS همبند و همریختی σ کوهن‌ـ ماکولی باشد و به ازای $tr\deg_k(S/\mathfrak{q}) \leq n \leq tr\deg_k(S/\mathfrak{q}) + \max\{\dim S, 1\}$ داشته باشیم $\mathrm{Ext}^n_{S^e}(S,S^e) = 0$. آنگاه همریختی σ گورنشتین است.

هرگاه k یک میدان و $\mathrm{rank}_S K$ متناهی باشد، داریم:

$$\dim S = tr\deg_k(S/q) = 0.$$

بنابراین گزاره قبلی مختص احتمال آساشیبا می‌باشد [۳] و در حالتی که حلقه‌ها جابجایی و باز باشند، حدس تاچیکاوا را تقویت می‌کند. اگر به ازای $n \geq 1$، $Ext^n_{S^e}(S,S^e) = 0$، آنگاه S خود‌ـ انژکتیو است. (به [٦، P ۱۱۵] مراجعه کنید.) در حالتی که k یک میدان باشد و S را تقلیل دهیم، نتیجه بعدی به عنوان قضیه ۵.۱.٦ ثابت می‌شود.

قضیه ۵.۰.۰ هرگاه حلقه K گورنشتین و به ازای $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} S$ حلقه $S_{\mathfrak{q}}$ گورنشتین باشد، حدس قبلی برقرار می‌شود.

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

در این فصل مباحث مقدّماتی از جبر جابجایی و جبر همولوژی را که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، را بیان می‌کنیم. تا حد امکان سعی می‌کنیم که مطالب مختصر بیان شوند. بنابراین از ارائه‌ی بیشتر اثبات‌ها خودداری نموده‌ایم.

۱.۱ تعاریف مقدّماتی از جبر همولوژی و جابجایی

تعریف ۱.۱.۱ رسته‌ی[۱] $\mathcal{C}$ خانواده‌ای است متشکل از شئ‌هایی که به طور معمول آن‌ها را با A، B، C، $\cdots$ نمایش می‌دهیم و در شرایط زیر صدق می‌کنند:

۱) به ازای هر دو شئ مثل A و B مجموعه‌ای متناظر می‌شود که با $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ نشان می‌دهیم و دارای این خاصیت است که به ازای هر چهار شئ مثل A، B، C و D که در آن $A \neq C$ و $B \neq D$، داشته باشیم:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \cap \ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D) = \phi,$$

۲) به ازای هر سه شئ مثل A، B و C تابع

$$\begin{aligned} . : \ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C) \times \ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) &\to \ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C) \\ (g,f) &\mapsto gf \end{aligned}$$

---

[۱] Category

وجود دارد که در سه شرط زیر صدق می‌کند:

الف) به ازای هر چهار شئ مثل A، B، C و D، اگر $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$، $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C)$ و $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D)$ آن‌گاه $h(gf)=(hg)f$؛

ب) به ازای هر شئ مثل A ریخت همانی 1_A موجود باشد.

پ) برای هر دو شئ A و B و هر $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ داریم $1_B f = f$ و $f1_A = f$.

تعریف ۲.۱.۱ فرض می‌کنیم R یک حلقه باشد. دنباله‌ی

$$\cdots \longrightarrow X_{i+1} \xrightarrow{\partial^X_{i+1}} X_i \xrightarrow{\partial^X_i} X_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

را یک همبافت[۲] از R- مدول‌ها می‌نامیم هرگاه به ازای هر $i \in \mathbb{Z}$، X_i یک R- مدول باشد و ∂^X_i نگاشت R- خطی از X_i به X_{i+1} باشد که $\partial^X_i \partial^X_{i+1} = 0$.

X_l را مدول درجه l و ∂^X_l را l- اُمین مشتق می‌نامیم.

قرارداد. برای هر R- همبافت X و $l \in \mathbb{Z}$ قرار می‌دهیم:

$$Z^X_l = \mathrm{Ker}\partial^X_l, \quad B^X_l = \mathrm{Im}\partial^X_{l+1}, \quad C^X_l = \mathrm{Coker}\partial^X_{i+1}.$$

تعریف ۳.۱.۱ فرض می‌کنیم X یک همبافت باشد. مدول همولوژی[۳] X از درجه l را با نماد $H_l(X)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H_l(X) = \frac{Z^X_l}{B^X_l}.$$

تعریف ۴.۱.۱ فرض می‌کنیم X یک همبافت باشد. $H(X)$ را همبافت همولوژی[۴] X می‌نامیم هرگاه به ازای هر $l \in \mathbb{Z}$ مدول از درجه l آن به صورت $H(X)_l = H_l(X)$ و $\partial^{H(X)}_l = 0$.

---

[۲] Complex

[۳] Homology Module

[۴] Homology Complex

تعریف ۵.۱.۱ فرض می‌کنیم X یک همبافت و m یک عدد صحیح باشد. در این صورت $\sum^m X$ را همبافت منتقل شده‌ی[۵] m می‌نامیم هرگاه مدول از درجه l آن به صورت $(\sum^m X)_l = X_{l-m}$ و l-امین مشتق آن به صورت $\partial_l^{\sum^m X} = (-1)^m \partial_{l-m}^X$ باشد.

تعریف ۶.۱.۱ فرض می‌کنیم X و Y دو همبافت باشند. $\alpha : X \to Y$ را یک ریخت[۶] می‌نامیم، هرگاه α دنباله‌ای از نگاشت‌های R- خطی $\alpha_i : X_i \to Y_i$ باشد به طوری که برای هر $i \in \mathbb{Z}$ تساوی زیر برقرار باشد:

$$\partial_i^Y \alpha_i = \alpha_{i-1} \partial_i^X.$$

تعریف ۷.۱.۱ فرض می‌کنیم X و Y دو همبافت باشد. ریخت $\alpha : X \to Y$ را شبه− یکریختی[۷] گوئیم هرگاه به ازای هر $n \in \mathbb{Z}$، نگاشت القایی $H_n(\alpha) : H_n(X) \to H_n(Y)$ یکریختی باشد و با نماد $X \xrightarrow{\simeq} Y$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۸.۱.۱ سوپریمم[۸] و اینفیموم[۹] همبافت X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sup X &= \sup\{l \in \mathbb{Z} | H_l(X) \neq 0\}, \\ \inf X &= \inf\{l \in \mathbb{Z} | H_l(X) \neq 0\}. \end{aligned}$$

تعریف ۹.۱.۱ فرض می‌کنیم X یک همبافت باشد.
(۱) همبافت X از بالا کران‌دار[۱۰] است هرگاه $\sup X$ متناهی باشد.
(۲) همبافت X از پایین کران‌دار[۱۱] است هرگاه $\inf X$ متناهی باشد.

[۵] Shifted complexe
[۶] Morphism
[۷] Quasi-isomorphism
[۸] Supremum
[۹] Infimum
[۱۰] Bounded above
[۱۱] Bounded below

(۳) همبافت X کران‌دار[۱۲] است هرگاه $\sup X$ و $\inf X$ متناهی باشند.
(۴) همبافت X همولوژیک کران‌دار[۱۳] است هرگاه $H(X)$ همبافت کران‌دار باشد.

قرار داد. نمادهای زیر را برای زیررسته‌های $\mathcal{C}(R)$ به کار می‌بریم:

- $\mathcal{C}^I(R)$: زیررسته همبافت‌هایی از مدول‌های انژکتیو.
- $\mathcal{C}^F(R)$: زیررسته همبافت‌هایی از مدول‌های یکدست.
- $\mathcal{C}^P(R)$: زیررسته همبافت‌هایی از مدول‌های پروژکتیو.
- $\mathcal{C}_{\sqsupset}(R)$: زیررسته شامل همبافت‌هایی از پائین کراندار.
- $\mathcal{C}_{(\sqsubset)}(R)$: زیررسته پر شامل همبافت‌هایی همولوژیک از بالا کراندار.
- $\mathcal{C}_{(\sqsupset)}(R)$: زیررسته پر شامل همبافت‌هایی همولوژیک از پائین کراندار.

قرار داد. می‌توان از ترکیب اندیس‌های بالا (I, F, P) و اندیس‌های پایین $(\sqsupset, (\sqsubset), (\sqsupset))$ استفاده کرد؛ یعنی، برای $\spadesuit \in \{\sqsupset, (\sqsubset), (\sqsupset)\}$ و $\clubsuit \in \{I, F, P\}$ داریم: $\mathcal{C}^{\clubsuit}_{\spadesuit}(R) = \mathcal{C}^{\clubsuit}(R) \cap \mathcal{C}_{\spadesuit}(R)$.

نمادگذاری. فرض می‌کنیم R یک حلقه جابجایی باشد. منظور از $D(R)$ رسته مشتق شده R-مدولهاست.
حال در این مرحله رسته مشتق شده $D(R)$ را توضیح می‌دهیم:
اشیاء آن همانند اشیاء $C(R)$ است که R- همبافت هستند. ما نیازی نداریم که ریخت جدید برای $C(R)$ تعریف کنیم، کافیست قواعد زیر را قبول کنیم:
۱) اشیاء در $C(R)$ دقیقاً R- همبافتها هستند. خانواده‌ای از اشیاء در رسته $C(R)$ و $D(R)$ یکسانند.
۲) هر ریخت α در $C(R)$ یک ریخت در $D(R)$ است. α یک یکریختی در $D(R)$ است اگر و تنها اگر α یک شبه یکریختی در $C(R)$ باشد.
۳) نماد $\simeq$ در $D(R)$ نشانگر یکریختی است در حالی که در $C(R)$ نشانگر شبه یکریختی است.

[۱۲] Bounded
[۱۳] Homologically bounded

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض می‌کنیم X و Y همبافت‌هایی از R- مدول‌ها باشند به طوری که ∂^X و ∂^Y به ترتیب نمایانگر مشتق همبافت‌های X و Y باشند. در این صورت $W = \operatorname{Hom}_R(X,Y)$ همبافتی است که مدول W از درجه l آن به صورت

$$W_l = \operatorname{Hom}_R(X,Y)_l = \prod_{j-i=l} \operatorname{Hom}_R(X_i, Y_j),$$

و l- امین مشتق آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\partial^W(\beta) = \partial^Y \, o \, \beta - (-1)^{|\beta|} \beta \, o \, \partial^X.$$

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض می‌کنیم $X \in \mathcal{C}_{(\sqsubset)}(R)$. برای همبافت I، شبه یکریختی $\alpha : X \to I$ را تحلیل انژکتیو[۱۴] از X می‌نامیم هرگاه $I \in \mathcal{C}^I_{\sqsubset}(R)$.

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض می‌کنیم $Y \in \mathcal{C}_{(\sqsupset)}(R)$. برای همبافت P، شبه یکریختی $\pi : P \to Y$ را تحلیل پروژکتیو[۱۵] از Y می‌نامیم هرگاه $P \in \mathcal{C}^I_{\sqsupset}(R)$.

تعریف ۱۳.۱.۱ فرض می‌کنیم $Y \in \mathcal{C}_{(\sqsupset)}(R)$. برای همبافت F، شبه یکریختی $\phi : F \to Y$ را تحلیل یکدست[۱۶] از Y می‌نامیم هرگاه $F \in \mathcal{C}^F_{\sqsupset}(R)$.

تعریف ۱۴.۱.۱ فرض می‌کنیم $Y \in \mathcal{C}(R)$ و $X \in \mathcal{C}_{(\sqsupset)}(R)$ باشد. کلاس هم‌ارزی تحت $\simeq$ از X و Y را با نماد $\mathrm{R}\operatorname{Hom}_R(X,Y)$ نمایش می‌دهیم و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{R}\operatorname{Hom}_R(X,Y) = \{ \operatorname{Hom}_R(P,Y) | P \simeq X \}$$

که در آن، P یک تحلیل پروژکتیو برای X است.

[۱۴] Injective resolution

[۱۵] Projective resolution

[۱۶] Flat resolution

تعریف ۱۵.۱.۱ فرض کنید K و M دو R- مدول باشند. در این صورت:

$$\mathrm{Ext}^i_R(K,M)=H_{-i}(\mathrm{R\ Hom}_R(K,M)),$$
$$H_\circ(\mathrm{R\ Hom}_R(K,M))=\ \mathrm{Ext}^\circ_R(K,M)=\ \mathrm{Hom}_R(K,M).$$

تعریف ۱۶.۱.۱ فرض کنید $\mathfrak{p}\in\ \mathrm{Spec}R$، در این صورت تعریف می‌کنیم:

$\mathrm{height}\mathfrak{p}=ht\mathfrak{p}=\sup\{r\in\mathbb{N}_\circ|\mathfrak{p}_\circ\subset\mathfrak{p}_1\subset\cdots\subset\mathfrak{p}_r=\mathfrak{p}$ یک زنجیر اکید از ایده‌آلهای اول R است، $\}$.

تعریف ۱۷.۱.۱ فرض می‌کنیم X و Y دو R- همبافت و یکی از آنها از راست کراندار باشد. در این صورت: $X\otimes^{\mathbf{L}}_R Y=\{F\otimes_R Y|F\simeq X\}$ کلاس هم‌ارزی از R- همبافتها تحت $\simeq$ می‌باشد که F یک تحلیل یکدست برای X است.

تعریف ۱۸.۱.۱ فرض می‌کنیم M یک R- مدول و φ یک دنباله در R- مدول باشد. M را یکدست[17] گوئیم هرگاه از دقیق بودن دنباله φ، دقیق بودن دنباله $\varphi\otimes_R M$ را نتیجه بگیریم.

تعریف ۱۹.۱.۱ R- مدول M را یکدست باوفا[18] گوئیم هرگاه دنبالهٔ φ دقیق باشد $\Leftrightarrow$ $\varphi\otimes_R M$ دقیق باشد. به عبارت دیگر R- مدول M را یکدست باوفا گوئیم هرگاه برای R- مدول دلخواهی مانند B اگر $M\otimes_R B=\circ$ باشد آنگاه نتیجه بگیریم که $M=\circ$.

تعریف ۲۰.۱.۱ برای هر R- مدول M، نگاشت دوگان[19] را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\delta_M: M\to\ \mathrm{Hom}_R(\ \mathrm{Hom}_R(M,R),R)$$

به ازای $\psi\in\ \mathrm{Hom}_R(M,R)$ و $x\in M$ که با ضابطه $\delta_M(x)(\psi)=\psi(x)$ تعریف می‌شود.

[17] Flat Module
[18] Faithfully Flat
[19] Biduality map

تعریف ۲۱.۱.۱ R- مدول M متعلق به G- class یا به عبارت دیگر، $G(R)$ است اگر و تنها اگر در سه شرط زیر صدق کند:

۱) به ازای $m > \circ$ داشته باشیم: $\mathrm{Ext}_R^m(M,R) = \circ$ ؛

۲) به ازای $m > \circ$ داشته باشیم: $\mathrm{Ext}_R^m(\mathrm{Hom}_R(M,R),R) = \circ$ ؛

۳) نگاشت دوگان $\delta_M : M \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_R(M,R),R)$ یکریختی باشد.

تعریف ۲۲.۱.۱ فرض می‌کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. گوئیم زیرمجموعه‌های A و B از X تشکیل جداسازی برای X می‌دهند، هرگاه در شرایط زیر صدق کنند:

۱) $A \neq \phi$، $B \neq \phi$؛

۲) A و B هر دو در X باز باشند؛

۳) $A \cap B = \phi$؛

۴) $A \cup B = X$.

تعریف ۲۳.۱.۱ فرض می‌کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. X را همبند[۲۰] گوئیم هرگاه برای آن هیچ جداسازی‌ای وجود نداشته باشد. به عبارت دیگر، X همبند است هرگاه نتوان آن را به صورت اجتماع دو مجموعه باز ناتهی جدا از هم نوشت.

تعریف ۲۴.۱.۱ فرض می‌کنیم X فضای توپولوژیک باشد. گوئیم A یک مولفه همبند[۲۱] از X است هرگاه $A \subseteq X$ همبند باشد و هیچ زیرمجموعه همبندی از X موجود نباشد که شامل A باشد.

تعریف ۲۵.۱.۱ همریختی K- جبر $f : P \otimes_K P \to K$ را با ضابطه $f(x \otimes y) = xy$ تعریف می‌کنیم که در آن قرار می‌دهیم $I = \mathrm{Ker} f$ و $\Omega_{P|K} = \frac{I}{I^۲}$.

تعریف ۲۶.۱.۱ فرض می‌کنیم A و B دو حلقه، k میدان خارج قسمتی و $k \to A \to B$ همریختی‌های حلقه‌ها باشند. هستهٔ همریختی $\Omega_{A|k} \otimes B \to \Omega_{B|k}$ را با $\Gamma_{B|A|k}$ نمایش می‌دهیم که آن را مدول ناقص[۲۲] A- جبر B روی k می‌نامیم.

[۲۰] Connected

[۲۱] Connected component

[۲۲] Imperfection module

تعریف ۲۷.۱.۱ حلقه موضعی[۲۳]، حلقه‌ای است که تنها یک ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد.

تعریف ۲۸.۱.۱ رشتهٔ $x_1, \cdots, x_n \in R$ را برای R- مدول M یک M- رشته منظم[۲۴] یا به اختصار M- رشته گوییم هرگاه دارای دو شرط زیر باشد:

۱) $\frac{M}{(x_1, \cdots x_n)M} \neq 0$

۲) به ازای هر $i \in \mathbb{Z}$، داشته باشیم: $x_i \notin Z(\frac{M}{(x_1, \cdots, x_{i-1})M})$.

نکته. $Z(M) = \{x \in R | \exists 0 \neq m \in M : xm = 0\}$.

تعریف ۲۹.۱.۱ فرض کنیم I یک ایده‌آل از حلقه R باشد. $x_1, \cdots, x_n \in I$ را یک M رشته ماکسیمال[۲۵] در I گوئیم هرگاه $x_1, \cdots, x_n$ یک M- رشته باشد و برای هر $y \in I$ رشته $x_1, \cdots x_n, y$ یک M- رشته نباشد، یعنی $x_1, \cdots, x_n$ به یک M- رشته با طول بیشتر از n گسترش پیدا نکند.

تعریف ۳۰.۱.۱ فرض می‌کنیم (R, m) یک حلقه موضعی و M یک R- مدول باشد. $M \supset (x_1, \cdots, x_t)$ را یک دستگاه پارامتری[۲۶] برای M گوئیم هرگاه $l(\frac{M}{(x_1, \cdots, x_t)M}) < \infty$.

تعریف ۳۱.۱.۱ فرض می‌کنیم $R = \oplus_{n \geq 0} R_n$ حلقه‌ای مدرج و M یک R- مدول باشد در این صورت M را یک R- مدول مدرج[۲۷] گوییم هرگاه یک خانواده از زیرگروههای M مانند $\{M_n\}$ وجود داشته باشد به طوریکه:

۱) $M = \oplus_{n \geq 0} M_n$

۲) به ازای هر $m, n \geq 0$ داشته باشیم: $R_m M_n \subseteq M_{n+m}$.

---

[۲۳] Localing

[۲۴] Regular

[۲۵] Maximal sequence

[۲۶] System of parametric

[۲۷] Graded module

تعریف ۳۲.۱.۱ فرض می‌کنیم M یک R- مدول باشد. بعد پروژکتیو[۲۸] M را با نماد $\mathrm{pd}_R(M)$ نمایش می‌دهیم و گوئیم $\mathrm{pd}_R(M) \leq n$ هرگاه یک تحلیل پروژکتیو بطول n مانند

$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots P_0 \to M \to 0$$

برای M موجود باشد و اگر M دارای هیچ تحلیل پروژکتیو بطول کمتر از n نباشد آنگاه $\mathrm{pd}_R(M) = n$ و اگر تحلیل پروژکتیو با طول متناهی برای M موجود نباشد گوئیم $pd_R(M) = +\infty$.

تعریف ۳۳.۱.۱ فرض می‌کنیم M یک R- مدول باشد گوئیم بعد یکدست[۲۹] M کمتر یا مساوی n است و آن را با $f\mathrm{d}_R(M) \leq n$ نمایش می‌دهیم. هرگاه یک تحلیل یکدست بطول n مانند

$$0 \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to A \to 0$$

برای M موجود باشد. اگر هیچ تحلیل یکدست از M با طول کمتر از n موجود نباشد آنگاه گوئیم $f\mathrm{d}_R(M) = n$.

تعریف ۳۴.۱.۱ فرض می‌کنیم M یک R- مدول باشد. گوئیم بعد انژکتیو[۳۰] M کمتر یا مساوی n است و آن را با $\mathrm{id}_R(M) \leq n$ نمایش می‌دهیم، هرگاه یک تحلیل انژکتیو بطول n مانند

$$0 \to E_n \to E_{n-1} \to \cdots \to E_1 \to E_0 \to A \to 0$$

برای M موجود باشد.

تعریف ۳۵.۱.۱ فرض می‌کنیم $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}R$ باشد. در این صورت $S = R - \mathfrak{p}$ مجموعه بسته ضربی و $S^{-1}R = R_\mathfrak{p}$ یک حلقه کسرها است و $(R_\mathfrak{p}, \mathfrak{p}R_\mathfrak{p})$ حلقه‌ای موضعی است که $\mathfrak{p}R\mathfrak{p} = \left\{r\big/s | r \in \mathfrak{p}, s \notin \mathfrak{p}\right\}$.

[۲۸] Projective dimension
[۲۹] Flat dimension
[۳۰] Injective dimension

نکته. فرض می‌کنیم $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}R$ باشد در این صورت

$$\operatorname{Spec}R_{\mathfrak{p}} = \{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} | \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}R,\ \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

تعریف ۳۶.۱.۱ فرض می‌کنیم M یک R- مدول و k یک میدان خارج قسمتی باشد. طول بزرگترین M- رشته را عمق[۳۱] R- مدول M می‌نامیم و با $\operatorname{depth}M$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\operatorname{depth}M = \inf\{n \in \mathbb{Z} | \operatorname{Ext}_R^n(k, M) \neq 0\}.$$

تعریف ۳۷.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه باشد. بعد حلقه R را با $\dim R$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\dim R = \sup\left\{n \in \mathbb{N} | \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n \text{ باشد } R \text{ یک زنجیره از ایده‌آلهای اول }\right\}.$$

تعریف ۳۸.۱.۱ فرض می‌کنیم $(R, \mathfrak{m})$ حلقه‌ای موضعی باشد. حلقه R را منظم[۳۲] گوئیم هرگاه ایده‌آل ماکسیمال آن توسط سیستم پارامتری تولید شود.

تعریف ۳۹.۱.۱ فرض می‌کنیم $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی نوتری و M متناهی مولد باشد. R- مدول M را کوهن– ماکولی[۳۳] گوییم هرگاه $\operatorname{depth}M = \dim M$.

تعریف ۴۰.۱.۱ حلقه موضعی $(R, \mathfrak{m})$ را کوهن– ماکولی گوییم هرگاه R یک R- مدول کوهن– ماکولی باشد و این یعنی حلقه دلخواه نوتری R را کوهن– ماکولی گوییم هرگاه به ازای هر $\mathfrak{m} \in \max R$، $R_{\mathfrak{m}}$ یک حلقه موضعی کوهن– ماکولی باشد.

---

[۳۱] Depth

[۳۲] Regular ring

[۳۳] Cohen-Macaullay