وزارت علوم تحقیقات و فناوری

دانشگاه بجنورد

انواع فیلترها در مشبکه های باقیمانده

نگارش :

فهیمه علیدادیان

استاد راهنما:

دکتر محمود بخشی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض

بهمن ۱۳۹۰

تقدیم به پدر و مادر عزیزم و

تقدیم به امام شهدا، خمینی کبیر (ره) و شهدای هشت سال دفاع مقدس

قدردانی

با حمد و سپاس بیکران به درگاه خداوند متعال که این بنده کوچک را سعادت تلاش و کوشش در راه کسب علم و دانش عطا فرمود. باشد که با یاری از حضرتش آنچه را که فراگرفته ام در راه رضای او و خیر و صلاح جامعه بکار گیرم. حال که با عنایت پروردگار سبحان این پایان نامه به اتمام رسیده است، وظیفه خود می دانم از استاد گرانقدر و بزرگوار جناب آقای دکتر محمود بخشی که در طول مدت تحصیل در این دانشگاه و بالاخص در مدت انجام پایان نامه نه تنها از تواضع علمی و راهنمائیهای بی شائبه ایشان بهره مند بوده ام، بلکه با فروتنی و بزرگواری آنطور که شایسته یک معلم واقعی است نقایص این حقیر را مورد اغماض قرار داده، قدردانی نمایم و از خداوند متعال آرزوی طول عمر با عزت و توفیق روزافزون برای ایشان مسئلت نمایم. همچنین از اساتید گرانقدر آقایان دکتر دهقان و دکتر برومند که زحمت داوری این پایان نامه را بر خود هموار نموده اند و همچنین از زحمات سرکار خانم دکتر سمیه محمدزاده نهایت تشکر خود را ابراز نمایم.

فهیمه علیدادیان

بهمن ۱۳۹۰

چکیده

هدف از این پایان نامه، مطالعه فیلترها در مشبکه های باقیمانده می باشد. ابتدا مشبکه باقیمانده را تعریف و آن را معرفی می نماییم. در فصل دوم بعد از معرفی فیلتر و بیان تعریفی معادل برای آن، انواع فیلترها از جمله فیلتر نرمال، فیلتر اول و انواع آن، فیلتر بولی و انواع آن، فیلتر استلزامی، فیلتر استلزمی مثبت، فیلتر برگشتی، فیلتر شبه متمم گیری، و خاصیت ها و رابطه بین آن ها بررسی می شود. در انتها به بررسی فضای توپولوژی بر روی فیلترهای اول از نوع ۲ می پردازیم.

در فصل سوم فیلتر فازی و بعضی از انواع آن را تعریف کرده رابطه بین آن ها را بررسی می نماییم. در ادامه فضای توپولوژی بر روی فیلترهای فازی اول را بدست می آوریم و نشان می دهیم اگر فضا جبر بولی باشد، فضای توپولوژی تعریف شده، فضای هاسدورف است. در انتها همیمورفیسمی بین فیلترهای اول از نوع ۲ و فیلترهای فازی اول ایجاد می نماییم و نتیجه می گیریم اگر فضا جبر بولی باشد فضای توپولوژی فیلترهای فازی اول از نوع ۲ هم هاسدورف است.

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیشنیازها

مقدمه

مشبکه باقیمانده توسط وارد[۱] و دیلورث[۲] مطرح شد. کلی ترین ساختار در بین ساختار های مربوط به دستگاه های منطقی است. به عنوان دو مثال از مشبکه باقیمانده می توان به MV-جبرها که توسط چانگ[۳] مطرح شد و BL-جبرها که توسط هایک[۴] مطرح شد، اشاره نمود. MV-جبرها با BCK-جبرهای تعویض پذیر و کراندار معادل هستند.

در سال ۲۰۰۲ چانک[5] و جرجسکیو[6] MV-جبرها را در حالت تعویض ناپذیر بررسی نمودند و آن را شبه MV-جبر نامیدند. پس از آن دو، دی نلا[۷][۸,۷] مفهوم شبه BL-جبرها را مطرح نمود.

ایزکی[۸] و تاناکا[۹] مفهوم ایده آل های استلزامی را در BCK-جبرها معرفی کردند. پس از آن دو هو[۱۰] و سه سا[۱۱] به بررسی نظریه ایده آل های بولی در MV-جبرها پرداختند و توانستند ثابت کنند ایده آل های استلزامی با ایده آل های بولی در MV-جبرها معادل هستند. مفهوم فیلترها و انواع آن از جمله فیلترهای بولی، فیلترهای استلزامی و فیلترهای استلزامی مثبت توسط لیو[۱۲]، لی[۱۳]، جرجسکیو و لئوستی[۱۴] مطرح شد. ترونن[15] توانست به بررسی نظریه فیلترهای استلزامی و فیلترهای بولی در BL-جبرها بپردازد و ثابت کند فیلترهای استلزامی و فیلترهای بولی در BL-جبرها معادل اند. فیلترهای بولی از نوع ۲، در میان دیگر فیلترها نقش بسزایی دارند زیرا از آن ها می توان جبرهای خارج قسمتی، که به آن جبر بولی گفته می شود را نتیجه گرفت. بنابراین به دلیل اهمیت آن، جرجسکیو و لئوستی نظریه فیلتر های بولی را در شبه BL-جبرها مطرح نموداند. لیو و لی توانستند ثابت کنند فیلتر های بولی و فیلترهای استلزامی مثبت در MV-جبرها معادل اند.

---

[۱] Ward
[۲] Dilworth
[۳] Chang
[٤] Hajek
[٥] Rachunek
[٦] Georgescu
[۷] Di Nola
[۸] Iseki
[۹] Tanaka
[۱۰] Hoo
[۱۱] Sessa
[۱۲] Liu
[۱۳] Li
[۱٤] Leustean
[۱٥] Turunen

زاده[۱۶] مفهوم مجموعه های فازی را معرفی نمود و بسیاری از پژوهشگران درساختارهایی چون گروه و حلقه آن را بکار بردند. در ادامه لیو و لی توانستند نظریه مجموعه های فازی را در BL-جبرها بررسی نموده و مفهوم فیلترهای فازی و فیلترهای اول فازی و انواع آن را در BL-جبرها معرفی نمایند.

در این پایان نامه در فصل ۱ ابتدا به معرفی مشبکه باقیمانده و بعضی رده های خاص مشبکه باقیمانده پرداخته ایم . در فصل ۲ به معرفی انواع فیلترها از جمله فیلتر نرمال، فیلتر اول و انواع آن، فیلتر بولی و انواع آن، فیلتر استلزامی، فیلتر استلزامی مثبت، فیلتر برگشتی و فیلتر شبه متمم گیری می پردازیم و تعاریفی معادل برای آن ها ارائه می دهیم و ثابت می کنیم فیلتر بولی از نوع ۲ با فیلتر استلزامی مثبت معادل است و هر فیلتر بولی از نوع ۲ یک فیلتر استلزامی مثبت است و شرطی برای آنکه عکس آن درست باشد ارائه می دهیم . به کمک فیلتر بولی از نوع ۲ جبر بولی بدست می آوریم. و در انتهای فصل فضای توپولوژی بر روی فیلتر های اول از نوع ۲ را بدست می آوریم.

در فصل ۳ به معرفی فیلترهای فازی و برخی از انواع آن مانند فیلترهای نرمال فازی، فیلترهای اول فازی و انواع آن، فیلترهای بولی فازی و انواع آن و فیلترهای فازی اول پرداخته و روابط میان آنها را بررسی می کنیم و بر روی فیلترهای فازی اول فضای توپولوژی را ایجاد می نماییم و ثابت می کنیم اگر فضا جبر بولی باشد این فضای توپولوژیک هاسدورف است. همچنین یک همیمورفیسم بین فضای فیلترهای اول از نوع ۲ و فضای فیلترهای فازی اول بوجود آورده و نتیجه می گیریم فضای توپولوژی فیلترهای اول فازی از نوع ۲ هاسدورف است.

۱-۱ مشبکه باقیمانده

تعریف ۱-۱-۱: دو عضو a و b در مجموعه ی مرتب جزئی $(L;\leq)$ داده شده، عضو u متعلق به L را کران پایین از b و a می نامیم اگر $u\leq a$ و $u\leq b$. و عضو u را **بزرگترین کران پایین** از b و a می نامیم اگر ۱- u کران پایین از b و a باشد، ۲- برای هر کران پایین v از b و a داشته باشیم $v\leq u$. عضو u متعلق به L را کران بالا از b و a

می نامیم اگر $a\leq u$ و $b\leq u$. و عضو u را **کوچکترین کران بالا** از b و a می نامیم، اگر ۱- u کران بالا از b و a باشد، ۲- برای هر کران بالا v از b و a داشته باشیم $u\leq v$.

تعریف ۱-۱-۲ : مجموعه ی مرتب جزئی $(L;\leq)$ نیم مشبکه پایین نامیده می شود، اگر هر دو عضو از L دارای بزرگترین کران پایین باشد. $(L;\leq)$ را نیم مشبکه بالا می نامیم، هر گاه هر دو عضو از L دارای کوچکترین کران بالا باشد. اگر $(L;\leq)$ هم نیم مشبکه بالا و هم نیم مشبکه پایین باشد آن را **مشبکه** می نامیم.

[۱۶] Zadeh

یک جبر $(L;\wedge,\vee)$ از نوع (۲,۲) را مشبکه می نامیم، اگر برای هر $a,b \in L$ در شرایط زیر صدق کند:

L_1) قانون خودتوانی: $a \wedge a = a$ و $a \vee a = a$،

L_2) قانون تعویض پذیری: $a \vee b = b \vee a$ و $a \wedge b = b \wedge a$،

L_3) قانون شرکت پذیری: $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ و $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$،

L_4) قانون جذب: $a \wedge (a \vee b) = a$ و $a \vee (a \wedge b) = a$.

تعریف ۱-۱-۳ : (انواع مشبکه)

الف) مشبکه L را **مدولی** می نامیم، اگر در قانون مدولی صدق کند. یعنی

اگر $a \geq b$ نتیجه دهد $a \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge c)$، یا به طور معادل

اگر $a \leq b$ نتیجه دهد $a \vee (b \wedge c) = b \wedge (a \vee c)$.

ب) مشبکه L را **توزیع پذیر** می نامیم، اگر در قانون توزیع پذیری صدق کند. یعنی

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ یا به طور معادل
$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

ج) مشبکه L (با عنصر 0 و عنصر ۱) را **متمم دار**می نامیم، اگر هر $a \in L$ دارای عضو متمم باشد. یعنی برای هر $a \in L$، عضو $b \in L$ وجود داشته باشد به طوری که $a \wedge b = 0$ و $a \vee b = 1$.

د) اگر یک مشبکه هم متمم و هم توزیع پذیر باشد آن را **جبر بولی** یا **مشبکه بولی** می نامیم.

ر) مشبکه ای را که دارای بزرگترین و کوچکترین عضو باشد **مشبکه کراندار** می نامیم.

تعریف ۱-۱-۴: یک **مشبکه باقیمانده** ساختاری است چون $L = (L,\vee,\wedge,\odot,\rightarrow,\rightsquigarrow,0,1)$ از نوع (۲,۲,۲,۲,۲,0,0) که در شرایط زیر صدق می کند:

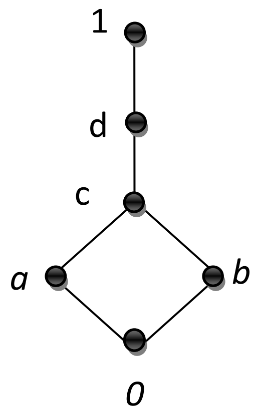
(RL۱ $(L,\vee,\wedge,0,1)$ یک مشبکه کراندار است،

(RL۲ $(L,\odot,1)$ یک تکواراست بدین معنی که $\odot$ شرکت پذیر است و $x \odot 1 = 1 \odot x = x$،

(RL۳ $x \odot y \leq z$ اگر و تنها اگر $x \leq y \rightarrow z$ اگر و تنها اگر $y \leq x \rightsquigarrow z$.

مثال زیر نشان می دهد مشبکه های کراندار وجود دارند.

مثال۱-۱-۵: فرض کنید $L = \{0, a, b, c, d, 1\}$ مشبکه کراندار با نمودار هاسه زیر باشد(شکل ۱-۱) و نیز فرض کنید عمل های $\rightsquigarrow, \rightarrow, \odot$ روی L مطابق جدول های ۱-۱، ۱-۲ و۱-۳ تعریف شوند. با محاسبات ساده مشخص می شود $(L,\vee,\wedge,\odot,\rightarrow,\rightsquigarrow,0,1)$ یک مشبکه باقیمانده است.



شکل ۱-۱

	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	a	a
b	0	0	0	0	b	b
c	0	0	0	0	c	c
d	0	0	0	0	d	d
1	0	a	b	c	d	d

جدول ۱-۱

	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	d	1	d	1	1	1
b	d	d	1	1	1	1
c	d	d	d	1	1	1
d	0	a	b	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1

جدول ۱-۲

	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	c	1	c	1	1	1
b	c	c	1	1	1	1
c	c	c	c	1	1	1
d	c	c	c	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1

جدول ۱-۳

تعریف۱-۱-۶: (بعضی رده های خاص مشبکه باقیمانده)

الف) مشبکه باقیمانده L را یک **شبه $\mathbf{MTL}$-جبر** می نامیم، اگر برای هر $x, y \in L$ در شرط زیر صدق کند:

$$(x \to y) \vee (y \to x) = 1 = (x \rightsquigarrow y) \vee (y \rightsquigarrow x)$$

ب)یک **شبه$\mathbf{BL}$-جبر** ساختاری است چون $(A, \vee, \wedge, \odot, \to, \rightsquigarrow, 0,1)$ از نوع (۲,۲,۲,۲,۲,$0,0$)،که برای هر $x, y, z \in A$ در شرایط زیر صدق می کند:

A1) $(A, \vee, \wedge, 0,1)$ یک مشبکه کراندار است،

A2) $(A, \odot, 1)$ یک تکوار است، بدین معنی که $\odot$ شرکت پذیر است و $x \odot 1 = 1 \odot x = x$،

A3) $x \odot y \leq z$ اگر و تنها اگر $x \leq y \to z$ اگر و تنها اگر $y \leq x \rightsquigarrow z$،

A4) $x \wedge y = (x \to y) \odot x = x \odot (x \rightsquigarrow y)$،

A5) $(x \to y) \vee (y \to x) = (x \rightsquigarrow y) \vee (y \rightsquigarrow x) = 1$.

یک شبهBL-جبر، یک شبهMTL-جبر است که در شرط $x \wedge y = (x \to y) \odot x = x \odot (x \rightsquigarrow y)$ صدق کند.

گزاره ۱-۱-۷: [۷] *در هر شبه BL-جبر موارد زیر برقرارند:*

۱) $x \odot (x \rightsquigarrow y) \leq y \leq x \rightsquigarrow (x \odot y)$ و $x \odot (x \rightsquigarrow y) \leq x \leq y \rightsquigarrow (y \odot x)$،

۲) $(x \to y) \odot x \leq x \leq y \to (x \odot y)$ و $(x \to y) \odot x \leq y \leq x \to (y \odot x)$،

۳) $x \rightsquigarrow y \leq (z \odot x) \rightsquigarrow (z \odot y)$،

۴) $x \to y \leq (x \odot z) \to (y \odot z)$،

۵) اگر $x \leq y$ آنگاه $x \leq z \rightsquigarrow y$ و $x \leq z \to y$، ۶) $(z\odot x) \rightsquigarrow y \leq x\odot(z \rightsquigarrow y)$ و $(x\odot z) \to y \leq (z \to y)\odot x$.

۷) $0 = 0\odot x = x\odot 0$.

برای هر $x \in L$ تعریف می کنیم $0 \to x = x\neg$ $\quad$ $0 \rightsquigarrow x = x\sim$

پ) یک **شبهMV-جبر** ساختاری است چون $(A,\oplus,\neg,\sim,0,1)$ که در اصول موضوعه زیر صدق کند.

A1) $x\oplus(y\oplus z) = (x\oplus y)\oplus z$.

A2) $x \oplus 0 = 0 \oplus x = x$.

A3) $x \oplus 1 = 1 \oplus x = 1$.

A4) $\sim 1 = 0$, $\neg 1 = 0$،

A5) $\sim(\neg x \oplus \neg y) = \neg(\sim x \oplus \sim y)$،

A6) $x\oplus(\sim x\odot y) = y\oplus(\sim y\odot x) = (x\odot\neg y)\oplus y = (y\odot\neg x)\oplus y$.

A7) $x\odot(\neg x \oplus y) = (x \oplus \sim y) \odot y$.

A8) $\sim(\neg x) = x$.

که در آن $y\odot x = \sim(\neg x\oplus\neg y)$.

یک شبه MV-جبر، یک شبه BL-جبر است که در شرط $x = \neg\sim x = \sim\neg x$ صدق می کند.

گزاره ۱-۱-۸ :[۱۳] *در هرشبه MV-جبر موارد زیر برقرارند:*

۱) $y\odot x = \neg(\sim x\oplus \sim y)$،

۲) $\neg(\sim x) = x$،

۳) $\sim 0 = \neg 0 = 1$،

۴) $x\odot 0 = 0\odot x = 0$.

۵) $x\oplus \sim x = 1$, $\neg x\oplus x = 1$،

۶) $x\odot\neg x = 0$, $\sim x\odot x = 0$،

۷) $\neg(x\oplus y) = \neg y\odot\neg x$, $\sim(x\oplus y) = \sim y\odot \sim x$،

۸) $\neg(x\odot y) = \neg y\oplus\neg x$, $\sim(x\odot y) = \sim y\oplus \sim x$،

۹) $x\oplus y = \sim(\neg y\odot\neg x) = \neg(\sim y\odot \sim x)$.

نتیجه۱-۱-۹: شبه MTL-جبر، شبه BL-جبر و شبه MV-جبر رده های سره از مشبکه باقیمانده هستند.

قرارداد: از این پس در این پایان نامه فرض می کنیم L مشبکه باقیمانده باشد مگر اینکه خلاف آن ذکر شود.

لم۱-۱-۱۰: [۲۱,۳,۱] در هر مشبکه باقیمانده خواص زیر برقرارند:

۱) $x \to x = x \rightsquigarrow x = 1$،
۲) $1 \to x = 1 \rightsquigarrow x = 1$،
۳) $y \odot x \leq x \wedge y$، $x \odot y \leq x \wedge y$،
۴) $x \to (y \rightsquigarrow z) = y \rightsquigarrow (x \to z)$،
۵) $x \odot (x \rightsquigarrow y) \leq x \wedge y$،
۶) $(x \to y) \odot x \leq x \wedge y$،
۷) اگر $x \leq y$ آنگاه $z \odot x \leq z \odot y$, $x \odot z \leq y \odot z$،
۸) $x \leq y$ اگر و تنها اگر $x \to y = 1$ اگر و تنها اگر $x \rightsquigarrow y = 1$ ،
۹) $y \to z \leq (x \to y) \to (x \to z)$ ،
۱۰) $y \rightsquigarrow z \leq (x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow (x \rightsquigarrow z)$،
۱۱) $y \to z \leq (z \to x) \rightsquigarrow (y \to x)$،
۱۲) $y \rightsquigarrow z \leq (z \rightsquigarrow x) \to (y \rightsquigarrow x)$،
۱۳) $(x \odot y) \rightsquigarrow z = y \rightsquigarrow (x \rightsquigarrow z)$ ،
۱۴) $(x \odot y) \to z = x \to (y \to z)$،
۱۵) $x \odot (y \vee z) = (x \odot y) \vee (x \odot z)$،
۱۶) $(y \vee z) \odot x = (y \odot x) \vee (z \odot x)$،
۱۷) $x \odot (y \wedge z) \leq (x \odot y) \wedge (x \odot z)$،
۱۸) $(y \wedge z) \odot x \leq (y \odot x) \wedge (z \odot x)$،
۱۹) $(x \vee y) \to z = (x \to z) \wedge (y \to z)$ ،
۲۰) $(x \vee y) \rightsquigarrow z = (x \rightsquigarrow z) \wedge (y \rightsquigarrow z)$،
۲۱) $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$،
۲۲) $x \rightsquigarrow (y \wedge z) = (x \rightsquigarrow y) \wedge (x \rightsquigarrow z)$،
۲۳) اگر $x \leq y$ آنگاه $z \rightsquigarrow x \leq z \rightsquigarrow y$, $z \to x \leq z \to y$،
۲۴) اگر $x \leq y$ آنگاه $y \rightsquigarrow z \leq x \rightsquigarrow z$, $y \to z \leq x \to z$،
۲۵) $x \leq \sim \neg x$, $x \leq \neg \sim x$،

۲۶) $\neg x = \neg\sim\neg x = \sim x \neg\sim\neg\sim$،

۲۷) $z \rightsquigarrow x \leq (z \rightsquigarrow y)\odot(y \rightsquigarrow x)$،

۲۸) $z \to x \leq (y \to x)\odot(z \to y)$،

۲۹) $(y\odot z) \to (x\odot z) \leq y \to x$،

۳۰) $(z\odot y) \rightsquigarrow (z\odot x) \leq y \rightsquigarrow x$،

۳۱) $[(x \rightsquigarrow (y \to x))] \wedge [(y \rightsquigarrow (x \to y))] \leq y \vee x$،

۳۲) $[(x \to (y \rightsquigarrow x))] \wedge [y \to (x \rightsquigarrow y)] \leq y \vee x$

۱-۲ توپولوژی

در این بخش توپولوژی طیفی L را معرفی می کنیم. ابتدا بعضی تعریف ها و نتایج مقدماتی از را بیان می کنیم. برای جزئیات بیشتر به [۲۶] مراجعه نمایید.

فرض کنید X مجموعه ای نا تهی باشد. مجموعه τ متشکل از زیر مجموعه های X را یک **توپولوژی** روی X می نامیم اگر شرایط زیر برقرار باشد:

- $\emptyset$ ،$X \in \tau$
- τ نسبت به اشتراک متناهی بسته باشد.
- τ نسبت به اجتماع دلخواه بسته باشد.

زوج(X,τ) یک فضای توپولوژی نامیده می شود که به اختصار آنرا با X نمایش می دهیم. عناصر توپولوژی را مجموعه های باز X می نامیم .

فرض کنید (X,τ_X) فضای توپولوژی و Y زیر مجموعه ای از X باشد. در اینصورت

$\tau_Y = \{Y \cap U | U \in \tau_X\}$ یک توپولوژی روی Y است که آن را **توپولوژی زیرفضایی** می نامیم.

یک مجموعه $\mathcal{B}$ متشکل از زیر مجموعه های X پایه ای برای توپولوژی τ روی X نامیده می شود اگر

- برای هر $x \in X$ عنصر $B \in \mathcal{B}$ وجود داشته باشد به طوری که $x \in B$.
- اگر $x \in B_1 \cap B_2$ به طوری که $B_2,B_1 \in \tau$، در این صورت وجود دارد $B_3 \in \tau$ به طوری که $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

لم ۱-۲-۱ : *فرض کنید X فضای توپولوژی و C مجموعه ای از مجموعه های باز X باشد به طوری که برای هر مجموعه باز U از X و هر $x \in U$ ، وجود داشته باشد $A \in C$ به طوری که $x \in A \subseteq U$. در این صورت C پایه ای برای توپولوژی روی X است.*

تعریف ۱-۲-۲: فضای توپولوژی X **فضای T_0** نامیده می شود، اگر برای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$، مجموعه بازی در X وجود داشته باشد که شامل x یا y بوده اما شامل هر دوی آنها نباشد.

تعریف ۱-۲-۳: فضای توپولوژی (X, τ) فضای هاسدورف نامیده می شود اگر برای هر $x, y \in X$ و $x \neq y$، مجموعه های باز V و U در X وجود داشته باشد به طوری که $x \in U$ ، $y \in V$ و $U \cap V = \emptyset$.

فصل ۲

انواع فیلترها

در این فصل، تعریف انواع فیلترها از جمله فیلتر نرمال، فیلتر اول و انواع آن، فیلترهای بولی و انواع آن، فیلتر استلزامی، فیلتر استلزامی مثبت، فیلتر پیچشی و فیلتر شبه متمم دار بیان شده است. خاصیت ها و روابط بین آن ها بررسی می شود و در انتها به بررسی فضای توپولوژی بر روی فیلترهای اول از نوع ۲ پرداخته می شود..

۲-۱ فیلترهای نرمال و همنهشتی

تعریف ۲-۱-۱: *زیرمجموعه ناتهی F از L یک* **فیلتر** *نامیده می شود، اگر در شرایط زیر صدق کند:*

(F۱) اگر $y, x \in \mathrm{F}$، آنگاه $x \odot y \in F$،

(F۲) اگر $x \leq y$ و $x \in F$ آنگاه $y \in F$.

تذکر: اگر $F \neq L$، F فیلتر سره می نامیم.

مثال۲-۱-۲: بوضوح $\{1\}$ و L فیلترهایی از L هستند.

همچنین در مثال ۱-۱-۵، $\{1, d\}$ یک فیلتر از Lاست.

قضیه۲-۱-۳: *فرض کنید F زیرمجموعه ای ناتهی از L باشد. در اینصورت F فیلتر است اگروتنها اگر شرایط زیر برقرار باشند:*

(F۳) $1 \in F$, $x \to y \in F$ و $x \in F$ *نتیجه دهند* $y \in F$،

(F۳́) $1 \in F$,$x \rightsquigarrow y \in F$ و $x \in F$ *نتیجه دهند* $y \in F$.

برهان. $\Leftarrow$) فرض کنیم F یک فیلتر بوده، $x \in F$ و $x \to y \in F$ بازای $x, y \in L$. دراین صورت $(x \to y)\odot x \in F$ و از آنجا که $(x \to y)\odot x \leq x \wedge y \leq y$داریم $y \in F$ و لذا (F۳) برقرار است. اگر $x \in F$ و $x \rightsquigarrow y \in \mathrm{F}$ داریم $x\odot(x \rightsquigarrow y) \in F$. از آنجا که $x\odot(x \rightsquigarrow y) \leq x \wedge y \leq y$ داریم $y \in F$ و لذا (F۳́) برقرار است.

$\Longrightarrow$) بسادگی انجام می شود.

قضیه۲-۱-۴: *فرض کنید F زیر مجموعه ای ناتهی از L باشد. دراینصورت F فیلتری از Lاست اگر و تنها اگر برای هر $x, y, z \in L$، اگر $x, y \in F$ و $x \odot y \leq z$ آنگاه $z \in F$.*

برهان: $\Leftarrow$ مستقیما نتیجه می شود.

$\Rightarrow$ فرض کنیم F در شرط داده شده صدق کرده و $x, y \in F$. ازاینکه $x \odot y \leq x \odot y$ نتیجه می شود $x \odot y \in F$. حال فرض کنیم $x, y \in L$ طوری باشد که $x \leq y$ و $x \in F$.

چون $x \odot x \leq x \wedge x = x \leq y$ لذا $y \in F$. بنابراین F یک فیلتراز L است.

فرض کنید X زیرمجموعه ای ناتهی از L باشد. در اینصورت اشتراک تمام فیلترهایی از L که شامل Xاند، **فیلتر تولید شده** توسط X نامیده شده و با $\langle X \rangle$ نشان داده می شود.

قضیه ۲-۱-۵: [۶] اگر X زیر مجموعه ای ناتهی از L باشد. آنگاه

$$\langle X \rangle = \{y \in L : x_1 \odot x_2 \dots \odot x_n \leq y, \quad n \in \mathbb{N} \text{ و } x_1, x_2, \dots, x_n \in X\}$$

فیلتر L تولید شده توسط X می نامیم.

یادآوری۲-۱-۶: [۶] *در هر مشبکه باقیمانده موارد زیر برقرار است:*

۱) *اگر X یک فیلتر از L باشد، آنگاه $\langle X \rangle = X$،*
۲) *اگر $X = \{x\}$ در اینصورت $\langle x \rangle = \{y \in L : x^n \leq y, n \in \mathbb{N}\}$ که آن را فیلتر اصلی می نامیم.*

گزاره۲-۱-۷: [۶] *در هر مشبکه باقیمانده موارد زیر برقرار است:*

۱) $\langle x \vee y \rangle = \langle x \rangle \cap \langle y \rangle$،
۲) اگر $x \leq y$، آنگاه $\langle y \rangle \subseteq \langle x \rangle$،
۳) $\langle x \rangle \vee \langle y \rangle = \langle x \vee y \rangle = \langle x \odot y \rangle$،
۴) $\langle x \odot y \rangle = \langle y \odot x \rangle$،
۵) $\langle x \to y \rangle \vee \langle x \rangle = \langle x \rightsquigarrow y \rangle \vee \langle x \rangle$

تعریف۲-۱-۸: فرض کنید F فیلتری از L باشد. در اینصورت F **فیلتر نرمال** نامیده می شود اگر در شرط زیر صدق کند:

$x \rightsquigarrow y \in F$ اگر و تنها اگر $x \to y \in F$ برای هر $x, y \in L$.

مثال ۲-۱-۹: در هر مشبکه باقیمانده L، $\{1\}$ و L فیلترهای نرمال از L هستند.

مثال۲-۱-۱۰ : فرض کنید $L = \{0, a, b, c, d, e, f, g, h, 1\}$ که نمودار هاسه آن در شکل ۲-۱ نشان داده شده است و نیز فرض کنید اعمال $\odot, \to, \rightsquigarrow$ روی L طبق جدول های ۲-۱، ۲-۲ و ۲-۳