وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه بین المللی امام خمینی

IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

همگرایی الگوهای تکرار شونده برای نگاشت های چند مقداری در فضاهای باناخ

رساله برای دریافت درجه دکتری در رشته ی ریاضی محض

گرایش آنالیز

سیمین همائی پور

استاد راهنما:
دکتر عبدالرحمن رازانی

استاد مشاور:
دکتر علی آبکار

آبان ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به خانواده ی عزیزم

تشکر و قدردانی

برخود لازم می دانم از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر عبدالرحمن رازانی که در تمام مراحل پژوهشی و نگارشی این رساله از راهنمایی های ارزشمند ایشان بهره بردم، قدردانی نمایم. همچنین از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر علی آبکار تشکر نموده و سلامتی و موفقیت روز افزون این اساتید بزرگوار را از خداوند متعال خواستارم.

چکیده

در این رساله، در ابتدا، یک الگوی تکرار شونده را برای نگاشت های چند مقداری شبه انقباضی معرفی می کنیم و همگرایی این الگوی تکرار شونده را به یک نقطه ثابت نگاشت در فضاهای باناخ ثابت می کنیم.
سپس، نگاشت چند مقداری غیر انبساطی نسبی را تعریف می کنیم. به علاوه، یک الگوی تکرار شونده را برای نگاشت های چند مقداری غیر انبساطی نسبی معرفی می کنیم و همگرایی این الگوی تکرار شونده را به یک نقطه ثابت نگاشت در فضاهای باناخ ثابت می کنیم.
سپس، یک الگوی تکرار شونده را برای یافتن یک عنصر مشترک از مجموعه ی جواب یک مسئله ی تعادل و مجموعه ی نقاط ثابت یک نگاشت چند مقداری غیر انبساطی نسبی معرفی می کنیم و همگرایی این الگوی تکرار شونده را در فضاهای باناخ ثابت می کنیم.
به علاوه، یک الگوی تکرار شونده ی دیگر را برای یافتن یک عنصر مشترک از مجموعه ی جواب یک مسئله ی تعادل و مجموعه ی نقاط ثابت یک نگاشت چند مقداری غیر انبساطی نسبی معرفی و همگرایی این الگوی تکرار شونده را در فضاهای باناخ ثابت می کنیم. سپس، یک الگوی تکرار شونده را برای دو نگاشت چند مقداری غیر انبساطی نسبی تعریف می کنیم و همگرایی این الگوی تکرار شونده را به یک عنصر مشترک از مجموعه ی جواب یک مسئله ی تعادل و مجموعه ی نقاط ثابت مشترک دو نگاشت چند مقداری غیر انبساطی نسبی در فضاهای باناخ ثابت می کنیم.
در نهایت، یک الگوی تکرار شونده ی سه مرحله ای را برای نگاشت های چند مقداری معرفی کرده و همگرایی این الگوی تکرار شونده را به یک نقطه ثابت نگاشت در فضاهای باناخ ثابت می کنیم.

کلمات کلیدی: فضای باناخ، نگاشت چند مقداری، نقطه ثابت، الگوی تکرار شونده، نگاشت غیر انبساطی، نگاشت شبه انقباضی، نگاشت غیر انبساطی نسبی، تابع دوگانه، مسئله ی تعادل.

فهرست مطالب

پیشگفتار

بسیاری از مسائل غیر خطی در ریاضیات کاربردی به حل یک معادله منجر می شوند و قضایای نقطه ثابت [۱] به حل این معادلات کمک می کنند. تا کنون، قضایای نقطه ثابت زیادی ارائه شده اند که به وجود یا یکتایی نقطه ثابت یک نگاشت خاص می پردازند، اما از میان این قضایا آنهایی که یک روش ساختاری برای یافتن نقطه ثابت ارائه می دهند از اهمیت کاربردی بیشتری برخوردارند.
الگوهای تکرار شونده [۲] برای تقریب نقطه ثابت نگاشت های تک مقداری [۳] در مقالات بسیاری مورد بررسی قرار گرفته اند [۲۰، ۳۲، ۳۵، ۴۴]. از جمله ی اولین الگوهای تکرار شونده به ترتیب در زیر به الگوهای تکرار شونده ی پیکارد [۴] [۴]، مان [۵] [۲۶] و ایشیکاوا [۶] [۱۹] برای نگاشت تک مقداری T اشاره می کنیم:

$$x_{n+1} = T(x_n),$$

$$x_{n+1} = \alpha_n T(x_n) + (1 - \alpha_n)x_n$$

و

$$\begin{aligned} y_n &= \beta_n T(x_n) + (1 - \beta_n)x_n \\ x_{n+1} &= \alpha_n T(y_n) + (1 - \alpha_n)x_n \end{aligned}$$

که $\{\alpha_n\}$ و $\{\beta_n\}$ دنباله هایی در $[0, 1]$ می باشند.
همچنین، الگوهای تکرار شونده ی بسیاری برای یافتن یک عنصر مشترک از مجموعه ی جواب یک

[۱] Fixed point
[۲] Iteration schemes
[۳] Single-valued mappings
[۴] Picard
[۵] Mann
[۶] Ishikawa

مسئله ی تعادل [۷] و مجموعه ی نقاط ثابت نگاشت معرفی شده است. مسئله ی تعادل در فیزیک، اقتصاد و بهینه سازی [۸] کاربرد دارد.
تا کنون، در مقالات متعدد، برخی از قضایای نقطه ثابت برای نگاشت های تک مقداری، به نگاشت های چند مقداری [۹] تعمیم داده شده است. از آن جمله می توان به قضیه ی نقطه ثابت باناخ اشاره کرد که توسط نادلر [۱۰] [۳۰] برای نگاشت های چند مقداری تعمیم داده شد.
تعمیم الگوهای تکرار شونده برای نگاشت های تک مقداری به الگوهای تکرار شونده برای نگاشت های چند مقداری نیز از مسائلی است که بسیار مورد توجه قرار گرفته است [۲۱، ۳۶، ۴۰، ۳۷]. در این رساله نیز چندین الگوی تکرار شونده برای نگاشت های چند مقداری معرفی می شود و همگرایی آن ها در فضاهای باناخ مورد بررسی قرار می گیرد.
این رساله از پنج فصل تشکیل شده است. در فصل اول این رساله، به بیان تعاریف و قضایای مقدماتی و نمادگذاری هایی که در فصل های بعدی مورد نیاز است می پردازیم.
در هر کدام از فصل های دوم تا پنجم نیز یک بخش مقدمه وجود دارد که در آن به بیان اهداف آن فصل و همچنین تعاریف و قضایای مورد نیاز در آن فصل می پردازیم.
در فصل دوم، با الهام گرفتن از مقالات سانگ [۱۱] و چن [۱۲] [۳۹] و اوفودو [۱۳] و زگیه [۱۴] [۳۱] یک الگوی تکرار شونده برای نگاشت های چند مقداری پیوسته و شبه انقباضی [۱۵] معرفی می کنیم. سپس، همگرایی قوی این الگوی تکرار شونده را به یک نقطه ثابت نگاشت در فضاهای باناخ انعکاسی با نرم یکنواخت گاتو دیفرانسیل پذیر [۱۶] ثابت می کنیم.
در فصل سوم، تعریف نگاشت تک مقداری غیر انبساطی نسبی [۱۷] را به نگاشت چند مقداری غیر انبساطی نسبی تعمیم می دهیم. به علاوه، الگوی تکرار شونده ی معرفی شده توسط ماتسوشیتا [۱۸] و تاکاهاشی [۱۹] [۲۷] برای نگاشت های تک مقداری غیر انبساطی نسبی را به نگاشت های چند مقداری غیر انبساطی نسبی تعمیم می دهیم. سپس، همگرایی ضعیف و قوی این الگوی تکرار شونده را به

[۷] Equilibrium problem
[۸] Optimization
[۹] Multi-valued mappings
[۱۰] Nadler
[۱۱] Song
[۱۲] Chen
[۱۳] Ofoedu
[۱۴] Zegeye
[۱۵] Pseudocontractive
[۱۶] Uniformly Gâteaux differentiable
[۱۷] Relatively nonexpansive
[۱۸] Matsushita
[۱۹] Takahashi

یک نقطه ثابت نگاشت در فضاهای باناخ یکنواخت محدب و یکنواخت هموار ثابت می کنیم.
در فصل چهارم، ابتدا، یک الگوی تکرار شونده را برای یافتن یک عنصر مشترک از مجموعه ی جواب یک مسئله ی تعادل [۲۰] و مجموعه ی نقاط ثابت یک نگاشت چند مقداری غیر انبساطی نسبی معرفی می کنیم. این الگوی تکرار شونده تعمیم یکی از الگوهای تکرار شونده برای نگاشت های تک مقداری غیر انبساطی نسبی در مقاله ی تاکاهاشی و زمبایاشی[۲۱] [۴۲] به نگاشت های چند مقداری غیرانبساطی نسبی است. سپس، همگرایی ضعیف و قوی این الگوی تکرار شونده را در فضاهای باناخ یکنواخت محدب و یکنواخت هموار ثابت می کنیم.
در ادامه، یک الگوی تکرار شونده ی دیگر را برای یافتن یک عنصر مشترک از مجموعه ی جواب یک مسئله ی تعادل و مجموعه ی نقاط ثابت یک نگاشت چند مقداری غیر انبساطی نسبی معرفی می کنیم و همگرایی قوی آن را در فضاهای باناخ یکنواخت محدب و یکنواخت هموار ثابت می کنیم. این الگوی تکرار شونده تعمیم یکی از الگوهای تکرار شونده برای نگاشت های تک مقداری غیر انبساطی نسبی در مقاله ی ژانگ [۲۲]، لی [۲۳] و لیو [۲۴] [۴۷] به نگاشت های چند مقداری غیرانبساطی نسبی است.
در پایان فصل چهارم، با الهام گرفتن از یکی دیگر از الگوهای تکرار شونده برای نگاشت های تک مقداری غیر انبساطی نسبی در مقاله ی ژانگ، لی و لیو [۴۷] یک الگوی تکرار شونده را برای دو نگاشت چند مقداری غیر انبساطی نسبی معرفی می کنیم. سپس، همگرایی قوی این الگوی تکرار شونده را به یک عنصر مشترک از مجموعه ی جواب یک مسئله ی تعادل و مجموعه ی نقاط ثابت مشترک دو نگاشت چند مقداری غیر انبساطی نسبی در فضاهای باناخ یکنواخت محدب و یکنواخت هموار ثابت می کنیم.
در فصل آخر یک الگوی تکرار شونده ی معرفی شده توسط شهزاد[۲۵] و زگیه [۳۷] را به یک الگوی تکرار شونده ی سه مرحله ای تعمیم داده و همگرایی قوی آن را به یک نقطه ثابت نگاشت در فضاهای باناخ یکنواخت محدب ثابت می کنیم.

[۲۰] Equilibrium problem
[۲۱] Zembayashi
[۲۲] Zhang
[۲۳] Li
[۲۴] Liu
[۲۵] Shahzad

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل، به بیان تعاریف و قضایای مقدماتی و نمادگذاری هایی می پردازیم که در رساله مورد استفاده می باشند.
فرض کنید X یک فضای باناخ حقیقی با نرم $\|.\|$ و X^* دوگان آن باشد. در این رساله همگرایی قوی یک دنباله را با $\to$، همگرایی ضعیف یک دنباله را با $\rightharpoonup$ و همگرایی ضعیف ستاره ی یک دنباله را با $\overset{*}{\rightharpoonup}$ نشان می دهیم.

۱.۱ تحدب، همواری و نگاشت دوگانی

تعریف ۱.۱.۱. [۱] فضای باناخ X اکید محدب [1] نامیده می شود اگر برای هر $x, y \in X$ که $\|x\| = \|y\| = ۱$ و $x \neq y$، داشته باشیم $\|(x+y)/۲\| < ۱$.

مثال ۲.۱.۱. [۱] فضای باناخ $X = \mathbb{R}^n$، $n \geq ۲$، با نرم $\|.\|_۲$ که به صورت

$$\|x\|_۲ = (\sum_{i=۱}^{n} x_i^۲)^{\frac{۱}{۲}}, \quad x = (x_۱, x_۲, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

تعریف می شود، یک فضای باناخ اکید محدب است.

تعریف ۳.۱.۱. [۱۱] فضای باناخ X یکنواخت محدب [2] نامیده می شود اگر برای هر دو دنباله ی $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq X$ که $\|x_n\| = \|y_n\| = ۱$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ و

$$\lim_{n\to\infty} \|(x_n+y_n)/۲\| = ۱$$

داشته باشیم $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = ۰$.

مثال ۴.۱.۱. [۱۱] هر فضای هیلبرت، یکنواخت محدب است. همچنین فضاهای باناخ L_p، $۱ < p < \infty$ یکنواخت محدب می باشند.

[1] Strictly convex
[2] Uniformly convex

قضیه ۵.۱.۱. [۱۱] *فضای باناخ X یکنواخت محدب است اگر و تنها اگر برای هر $\epsilon > 0$، $\delta > 0$ موجود باشد به قسمی که برای هر $x, y \in X$ که $\|x\| = \|y\| = 1$ و $\|x - y\| \geq \epsilon$ داشته باشیم $\|x + y\| \leq 2(1 - \delta)$.*

قضیه ۶.۱.۱. [۱۱] *هر فضای باناخ یکنواخت محدب، انعکاسی است.*

تعریف ۷.۱.۱. [۱] فضای باناخ X هموار [۳] است، اگر برای هر $x \neq 0$، x^* یکتایی در X^* موجود باشد، به قسمی که $\langle x, x^* \rangle = \|x\|$ و $\|x^*\| = 1$.

تعریف ۸.۱.۱. [۱، ۱۱] فضای باناخ X یکنواخت هموار [۴] نامیده می شود، هرگاه

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\rho(\tau)}{\tau} = 0$$

که تابع ρ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\rho(\tau) = \frac{1}{2} \sup_{\|x\|=\|y\|=1} (\|x + \tau y\| + \|x - \tau y\| - 2), \quad \tau > 0.$$

قضیه ۹.۱.۱. [۱، ۱۱] *هر فضای باناخ یکنواخت هموار، هموار است.*

مثال ۱۰.۱.۱. [۱، ۱۱] فضاهای باناخ L_p، $1 < p < \infty$، یکنواخت هموار می باشند.

قضیه ۱۱.۱.۱. [۱، ۱۱] *فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. آنگاه X (به ترتیب X^*) یکنواخت محدب است اگر و تنها اگر X^* (به ترتیب X) یکنواخت هموار باشد.*

---
[۳] Smooth
[۴] Uniformly smooth

تعریف ۱.۱.۱۲. [۱] فرض کنید $S(X) := \{z \in X : \|z\| = 1\}$، نرم فضای باناخ X گاتو دیفرانسیل پذیر است، اگر برای هر $x, y \in S(X)$،

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t},$$

موجود باشد.

مثال ۱.۱.۱۳. [۱] نرم هر فضای هیلبرت، گاتو دیفرانسیل پذیر است.

قضیه ۱.۱.۱۴. [۱] *فضای باناخ X هموار است، اگر و تنها اگر نرم روی $X \setminus \{0\}$ گاتو دیفرانسیل پذیر باشد.*

تعریف ۱.۱.۱۵. [۱] نرم فضای باناخ X یکنواخت گاتو دیفرانسیل پذیر نامیده می شود اگر برای هر $y \in S(X)$،

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t},$$

به طور یکنواخت برای $x \in S(X)$ موجود باشد.

تعریف ۱.۱.۱۶. [۱] نرم فضای باناخ X فرشه دیفرانسیل پذیر[5] نامیده می شود، اگر برای هر $x \in S(X)$،

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t},$$

به طور یکنواخت برای $y \in S(X)$ موجود باشد.

تعریف ۱.۱.۱۷. [۱] نرم فضای باناخ X یکنواخت فرشه دیفرانسیل پذیر است، اگر

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t},$$

به طور یکنواخت برای هر $x, y \in S(X)$ موجود باشد.

[5] Fréchet differentiable

قضیه ۱.۱.۱۸. [۱] *فضای باناخ X یکنواخت هموار است، اگر و تنها اگر نرم یکنواخت فرشه دیفرانسیل پذیر باشد.*

تعریف ۱.۱.۱۹. [۱] فضای باناخ X دارای خاصیت کادک-کلی [۶] است، اگر برای هر دنباله ی $\{x_n\}$ در X و $x \in X$ که $x_n \rightharpoonup x$ و $\|x_n\| \to \|x\|$، داشته باشیم $x_n \to x$.

قضیه ۱.۱.۲۰. [۱] *اگر X یک فضای باناخ یکنواخت محدب باشد، آنگاه X دارای خاصیت کادک-کلی است.*

تعریف ۱.۱.۲۱. [۱] تابع پیوسته و اکید صعودی $\mu : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ تابع پیمانه [۷] نامیده می شود، اگر $\mu(0) = 0$ و $\lim_{t\to\infty} \mu(t) = \infty$.

تعریف ۱.۱.۲۲. [۱] فرض کنید X یک فضای باناخ و μ یک تابع پیمانه باشد. نگاشت J_μ از X به 2^{X^*} را که به صورت زیر تعریف می شود:

$$J_\mu(x) := \{f^* \in X^* : \langle x, f^* \rangle = \|x\|\|f^*\|, \quad \|f^*\| = \mu(\|x\|)\}, \quad x \in X$$

نگاشت دوگانی با تابع پیمانه μ می نامند.

تعریف ۱.۱.۲۳. [۱] اگر $\mu(t) = t$ برای هر $t \in \mathbb{R}^+$، آنگاه نگاشت دوگانی J_μ را نگاشت دوگانی نرمال [۸] می نامند. نگاشت دوگانی نرمال را با J نمایش می دهیم.

مثال ۱.۱.۲۴. [۱] در فضاهای هیلبرت [۹]، نگاشت دوگانی نرمال، نگاشت همانی است.

---
[۶] Kadec-Klee
[۷] Gauge function
[۸] Normalized duality mapping
[۹] Hilbert spaces

قضیه ۲۵.۱.۱. [۱] *فرض کنید J_μ یک نگاشت دوگانی با تابع پیمانه μ باشد. آنگاه*

۱. $J_\mu(-x) = -J_\mu(x)$ ، *برای هر* $x \in X$.

۲. $J_\mu(\lambda x) = \frac{\mu(\|\lambda x\|)}{\mu(\|x\|)} J_\mu(x)$ ، *برای هر* $x \in X$ ، $\lambda > ۰$.

۳. *نگاشت دوگانی* J_μ *یکنوا است، یعنی برای هر* $x, y \in X$ ، $x^* \in J_\mu(x)$ *و* $y^* \in J_\mu(y)$ *داریم*

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq ۰.$$

قضیه ۲۶.۱.۱. [۱] *فرض کنید* X *یک فضای باناخ اکید محدب و* J_μ *یک نگاشت دوگانی با تابع پیمانه* μ *باشد. آنگاه* J_μ *اکید یکنوا است، یعنی برای هر* $x, y \in X$ *که* $x \neq y$ *و برای هر* $x^* \in J_\mu(x)$ *و* $y^* \in J_\mu(y)$ *داریم* $\langle x - y, x^* - y^* \rangle > ۰$.

قضیه ۲۷.۱.۱. [۱] *فرض کنید* X *یک فضای باناخ انعکاسی و* J_μ *یک نگاشت دوگانی با تابع پیمانه* μ *باشد. آنگاه، وارون نگاشت دوگانی* J_μ *، یک نگاشت دوگانی با تابع پیمانه* $\mu^{-۱}$ *است.*

قضیه ۲۸.۱.۱. [۱] *فرض کنید* X *یک فضای باناخ و* J_μ *یک نگاشت دوگانی با تابع پیمانه* μ *باشد. آنگاه* X *انعکاسی است اگر و تنها اگر* $\bigcup_{x \in X} J_\mu(x) = X^*$ *، که این به معنی پوشا بودن* J_μ *است.*

قضیه ۲۹.۱.۱. [۱] *اگر* X *یک فضای باناخ اکید محدب باشد، آنگاه برای هر* $x, y \in X$ *که* $x \neq y$ *داریم* $J(x) \cap J(y) = \emptyset$.

قضیه ۳۰.۱.۱. [۱] *اگر* X *یک فضای باناخ هموار باشد، آنگاه نگاشت دوگانی نرمال* J *، تک مقداری و نرم به ضعیف ستاره پیوسته است.*

قضیه ۳۱.۱.۱. [۱] *اگر* X *یک فضای باناخ یکنواخت هموار باشد، آنگاه نگاشت دوگانی نرمال* J *، یکنواخت نرم به نرم پیوسته روی هر زیر مجموعه ی کراندار* X *است.*

قضیه ۳۲.۱.۱. [۱] *اگر X یک فضای باناخ با نرم فرشه دیفرانسیل پذیر باشد، آنگاه نگاشت دوگانی نرمال J نرم به نرم پیوسته است.*

تعریف ۳۳.۱.۱. [۲۷] فرض کنید X یک فضای باناخ هموار باشد. آنگاه نگاشت دوگانی نرمال J به طور دنباله ای ضعیف پیوسته [۱۰] نامیده می شود هرگاه اگر $x_n \rightharpoonup x$، آنگاه $J(x_n) \overset{*}{\rightharpoonup} J(x)$.

۲.۱ نگاشت غیر انبساطی و نقطه ثابت

تعریف ۱.۲.۱. [۱] زیر مجموعه ی ناتهی E از فضای باناخ X نزدینی [۱۱] نامیده می شود هرگاه برای هر $x \in X$، $y \in E$ موجود باشد، به قسمی که $\|x-y\| = d(x,E)$، که $d(x,E)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$d(x,E) = \inf\{\|x-z\|; z \in E\}.$$

برای هر $x \in X$ مجموعه $P_E(x)$ به صورت $P_E(x) = \{y \in E; \|x-y\| = d(x,E)\}$ تعریف می شود.

فرض کنید D زیر مجموعه ای ناتهی، بسته و محدب از فضای باناخ X باشد. در این رساله، خانواده ی همه ی زیر مجموعه های ناتهی، بسته و کراندار D را با $CB(D)$، خانواده ی همه ی زیر مجموعه های ناتهی، کراندار و نزدینی D را با $P(D)$ و خانواده ی همه ی زیر مجموعه های ناتهی D را با $N(D)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۲.۲.۱. [۱] نگاشت تک مقداری $T : D \to D$ غیر انبساطی نامیده می شود هرگاه

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \|x-y\|, \quad \forall x,y \in D$$

و انقباضی با ثابت $0 < k < 1$ نامیده می شود هرگاه

$$\|T(x) - T(y)\| \leq k\|x-y\|, \quad \forall x,y \in D.$$

[۱۰] Weakly sequentially continuous
[۱۱] Proximinal

تعریف ۳.۲.۱. [۱] فرض کنید $A_۱, A_۲ \in CB(D)$، متر هاسدورف [۱۲] H روی $CB(D)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$H(A_۱, A_۲) = \max\left\{\sup_{x\in A_۱} d(x, A_۲), \sup_{y\in A_۲} d(y, A_۱)\right\}.$$

لم ۴.۲.۱. [۳۰] *فرض کنید* $A_۱, A_۲ \in CB(D)$ *و* $a \in A_۱$. *آنگاه برای هر عدد* $\epsilon > ۰$، $b \in A_۲$ *موجود است به قسمی که*

$$\|a - b\| \leq H(A_۱, A_۲) + \epsilon.$$

تعریف ۵.۲.۱. [۱] نگاشت چند مقداری $T : D \to CB(D)$ غیر انبساطی نامیده می شود، هرگاه

$$H(T(x), T(y)) \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in D.$$

تعریف ۶.۲.۱. [۱] نقطه ی $p \in D$، نقطه ثابت نگاشت $T : D \to D$ نامیده می شود، هرگاه $p = T(p)$.

نقطه ی $p \in D$، نقطه ثابت نگاشت $T : D \to N(D)$ نامیده می شود، هرگاه $p \in T(p)$.

مجموعه ی نقاط ثابت نگاشت T را با $F(T)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۷.۲.۱. [۴۳] زیر مجموعه ی ناتهی C از فضای باناخ X دارای خاصیت نقطه ثابت برای نگاشت های غیر انبساطی است، اگر برای هر نگاشت غیر انبساطی $T : C \to C$ داشته باشیم $F(T) \neq \emptyset$.

[۱۲] Hausdorff metric

فصل ۲

الگوی تکرار شونده برای نگاشت های چند مقداری شبه انقباضی

۱.۲ مقدمه

فرض کنید D زیر مجموعه ای ناتهی، بسته و محدب از فضای باناخ حقیقی X باشد. یک نگاشت چند مقداری شبه انقباضی به صورت زیر تعریف می شود.

تعریف ۱.۱.۲. [۳۱] نگاشت $T : D \to CB(X)$ شبه انقباضی نامیده می شود اگر برای هر x و y در دامنه ی تعریف T، $u \in T(x)$، $v \in T(y)$ و برای هر $t > 0$ نامساوی زیر برقرار باشد:

$$\|x - y\| \leq \|x - y + t((x - u) - (y - v))\|, \tag{۱.۲}$$

به عبارت دیگر، با استفاده از مقاله ی کاتو [1] [۲۳] نگاشت T شبه انقباضی است اگر و تنها اگر برای هر x و y در دامنه تعریف T، $j(x - y) \in J(x - y)$ موجود باشد به قسمی که برای هر $u \in T(x)$ و $v \in T(y)$ داشته باشیم:

$$\langle u - v, j(x - y)\rangle \leq \|x - y\|^2.$$

برای این دسته از نگاشت ها، نگاشت $J_\lambda := (I + \lambda(I - T))^{-1}$، که حلال [2] $A := I - T$ نامیده می شود، یک نگاشت تک مقداری غیر انبساطی است که روی برد $I + \lambda(I - T)$ تعریف می شود، همچنین داریم $F(T) = F(J_\lambda)$ برای هر $\lambda > 0$ [۱۱، ۳۱].

تعریف ۲.۱.۲. [۱] نگاشت تک مقداری $T : D \to D$ شبه انقباضی نامیده می شود، هرگاه برای هر $x, y \in D$، $j(x - y) \in J(x - y)$ موجود باشد به قسمی که

$$\langle T(x) - T(y), j(x - y)\rangle \leq \|x - y\|^2.$$

فرض کنید $x \in D$، مجموعه ی درونی[3] x، به صورت

$$I_D(x) := \{x + \lambda(u - x); u \in D, \lambda \geq 0\},$$

تعریف می شود. نگاشت $T : D \to CB(X)$ در شرط درونی ضعیف [4] صدق می کند هرگاه $T(x) \subset \overline{I_D(x)}$ برای هر $x \in D$ [۱۲].

[1] Kato
[2] Resolvent
[3] Inward set
[4] Weakly inward