بسم الله الرحمن الرحیم

تعهدنامه‌ی اصالت اثر و رعایت حقوق دانشگاه

تمامی حقوق مادّی و معنوی مترتب بر نتایج، ابتکارات، اختراعات و نوآوری‌هایِ ناشی از انجام این پژوهش، متعلق به **دانشگاه محقق اردبیلی** می‌باشد. نقل مطلب از این اثر، با رعایت مقرّرات مربوطه و با ذکر نام دانشگاه محقق اردبیلی، نام استاد راهنما و دانشجو بلامانع است.

اینجانب سامان حق‌بین ملاسرایی دانش‌آموخته‌ی مقطع کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش جبر دانشکده‌ی علوم ریاضی دانشگاه محقق اردبیلی به شماره‌ی دانشجویی ۹۱۲۲۴۱۳۱۰۸ که در تاریخ ۹۳/۶/۲۵ از پایان‌نامه‌ی تحصیلی خود تحت عنوان **مطالعه‌ی بُعدهای همولوژیکی مدول‌های کوهمولوژی موضعی آرتینی** دفاع نموده‌ام، متعهد می‌شوم که:

۱) این پایان‌نامه را قبلاً برای دریافت هیچ‌گونه مدرک تحصیلی یا به عنوان هرگونه فعالیت پژوهشی در سایر دانشگاه‌ها و مؤسسات آموزشی و پژوهشی داخل و خارج از کشور ارائه ننموده‌ام.

۲) مسئولیت صحّت و سقم تمامی مندرجات پایان‌نامه‌ی تحصیلی خود را بر عهده می‌گیرم.

۳) این پایان‌نامه، حاصل پژوهش انجام شده توسط اینجانب می‌باشد.

۴) در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران استفاده نموده‌ام، مطابق ضوابط و مقرّرات مربوطه و با رعایت اصل امانتداری علمی، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در متن و فهرست منابع و مآخذ ذکر نموده‌ام.

۵) چنانچه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفاده یا هر گونه بهره‌برداری اعم از نشر کتاب، ثبت اختراع و ... از این پایان‌نامه را داشته باشم، از حوزه‌ی معاونت پژوهشی و فنّاوری دانشگاه محقق اردبیلی، مجوزهای لازم را اخذ نمایم.

۶) در صورت ارائه‌ی مقاله‌ی مستخرج از این پایان‌نامه در همایش‌ها، کنفرانس‌ها، سمینارها، گردهمایی‌ها و انواع مجلات، نام دانشگاه محقق اردبیلی را در کنار نام نویسندگان (دانشجو و اساتید راهنما و مشاور) ذکر نمایم.

۷) چنانچه در هر مقطع زمانی، خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی از آن (منجمله ابطال مدرک تحصیلی، طرح شکایت توسط دانشگاه و ...) را می‌پذیرم و دانشگاه محقق اردبیلی را مجاز می‌دانم با اینجانب مطابق ضوابط و مقرّرات مربوطه رفتار نماید.

نام و نام خانوادگی دانشجو: سامان حق‌بین ملاسرایی

امضا

تاریخ: ۹۳/۶/۲۵

دانشکده‌ی علوم ریاضی
گروه آموزشی ریاضیات و کاربردها

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد
در رشته‌ی ریاضی محض گرایش جبر

عنوان:

مطالعه‌ی بُعدهای همولوژیکی مدول‌های کوهمولوژی موضعی آرتینی

استاد راهنما:

دکتر جعفر اعظمی

استاد مشاور:

دکتر ناصر زمانی

پژوهشگر:

سامان حق‌بین ملاسرایی

شهریور ۱۳۹۳

دانشکده‌ی علوم ریاضی
گروه آموزشی ریاضیات و کاربردها

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد
در رشته‌ی ریاضی محض گرایش جبر

عنوان:
مطالعه‌ی بُعدهای همولوژیکی مدول‌های کوهمولوژی موضعی آرتینی

پژوهشگر:
سامان حق‌بین ملاسرایی

ارزیابی و تصویب شده‌ی کمیته‌ی داوران پایان‌نامه با درجه‌ی بسیار خوب

نام و نام خانوادگی	مرتبه‌ی علمی	سمت	امضاء
دکتر جعفر اعظمی	استادیار	استاد راهنما و رییس کمیته‌ی داوران	
دکتر ناصر زمانی	دانشیار	استاد مشاور	
دکتر احمد یوسفیان	دانشیار	داور	

شهریور ۱۳۹۳

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم : به پاس تعبیر عظیم و انسانی‌شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگان

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است

به پاس قلب‌های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس درپناهشان به شجاعت می‌گراید

و به پاس محبت‌های بی‌دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند.

خدایا![1]

مگذار دعا کنم که مرا از دشواری ها و خطرهای زندگی مصون داری

بلکه دعا کنم تا در رویارویی با آن ها بی باک باشم.

مگذار از تو بخواهم، درد مرا تسکین دهی

بلکه توان چیرگی بر آن را به من ببخشی!

خدایا!

سرنوشت مرا خیر بنویس

تقدیری مبارک

تا هر چه را که تو دیر می خواهی زود نخواهم

و هر چه را تو زود می خواهی دیر نخواهم.

---

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس‌گزاری...

شکر شایان نثار ایزدمنان که توفیق را رفیق راهم ساخت تا این پایان‌نامه را به پایان برسانم.

نخست از **پدر و مادر عزیزم** ... این دو معلم بزرگوارم... که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت‌هایم گذشته‌اند و در تمام عرصه‌های زندگی یار و یاوری بی‌چشم داشت برای من بوده‌اند تشکر می‌نمایم و بر دستان پرمهرشان بوسه می‌زنم.

سپس از استاد باکمالات و شایسته، جناب آقای **دکتر جعفر اعظمی** که در کمال سعه‌صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند کمال تشکر و قدردانی را دارم. همچنین، از استاد صبور و باتقوا جناب آقای **دکتر ناصر زمانی** که مشاور بنده در این پایان‌نامه بوده‌اند تشکر ویژه می‌نمایم. همچنین از استاد محترم آقای **دکتر احمد یوسفیان** که زحمت داوری پایان‌نامه‌ی اینجانب را بر عهده داشته‌اند، صمیمانه تشکر می‌نمایم.

همچنین، از دوست و برادر عزیزم آقای مهدی نیسی که کمک‌های فراوانی در این پایان‌نامه به بنده نموده‌اند تشکر می‌نمایم، و در نهایت از تمام استادان و دوستان دوره‌ی تحصیلم، که خاطراتشان هیچ‌گاه از ضمیر ذهنم محو نمی‌شود، سپاس‌گزاری می‌کنم.

باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

سامان حق بین ملاسرایی

نام خانوادگی: حق‌بین ملاسرایی نام: سامان

عنوان پایان‌نامه: مطالعه‌ی بُعدهای همولوژیکی مدول‌های کوهمولوژی موضعی آرتینی

استاد راهنما: دکتر جعفر اعظمی

استاد مشاور: دکتر ناصر زمانی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: جبر

دانشگاه: محقق اردبیلی دانشکده: علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی:۹۳/۶/۲۵ تعداد صفحه:۸۴

چکیده

فرض کنید R یک حلقه‌ی جابجایی یکدار نوتری و M یک R-مدول یکانی باشد. در این پایان‌نامه بُعدهای همولوژیکی مدول‌های کوهمولوژی موضعی آرتینی را مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم. برای این کار ابتدا مطالبی در مورد مدول‌های کوهمولوژی موضعی، فانکتورهای تاب و توسیع ارایه می‌دهیم. سپس بُعدهای انژکتیو و مُسطح را از دیدگاه‌های متفاوت مورد بررسی قرار می‌دهیم. به طور خلاصه نشان می‌دهیم اگر $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی نوتری و M یک R-مدول غیرصفر با تولید متناهی باشد، آن‌گاه، به ازای هر $P \in \operatorname{Spec}(R)$، بُعدهای $\operatorname{fd}_{R_P}\ H^{i-\dim(R/P)}_{PR_P}(M_P)$ و $\operatorname{injdim}_{R_P}\ H^{i-\dim(R/P)}_{PR_P}(M_P)$ از بالا کراندار هستند. همچنین این کران را برای هر $i \geqslant \dim(\dfrac{R}{P})$ مشخص می‌کنیم.

کلید واژه‌ها: مدول‌های هم‌متناهی، بُعد مُسطح، بُعد انژکتیو، بُعد کرول، کوهمولوژی موضعی.

فهرست مطالب

مقدمه

در سراسر این پایان‌نامه R یک حلقه‌ی جابه‌جایی یکدار و نوتری، M یک $R-$ مدول و I یک ایده‌آل از R است. $i-$ امین مدول کوهمولوژی موضعی M نسبت به ایده‌آل I را با نماد $H_I^i(M)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H_I^i(M) = \varinjlim_{n\geq 1} \operatorname{Ext}_R^i(\frac{R}{I^n}, M).$$

برای مطالعه‌ی بیشتر در این زمینه می‌توان به منابع [۶] و [۱۱] مراجعه نمود.

$R-$ مدول M را $I-$ هم‌متناهی می‌نامند هرگاه $\operatorname{Supp}_R(M) \subseteq \operatorname{V}(I)$ و $\operatorname{Ext}_R^i(\frac{R}{I}, M)$ به ازای هر i با تولید متناهی باشد. دلفینو[1] و مارلی[2] در [۹] و یوشیدا[3] در [۲۰] نشان دادند که اگر $(R, \mathfrak{m})$ موضعی نوتری و $\dim(\frac{R}{I}) = 1$، آنگاه $H_I^i(M)$ به ازای هر i و به ازای هر $R-$ مدول با تولید متناهی M، $I-$ هم‌متناهی است. سپس بهمن پور و نقی پور در [۴] مسئله‌ی بالا را بدون حالت موضعی حل کردند.

در این پایان‌نامه برخی نتایج متناهی بودن را در مورد فانکتورهای توسیع و تاب برای مدول‌های کوهمولوژی موضعی آرتینی ثابت می‌کنیم. در نهایت به عنوان کاربردی از مسائل اثبات شده برخی نتایج جدید را در مورد بُعدهای همولوژیکی مدول‌های کوهمولوژی موضعی ارائه می‌دهیم.

---

[1] Delfino
[2] Marley
[3] Yoshida

در فصل دوم به تاریخچه‌ای از حسابان کسری که شامل معرفی انواع توابع خاص، انواع مشتق و انتگرال کسری و ویژگی‌های مربوط به آن‌ها است، پرداخته می‌شود.

در فصل سوم وجود جواب خفیف برای معادله تکاملی کسری را بررسی می‌کنیم.

در فصل چهارم تعریف‌هایی از پایداری میتاگ-لفلر-اولام را آورده و به بررسی چهار نوع از پایداری میتاگ-لفلر-اولام می‌پردازیم.

فصل ۱
مفاهیم و مقدمات اولیه

۱.۱ تعاریف و قضایا

در سراسر این پایان‌نامه R یک حلقه‌ی جابجایی یکدار و نوتری می‌باشد. در این فصل برخی از تعاریف و قضایایی که در فصل بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند را مرور می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید M یک R-مدول باشد. زیرمجموعه‌ی X از M را یک مجموعه‌ی مولد برای M می‌نامیم هرگاه $M = \langle X \rangle$. اگر M یک مجموعه‌ی مولد متناهی داشته باشد، آنگاه M را با تولید متناهی[1] می‌نامیم. به عبارتی دیگر، M با تولید متناهی است هرگاه اعضایی از M مانند $x_1, \ldots, x_n$ موجود باشند به طوری که $M = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. اگر M مجموعه‌ی مولد تک عضوی داشته باشد، آن را دوری می‌نامیم. به عبارتی دیگر، M دوری است هرگاه عضوی از M مانند x موجود باشد به طوری که $M = \langle x \rangle$.

مثال ۱.۱.۱. ۱) R- مدول M برای خود یک مجموعه مولد است، زیرا $M = RM = \langle M \rangle$.

۲) R به عنوان R-مدول، دوری است، زیرا $R = R1 = \langle 1 \rangle$.

قضیه ۱.۱.۱. فرض کنید M و N دو R-مدول و $\varphi : M \longrightarrow N$ یک R-همریختی باشد. در این صورت

۱) اگر M با تولید متناهی باشد، آنگاه $\mathrm{Im}(\varphi)$ نیز با تولید متناهی است.

۲) اگر $\mathrm{Im}(\varphi)$ و $\mathrm{Ker}(\varphi)$ با تولید متناهی باشند، آنگاه M نیز با تولید متناهی است.

[1] Finitely generated

اثبات. (۱) چون M با تولید متناهی است، لذا اعضایی مانند $x_1, \dots, x_n$ از M وجود دارند به طوری که $M = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. حال با توجه به اینکه φ یک R-همریختی است داریم:

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \varphi(M) = \varphi\big(\langle x_1, \dots, x_n \rangle\big) = \langle \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n) \rangle.$$

لذا $\mathrm{Im}(\varphi)$ با تولید متناهی است.

(۲) چون $\mathrm{Im}(\varphi)$ و $\mathrm{Ker}(\varphi)$ با تولید متناهی هستند، لذا اعضایی مانند $\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)$ از $\mathrm{Im}(\varphi)$ و $y_1, \dots, y_t$ از $\mathrm{Ker}(\varphi)$ وجود دارند به طوری که $\mathrm{Im}(\varphi) = \langle \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n) \rangle$ و $\mathrm{Ker}(\varphi) = \langle y_1, \dots, y_t \rangle$. حال به راحتی می‌توان نشان داد که $M = \langle x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_t \rangle$. در نتیجه بنا به تعریف ۱.۱.۱، M با تولید متناهی است. □

نتیجه ۱.۱.۱. فرض کنید M یک R-مدول و N زیرمدولی از M باشد. در این صورت

۱) اگر M با تولید متناهی باشد، آنگاه $\frac{M}{N}$ نیز با تولید متناهی است.

۲) اگر $\frac{M}{N}$ و N با تولید متناهی باشند، آنگاه M نیز با تولید متناهی است.

اثبات. با در نظر گرفتن R-همریختی طبیعی پوشای $\pi : M \longrightarrow \frac{M}{N}$ و قضیه‌ی قبلی اثبات واضح است. □

تعریف ۲.۱.۱. ایده‌آل P از حلقه‌ی جابجایی R را ایده‌آل اول می‌نامیم هرگاه $P \subsetneq R$ و به ازای هر $x, y \in R$ به طوری که $xy \in P$ باشد، داشته باشیم $x \in P$ یا $y \in P$.

مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های اول حلقه‌ی R را با نماد $\mathrm{Spec}(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید I ایده‌آلی از R باشد. رادیکال[۱] I را با نماد $\sqrt{I}$ نشان می‌دهیم و به

[۱] Radical

صورت $\sqrt{I} = \{r \in R : \exists n \in \mathbb{N};\ r^n \in I\}$ تعریف می‌کنیم.

خواص رادیکال: فرض کنید I و J دو ایده‌آل دلخواه از R باشند.

۱) $I \subseteq \sqrt{I}$.

۲) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

۳) $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \sqrt{IJ}$.

۴) $\sqrt{I + J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$.

۵) اگر $\mathfrak{p}$ اول باشد، آنگاه به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $\sqrt{\mathfrak{p}^n} = \mathfrak{p}$.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید I ایده‌آلی از R باشد. واریته‌ی[1] I را با نماد $\mathrm{V}(I)$ نشان می‌دهیم و به صورت $\mathrm{V}(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) : I \subseteq \mathfrak{p}\}$ تعریف می‌کنیم.

خواص واریته: فرض کنید I و J دو ایده‌آل دلخواه از R باشند.

۱) $\mathrm{V}(I \cap J) = \mathrm{V}(IJ) = \mathrm{V}(I) \cup \mathrm{V}(J)$.

۲) $\mathrm{V}(\circ) = \mathrm{Spec}(R)$ و $\mathrm{V}(R) = \emptyset$.

۳) $\mathrm{V}(\sqrt{I}) = \mathrm{V}(I)$.

قضیه ۲.۱.۱. (قضیه‌ی اجتناب از ایده‌آل اول)[2] فرض کنید $P_1, \ldots, P_n$ ایده‌آل‌هایی از حلقه‌ی R باشند که حداکثر دو تا از آن‌ها اول نباشند. اگر I ایده‌آل دیگری از R باشد به طوری که $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i$، در این صورت iای، $1 \leq i \leq n$، وجود دارد که $I \subseteq P_i$.

اثبات. به (Huneke, 2012: 10) رجوع شود. □

[1] Variety
[2] Prime Avoidance Proposition Theorem

قضیه‌ی اجتناب از ایده‌آل اول صورت دیگری هم دارد که بسیار مفید است.

قضیه ۳.۱.۱. (قضیه‌ی اجتناب از ایده‌آل اول) فرض کنید $P_1, \dots, P_n$ ایده‌آل‌های اولی از حلقه‌ی R باشند. همچنین فرض کنید $x \in R$ و I ایده‌آلی از R باشد و به ازای هر i، $1 \le i \le n$،

$$\{rx + y : r \in R,\ y \in I\} = \langle x \rangle + I \nsubseteq P_i \cdot$$

در این صورت $y \in I$ وجود دارد به طوری که $x + y \notin \bigcup_{i=1}^{n} P_i$.

اثبات. به (Huneke, 2012: 10) رجوع شود. □

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید M یک R-مدول باشد. پوچساز [1] M را با نماد $\mathrm{Ann}_R(M)$ نشان می‌دهیم و به صورت $\mathrm{Ann}_R(M) = \{r \in R : rx = 0, \forall x \in M\}$ تعریف می‌کنیم.

همچنین، پوچساز هر عضو $x \in M$ را با نماد $(0 \underset{R}{:} x)$ نشان می‌دهیم و به صورت

$$(0 \underset{R}{:} x) = \{r \in R : rx = 0\}$$

تعریف می‌کنیم.

تبصره ۱.۱.۱. فرض کنید M و N دو R-مدول دلخواه باشند.

۱) $\mathrm{Ann}_R(M + N) = \mathrm{Ann}_R(M) \cap \mathrm{Ann}_R(N)$.

۲) اگر M با تولید متناهی و $M = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ باشد، آنگاه

$$\mathrm{Ann}_R(M) = (0 \underset{R}{:} x_1) \cap \dots \cap (0 \underset{R}{:} x_n).$$

[1] Annihilator

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید $\mathfrak{m}$ ایده‌آلی از R باشد. $\mathfrak{m}$ را ماکسیمال می‌نامیم هرگاه $\mathfrak{m} \subsetneq R$ و ایده‌آلی چون $\mathfrak{q}$ موجود نباشد به طوری که $\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq R$.

مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال R را با نماد $\mathrm{Max}(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۷.۱.۱. حلقه‌ی R که فقط یک ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد را حلقه‌ی موضعی[۱] می‌نامیم. اگر $\mathfrak{m}$ تنها ایده‌آل ماکسیمال R باشد، این حلقه را با نماد $(R, \mathfrak{m})$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۸.۱.۱. ایده‌آل $\mathfrak{q}$ از حلقه‌ی R را اولیه می‌نامند هرگاه

۱. $\mathfrak{q} \neq R$

۲. به ازای هر $x, y \in R$ اگر $xy \in \mathfrak{q}$ آنگاه $x \in \mathfrak{q}$ یا $y \in \sqrt{\mathfrak{q}}$.

مثال ۲.۱.۱. هر ایده‌آل اول یک ایده‌آل اولیه است.

تبصره ۲.۱.۱. اگر ایده‌آل $\mathfrak{q}$ یک ایده‌آل اولیه R باشد، آنگاه $\sqrt{\mathfrak{q}}$ یک ایده‌آل اول R است. اگر فرض کنیم $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}$ در اینصورت $\mathfrak{q}$ را یک ایده‌آل $\mathfrak{p}-$ اولیه می‌نامند.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اولی از R و M یک R-مدول باشد. $\mathfrak{p}$ را ایده‌آل اول وابسته‌ی[۲] M می‌نامیم هرگاه عضو غیرصفری از M مانند x موجود باشد به طوری که

$$\mathfrak{p} = (0 \underset{R}{:} x).$$

مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های اول وابسته‌ی M را با نماد $\mathrm{Ass}_R(M)$ نشان می‌دهیم.

[۱] Local ring
[۲] Associated prime ideal

نتیجه ۲.۱.۱. فرض کنید M یک R-مدول باشد. در این صورت M غیرصفر است اگر و فقط اگر $\mathrm{Ass}_R(M)$ ناتهی باشد.

اثبات. می‌دانیم که اعضای $\mathrm{Ass}_R(M)$ ایده‌آل‌های اولی مانند $\mathfrak{p}$ هستند که عضوی مانند $x \in M$ با شرط $\mathfrak{p} = (0 \underset{R}{:} x)$ وجود داشته باشد. پس اگر $\mathrm{Ass}_R(M)$ ناتهی باشد بنا به آنچه گفته شد، نتیجه می‌گیریم M غیرصفر است.

برعکس، فرض کنید $\Sigma = \{(0 \underset{R}{:} x) : 0 \neq x \in M\}$. اولاً $R \notin \Sigma$ زیرا $M \neq 0$. چون R نوتری است، لذا Σ عضو ماکسیمالی مانند $(0 \underset{R}{:} x_0)$ دارد. نشان می‌دهیم که $(0 \underset{R}{:} x_0)$ ایده‌آل اولی از R است. اگر $ab \in (0 \underset{R}{:} x_0)$ و $a \notin (0 \underset{R}{:} x_0)$، آنگاه $ax_0 \neq 0$. اما،

$$(0 \underset{R}{:} x_0) \subseteq (0 \underset{R}{:} ax_0)$$

می‌باشد. پس با توجه به ماکسیمال بودن $(0 \underset{R}{:} x_0)$، داریم $(0 \underset{R}{:} ax_0) = (0 \underset{R}{:} x_0)$. چون $abx_0 = 0$، لذا $b \in (0 \underset{R}{:} ax_0)$، بنابراین $b \in (0 \underset{R}{:} x_0)$. لذا $(0 \underset{R}{:} x_0)$ ایده‌آل اولی از R است. در نتیجه $\mathrm{Ass}_R(M) \neq \emptyset$. □

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنید M یک R-مدول و $r \in R$ باشد. r را مقسوم علیه صفر برای M می‌نامیم هرگاه عضوی غیرصفر از M مانند x موجود باشد به طوری که $rx = 0$.

مجموعه‌ی تمام مقسوم علیه‌های صفر برای M را با نماد $Z_R(M)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۴.۱.۱. فرض کنید M یک R-مدول باشد. در این صورت $Z_R(M) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)} \mathfrak{p}$.

اثبات. فرض کنید $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)$. لذا عضو غیرصفری از M مانند x وجود دارد به طوری که $\mathfrak{p} = (0 \underset{R}{:} x)$. چون x غیرصفر است، لذا هر عضو $\mathfrak{p}$ مقسوم علیه صفر برای M است.

برعکس، فرض کنید $a \in Z_R(M)$. در این صورت عضو غیرصفری از M مانند x موجود است که $ax = \circ$. حال، چون $Rx \neq \circ$، لذا ایده‌آل اولی مانند $\mathfrak{p}$ از R و $r \in R$ چنان موجود است که $\mathfrak{p} = (\circ :_R rx)$. در نتیجه $a \in \mathfrak{p} \subseteq \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)} \mathfrak{p}$. پس $Z_R(M) \subseteq \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)} \mathfrak{p}$. □

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید S یک زیرمجموعه از R باشد. S را بسته‌ی ضربی[۱] می‌نامیم هرگاه

۱) $S \ni ۱$ و $\circ \notin S$؛

۲) به ازای هر $s_۱, s_۲ \in S$ داشته باشیم $s_۱ s_۲ \in S$.

مثال ۳.۱.۱. به ازای هر ایده‌آل اول از R مانند $\mathfrak{p}$، $S = R \backslash \mathfrak{p}$ یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R است.

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنید S یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R باشد. رابطه‌ی $\sim$ را روی حاصل‌ضرب دکارتی $R \times S$ به ازای هر $(x,s),(y,t) \in R \times S$ به صورت

$$(x,s) \sim (y,t) \Longleftrightarrow \exists u \in S : u(xt - ys) = \circ$$

تعریف می‌کنیم.

به آسانی می‌توان نشان داد که $\sim$ یک رابطه‌ای هم‌ارزی روی $R \times S$ است.

کلاس هم‌ارزی عنصر (x,s) را با نماد $\frac{x}{s}$ و مجموعه‌ی تمام کلاس‌های هم‌ارزی را با نماد $S^{-۱}R$ نشان می‌دهیم. عمل جمع و ضرب در $S^{-۱}R$ را به ازای هر $x,y \in R$ و $s,t \in S$، به صورت $\frac{x}{s} + \frac{y}{t} = \frac{xt+ys}{st}$ و $\frac{x}{s}\frac{y}{t} = \frac{xy}{st}$ تعریف می‌کنیم.

[۱] Multiplicatively Closed Subset