
بسم الله الرحمن الرحيم
الحمد لله رب العالمين
الرحمن الرحيم
مالك يوم الدين
اياك نعبد واياك نستعين
اهدنا الصراط المستقيم
صراط الذين انعمت عليهم غير المغضوب عليهم ولا الضالين

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه آمار

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی آمار گرایش آمار ریاضی

توزیعهای پارتوی تعمیم یافته و مشخص سازی آنها

استاد راهنما:

دکتر افشین پرورده

استاد مشاور:

دکتر مجید اسدی

پژوهشگر:

نگار سید کلالی

بهمن ماه ۱۳۸۶

شیوه نگارش پایان نامه رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه آمار

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی آمار گرایش ریاضی

خانم نگار سید کلالی

تحت عنوان

توزیع های پارتوی تعمیم یافته ومشخص سازی آنها

در تاریخ ۸۶/۱۱/۲۴ توسط هیأت داوران زیر بررسی با نمره ۱۸/۳۷ و با درجه عالی به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه دکتر افشین پرورده با مرتبه ی علمی استادیار — امضاء

۲ – استاد مشاور گروه دکتر مجید اسدی با مرتبه ی علمی دانشیار — امضاء

۲- استاد داور داخل گروه دکتر محمد حسین علامت ساز با مرتبه ی علمی استاد — امضاء

۳- استاد داور خارج از گروه دکتر علی دولتی با مرتبه ی علمی استادیار — امضاء

۸۶/۱۱/۲۴

امضای مدیر گروه

تقدیم

به پدر و مادر مهربانم که بی هیچ چشمداشتی عمر گرانبهای خود را به پای این حقیر گذاشتند. آنها که سربلندی و بالندگی امروز من مدیون فداکاریها، محبتها و زحمات شبانه روزی آنهاست.

و تقدیم

به همسرم، دوست و یاور همیشگی ام، آن سرچشمه مهر و وفا

تشکر و قدردانی

سپاس خداوند متعال را که توفیق بندگی، تحصیل علم و انجام این رساله را به من عطا فرمود. اکنون که در پرتو عنایات او موفق به انجام مراحل مختلف این رساله شده ام، بر خود لازم می دانم از تمام عزیزانی که در این امر مرا یاری داده اند سپاسگذاری نمایم.

در ابتدا از استاد ارجمند جناب آقای دکتر افشین پرورده که مسئولیت راهنمایی اینجانب را بر عهده داشته و در مراحل مختلف این پژوهش همواره از راهنماییهای ارزنده ایشان برخوردار بوده ام تشکر و قدردانی می نمایم.

از استاد گرامی جناب آقای دکتر مجید اسدی که در مقام استاد مشاور در این تحقیق مرا از راهنماییهای خود برخوردار ساختند، سپاسگذارم.

همچنین از اساتید گرانقدر جناب آقایان دکتر محمد حسین علامت ساز و دکتر علی دولتی که زحمت داوری این رساله را تقبل کردند و با انتقادات و پیشنهادات خود موجب تقویت این رساله گردیدند، تشکر و قدردانی می نمایم.

از پدر و مادر عزیزم که روشنی بخش افق زندگیم بودند و با صبر و محبت فراوان کوتاهی های مرا به دیده اغماض نگریستند، صمیمانه تشکر می کنم و دستان خسته اما گرم و پر امید آنها را می بوسم. از همسرم که همواره از گوهر محبت او بهره برده ام و در زیر چتر حمایت او به آرامش رسیده ام همچنین، از خواهر و برادر عزیزم صمیمانه تشکر می کنم.

و در پایان از تمام اساتید و دوستانی که در طول دوره تحصیل از نظرات و راهنمایی ایشان بهره برده ام، به خصوص از خانم کریمیان تشکر می کنم.

چکیده

یکی از توزیعهای مهم آماری توزیع پارتو است که نام خود را از اقتصاددان ایتالیایی ویلفردو پارتو گرفته است. توزیع پارتو به عنوان الگویی برای بسیاری از پدیده های اقتصادی-اجتماعی به کار رفته است. این توزیع در مطالعه طول عمر موجودات و مبحث قابلیت اعتماد به دلیل ویژگی های آن در این زمینه، اهمیت فراوان دارد. در این پایان نامه به بررسی و بحث جنبه های مختلف توزیع پارتوی تعمیم یافته که به اختصار با GPD نشان داده می شود، پرداخته ایم.

در ابتدا، بعضی از مشخصه های توزیع هندسی و نمایی و خاصیت بی حافظگی قوی را بسط می دهیم و با متحد ساختن آنها به نتایج اختصاصی توزیع پارتوی تعمیم یافته می رسیم. در ادامه، به مطالعه نتایج مشخصه ای توزیع پارتوی تعمیم یافته بر مبنای آماره های ترتیبی و آماره های ترتیبی تعمیم یافته، همچنین بعضی از مشخص سازیهای توزیع یکنواخت بر مبنای امید برخی توابع آماره های ترتیبی می پردازیم. سپس چندین خاصیت توزیعی و قضایای مشخص سازی توزیعهای پارتوی چند متغیره تعمیم یافته را بیان می کنیم و در نهایت، به مطالعه شش نوع توزیع زیف چند متغیره (که حالت گسسته توزیع پارتو است) و سه نوع توزیع نیمه پارتوی چند متغیره عمومی می پردازیم.

کلید واژه: آماره های ترتیبی تعمیم یافته، خاصیت بی حافظگی ضربی، توزیع پارتوی تعمیم یافته تعدیل شده، می نیمم هندسی، توزیع فلر-پارتو

فهرست مطالب

عنوان صفحه

فصل اول: تعاریف کلی

عنوان صفحه

عنوان | صفحه

فصل اول

تعاریف کلی

۱-۱ مقدمه

یکی از مهمترین مباحث آماری که امروزه به عنوان شاخه ای از علم آمار و احتمالات کاربرد فراوانی در علوم مهندسی و پزشکی دارد، مبحث قابلیت اعتماد[1] و بررسی آماری طول عمر یک موجود زنده می باشد. با توجه به کاربرد این مبحث در صنعت و سیستم های مختلف، تحلیل بقا و طول عمر یک سیستم بسیار مورد علاقه ی محققین می باشد. لذا در این فصل، ابتدا به مروری بر مفاهیم و تعاریف اساسی قابلیت اعتماد می پردازیم. توزیع های آماری از مهمترین ابزارهای اولیه ای هستند که در هر موضوع و مبحث آماری مطرح ومورد نیازند. با شناختن توزیع یک مجموعه داده، مطالعه و بررسی روی این داده ها بسیار راحت تر و منظم تر می گردد و سرعت رسیدن به اهداف مورد نیاز افزایش می یابد. یکی از توزیع های پر کاربرد در امور اقتصاد، قابلیت اعتماد و ...، توزیع پارتو می باشد. توزیع پارتو برای توضیح و تفسیر بسیاری از پدیده های اقتصادی-اجتماعی، استفاده شده است. این توزیع در مطالعه ی طول عمر موجودات و مبحث قابلیت اعتماد، به دلیل ویژگی های خاص آن در این زمینه، حائز اهمیت است. این توزیع حالتها و اشکال متفاوتی دارد. یکی از این حالات، توزیع پارتوی نوع چهارم است که آن را توزیع پارتوی تعمیم

[1] Reliability

یافته[1] می نامند و به اختصار با GPD نشان می دهند. توزیع های پارتوی تعمیم یافته نقش مهمی را در قابلیت اعتماد و دیگر شاخه های آمار بازی می‌کند. در ادامه، ابتدا به معرفی انواع توزیع های پارتوی یک متغیره پرداخته و ارتباط آنها با یکدیگر را بیان خواهیم کرد. سپس به معرفی توزیع های دو متغیره ی پارتوی معرفی شده توسط ماردیا[2] (۱۹۶۲) و آرنولد[3] (۱۹۸۷) و در نهایت، به معرفی توزیع های پارتوی چند متغیره ی تعمیم یافته[4] و توزیع های زیپف چند متغیره[5] می پردازیم.

همان طور که می دانیم، مبحث مشخص سازی یکی از جذاب ترین مباحث آمار است که در چند دهه ی اخیر توجه بسیاری از آماردانان را به خود جلب کرده است. اغلب توزیعها خواص و ویژگی های منحصر به فردی دارند که استفاده از این ویژگی ها می تواند مساله اصلی را به یک مساله ساده تر تبدیل کند. هدف از یک مساله ی مشخص سازی آن است که با استفاده از این ویژگی ها، توزیع مورد نظر را به طور کامل معین کنیم. معمولا برای اثبات هر مساله ی مشخص سازی، باید با اعمال شرایطی خانواده توزیع هایی را که دارای یک خاصیت مفروض هستند، محدود کنیم. در سالهای اخیر یک نتیجه از لائو[6] و رائو[7] (۱۹۸۲) بر روی معادله ی تابعی انتگرال کوشی که به قضیه ی لائو-رائو معروف شده است، به عنوان یک ابزار توانا در قضیه ی مشخص سازی مطرح می باشد. یک اثبات دقیق و عالی برای قضیه لائو-رائو بر اساس تبادل پذیری[8] را می توانید در الزید[9] و همکاران (۱۹۸۷) ملاحظه کنید.

در نظریه ی قابلیت اعتماد، در مطالعات طول عمر یک قطعه یا یک سیستم، مدلی انعطاف پذیر که به طور گسترده مورد استفاده قرار گرفته و می گیرد، توزیع پارتوی تعمیم یافته (GPD) می باشد. این مدل به خاطر خصوصیاتش، یک مدل انعطاف پذیر است. برای مثال یک میانگین باقیمانده عمر[10] خطی دارد. ضرایب تغییرات باقیمانده عمر آن ثابت و نرخ مخاطره[11] ی آن (HR) معکوس یک تابع خطی است. این مدل که توسط هال[12] و ولنر[13] (۱۹۸۱) معرفی

[1] Generalized Pareto Distribution
[2] Mardia, K. V.
[3] Arnold, B. C.
[4] Generalized Multivariate Pareto Distributions
[5] Multivariate Zipf Distributions
[6] Lau, K.
[7] Rao, C. R.
[8] Exchangeability
[9] Alzaid, A. A.
[10] Mean Residual Life
[11] Hazared Rate
[12] Hall, W. J.
[13] Wellner, J. A.

شده است، شامل توزیع نمایی، پارتو، توانی و یکنواخت در حالتهای خاص می باشد. اوکس[1] و داسو[2] (۱۹۹۰) یک نتیجه ی متفاوت مشخص سازی از نوع خصوصیت بی حافظگی توزیع نمایی، برای GPD ارائه کردند. اسدی[3] و همکاران (۲۰۰۱) بعضی از مشخص سازیهای عمومی خانواده GPD را بر اساس آماره های ترتیبی[4] و رکوردها[5] نتیجه گرفتند. همچنین اسدی (۲۰۰۴) بعضی از مشخص سازیهای GPD را بر مبنای خصوصیت بی حافظگی ضربی[6]، مدل مخاطرهای متناسب[7] و می نیمم یک نمونه تصادفی نتیجه گرفت. کاکس[8] (۱۹۷۲)، مفهوم مدل مخاطرهای متناسب را که نقش مهمی در قابلیت اعتماد و تحلیل بقا بازی می کند، ارائه کرد. آلن[9] (۱۹۶۳) ثابت کرد که وقتی X و Y مستقل هستند، آنگاه آنها مخاطرهای متناسب دارند، اگر و تنها اگر $Z = \min(X,Y)$ و $\delta = \mathrm{I}\{X = Y\}$ مستقل باشند که $I\{A\}$ تابع نشانگر A است. اوکس و داسو (۱۹۹۰) ثابت کردند که X و Y هم در مدل مخاطرهای متناسب و هم در میانگین مدل عمر باقی مانده صدق می کنند، اگر توزیع آنها متعلق به GPD باشد. فصل دوم این پایان نامه به بررسی برخی مشخص سازیهای توزیع پارتوی تعمیم یافته اختصاص دارد. به این صورت که، ابتدا قضیه ی معروف لائو و رائو را بیان خواهیم کرد و از آن برای فهم دقیق تر قضایای دیگر استفاده می کنیم. همچنین، بعضی از مشخصه های توزیع هندسی و نمایی و خاصیت بی حافظگی قوی[10] را بسط می دهیم و با متحد ساختن آنها به نتایج اختصاصی توزیع پارتوی تعمیم یافته می رسیم. در ادامه، یک تعریف جدید برای خاصیت بی حافظگی ضربی (MLM) بر حسب تابع میانگین باقیمانده عمر ارائه و نشان می دهیم که تحت بعضی شرایط، توزیع یک متغیر تصادفی پیوسته و نامنفی X خاصیت مذکور را برآورده می کند، اگر یکی از اعضای GPD باشد. سپس یک مشخص سازی برای GPD بر مبنای نسبت نرخ مخاطره (HR) یک متغیر تصادفی پیوسته X و HR متناظر با توزیع وزنی ارائه می کنیم. یکی دیگر از مباحث مهم و پایه علوم آماری، آماره های ترتیبی و آماره های ترتیبی تعمیم یافته[11] هستند که کاربرد فراوانی در مدلسازی و استنباط آماری دارند. آماره های ترتیبی در قابلیت اعتماد و آزمون

---

[1] Oakes, D.
[2] Dasu, T.
[3] Asadi, M.
[4] Order Statistics
[5] Records
[6] Multiplicative Lack of Memory
[7] Proportional Hazards Model
[8] Cox, D. R.
[9] Allen, W. R.
[10] Strong Memoryless Property
[11] Generalized Order Statistics

های طول عمر که داده ها به ترتیب غیر نزولی مشاهده می شوند، کاربرد ویژه ای دارند. لذا بخش قابل توجهی از متون آماری به مطالعه ی آماره های ترتیبی اختصاص دارد و دانشمندان زیادی در این زمینه به تحقیق و تفحص پرداخته اند، که به عنوان مثال می توان به بالاکریشنان[1] و کوهن[2] (۱۹۹۱)، آرنولد، بالاکریشنان و ناگاراجا[3] (۱۹۹۲) و دیوید[4] و ناگاراجا (۲۰۰۳) اشاره کرد. همچنین، مدل آماره های ترتیبی تعمیم یافته را کمپس[5](a,b ۱۹۹۵) به منظور تلفیق مدلهای مختلف متغیرهای تصادفی مرتب شده معرفی کرد و نشان داد که بسیاری از خواص این مدل ها برای آماره های ترتیبی تعمیم یافته نیز برقرار است. آماره های ترتیبی تعمیم یافته ما را قادر می سازند که با یک روش مشترک، شباهتهای ساختاری این مدل ها را مطالعه کنیم. بنابراین، در فصل سوم این پایان نامه، ابتدا به معرفی آماره های ترتیبی و آماره های ترتیبی تعمیم یافته و مقادیر رکورد می پردازیم، سپس یک مشخص سازی GPD بر مبنای می نیمم یک نمونه تصادفی را اثبات می کنیم. همچنین برخی نتایج مشخصه ای توزیع پارتوی تعمیم یافته را بر مبنای آماره های ترتیبی و آماره های ترتیبی تعمیم یافته و در نهایت، بعضی از مشخص سازی های توزیع یکنواخت بر مبنای امید برخی توابع آماره های ترتیبی را بیان می کنیم. در فصل چهارم، چندین خاصیت توزیعی و قضایای مشخص سازی توزیعهای پارتوی چند متغیره تعمیم یافته را مطالعه می کنیم. ابتدا توسط روش می نیمم هندسی[6]، یک قضیه مشخص سازی برای توزیع $MP^{(K)}(III)$ را ارائه می کنیم. به علاوه، توزیع $MP^{(K)}(III)$ را به عنوان یک توزیع چند متغیره ی حدی تحت می نیمم سازی هندسی تکراری[7] به دست می آوریم. همچنین یک قضیه ی مشخص سازی برای توزیع $MP^{(K)}(IV)$ همگن[8] را از طریق می نیمم وزنی، در میان همه ی مولفه های ترتیبی ارائه می کنیم. سپس، دو خاصیت که بر توزیع فلر-پارتو[9] دلالت دارد، را بیان و اثبات می کنیم. و در نهایت، نشان می دهیم که خانواده $MP^{(K)}(II)$ دارای خاصیت پایایی برشی[10] است. در فصل پنجم به مطالعه ی شش توزیع زیپف چند متغیره و بررسی خواص آن می پردازیم و خلاصه در فصل شش، به مطالعه ی سه نوع توزیع نیمه پارتوی چند متغیره[11] عمومی می

[1] Balakrishnan, N.
[2] Cohen, A. C.
[3] Nagaraja, H. N.
[4] David, H. A.
[5] Kamps, U.
[6] Geometric Minima
[7] Repeated Geometric Minimization
[8] Homogeneous
[9] Feller-Pareto Distribution
[10] Truncation Invariant Property
[11] Multivariate Semi-Pareto Distribution

پردازیم که اولین نوع، توزیع پارتوی چند متغیره تعمیم‌یافته نوع سوم است و آن را با نماد $GMP^{(k)}(III)$ نشان داده و دارای توزیع کناری پارتوی یک متغیره نوع سوم است که توسط می‌نیمم دو بردار تصادفی مستقل و هم‌توزیع، مشخص‌سازی می‌شود. دومین نوع، توزیع نیمه پارتوی چند متغیره تعمیم‌یافته[1] است و آن را با نماد $GMSP$ نشان داده و دارای توزیع کناری نیمه پارتوی یک متغیره است که توسط می نیمم نمونه متناهی مشخص سازی می شود و سومین نوع، توزیع نیمه پارتوی چند متغیره است و آن را با نماد MSP نشان داده و توسط روش می نیمم سازی هندسی مشخص سازی می شود. همه این مشخص سازی ها، بر مبنای جواب های خاص و عمومی معادلات تابعی اویلر[2] k-متغیره می باشند.

۱-۲ تعاریف اساسی

مبحث قابلیت اعتماد، به طور گسترده در شاخه های مختلف علوم از جمله پزشکی و مهندسی مورد استفاده قرار می گیرد. قابلیت اعتماد از نظر علم آمار، استفاده از مهارتهای مختلف آماری، در تحلیل متغیرهای تصادفی نا منفی می باشد، که نوع این متغیر، زمان از بین رفتن یک موجود زنده است و معیار موجود زنده بودن، داشتن طول عمر است. به عبارت دیگر، یک موجود زنده می تواند انسان، یک قطعه ی الکتریکی و ... باشد. به طور تخصصی، در مبحث قابلیت اعتماد، از نقطه نظر احتمالی، علاقه مندیم احتمال اینکه موجود از زمان t بیشتر عمر کند را بررسی کنیم. در قابلیت اعتماد اغلب فرض می شود که طول عمر اجزا به صورت متغیرهای تصادفی مستقل توزیع شده اند.

پیشینه ی قابلیت اعتماد کارهایی است که در گذشته بر روی جدول طول عمر انجام شده است. رویکرد نوین به قابلیت اعتماد از نیم قرن گذشته با کاربرد های مهندسی و پزشکی مورد مطالعه قرار گرفته است. در جنگ جهانی دوم، علاقمندی بسیاری به قابلیت اعتماد تجهیزات جنگی به وجود آمد. این علاقمندی به قابلیت اعتماد، موضوع را به کارهای نظامی و فرآورده های تجاری کشاند.

تعریف ۱-۱ (قابلیت اعتماد) قابلیت یک موجود به عنوان مشخصه ای از آن، عبارتست از احتمال این که موجود، کار مورد نظر را تحت شرایط معین، در فاصله زمانی مشخص، بدون خرابی انجام دهد. اگر فرض کنیم متغیر

[1] Generalized Multivariate Semi-Pareto Distribution
[2] Euler

تصادفی T با تابع توزیع F نشانگر طول عمر موجود باشد، تابع قابلیت اعتماد موجود، در زمان t که آن را با $R(t)$ یا $\overline{F}(t)$ نشان می دهیم، عبارتست از احتمال این که متغیر T مقداری بیشتر از t داشته باشد. به این تابع معمولا در بررسی مطالعه طول عمر، تابع بقا[1] نیز می گویند و عبارتست از:

$$R(t)=\overline{F}(t)=P(T>t)=1-F(t)=\int_t^{\infty} f(x)dx \qquad (1-1)$$

که در آن f تابع چگالی T می باشد. واضح است که تابع قابلیت اعتماد، تابعی نزولی (غیر صعودی) از t می باشد. به عبارت دیگر، با گذشت زمان قابلیت اعتماد موجود با طول عمر t افزایش پیدا نمی کند. با توجه به اینکه تابع توزیع تجمعی، تابعی یکنوا، پیوسته از راست و غیر نزولی می باشد، داریم:

$$\overline{F}(0)=1-F(0)=1 \qquad (2-1)$$

$$\lim_{t\to\infty}\overline{F}(t)=1-\lim_{t\to\infty}F(t)=1-1=0 \qquad (3-1)$$

این بدین معناست که یک موجود در لحظه ی شروع فعال است و در نهایت از بین می رود.

تعریف ۱-۲ (طول عمر باقیمانده) می خواهیم طول عمر موجود را با این شرط که بدانیم تا زمان t عمر کرده است، مورد مطالعه قرار دهیم، که در اصطلاح به آن طول عمر باقیمانده ی موجود گفته می شود. در این صورت اگر $\overline{F}(x|t)=P(T>x|T>t)$ نشان دهنده ی قابلیت اعتماد باقیمانده ی T باشد، آنگاه، تابع قابلیت اعتماد موجودی که تا زمان t عمر کرده است، به صورت زیر به دست می آید:

$$\overline{F}(x|t)=\frac{\overline{F}(t+x)}{\overline{F}(t)} \qquad if\ \overline{F}(t)>0,\ x>0 \qquad (4-1)$$

$$F(x|t)=\frac{F(t+x)-F(t)}{\overline{F}(t)}=1-\overline{F}(x|t) \qquad (5-1)$$

[1] Survival Function

۱-۲-۱ تابع نرخ مخاطره

یکی دیگر از توابع مهمی که در تحلیل داده های بقا اهمیت دارد، تابع نرخ مخاطره می باشد نرخ مخاطره نشانگر نرخ در خطر افتادن موجود است به شرط آنکه بدانیم حداقل به اندازه ی t عمر کرده است و آن را با نماد $r(t)$ یا $h(t)$ نمایش می دهند. باید توجه داشت که تابع نرخ مخاطره یک احتمال نیست و در واقع حد یک عبارت است. بنابراین می تواند بیشتر از یک باشد. این تابع می تواند صعودی، نزولی و یا به صورت U شکل باشد. تابع نرخ مخاطره، جنبه ای از توزیع طول عمر را ارائه می کند که دارای معنای فیزیکی است و اطلاعات راجع به این تابع در تحلیل داده های بقا مورد استفاده قرار می گیرد.

به عبارت دیگر، تعبیر احتمالی $h(t)$، بیانگر احتمال این است که یک موجود با سن t در فاصله ی $(t\ ,\ t+\Delta t)$ از کار بیافتد. به عبارت دیگر:

$$h(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(t<T<t+\Delta t|T>t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\overline{F}(t)}$$

$$=\frac{1}{\overline{F}(t)}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}$$

$$=\frac{f(t)}{\overline{F}(t)} \qquad (۱-۶)$$

این تابع با فرض وجود داشتن $f(t)$ و مثبت بودن $\overline{F}(t)$، تعریف می شود. هر تابع $h(t)$ که در شرایط زیر صدق کند، می تواند به عنوان یک تابع نرخ مخاطره به کار رود:

$$(1) \quad h(t) \geq 0$$

$$(2) \quad \lim_{x \to -\infty} \int_{-\infty}^{x} h(t)dt = 0$$

$$(3) \quad \lim_{x \to \infty} \int_{-\infty}^{x} h(t)dt = \infty$$

تابع نرخ مخاطره، همانند تابع مولد گشتاور یک متغیر تصادفی، به طور منحصر بفرد می تواند توزیع آماری T را مشخص کند. یعنی اگر نرخ مخاطره ی یک متغیر تصادفی مانند T را بدانیم، براحتی می توانیم توزیع T را تعیین کنیم.با داشتن h، توزیع F را می توان به صورت زیر تعیین نمود:

$$h(t) = \frac{f(t)}{\overline{F}(t)} \Rightarrow \int_0^t h(x)dx = \int_0^t \frac{f(x)}{\overline{F}(x)}dx = -Ln\overline{F}(x)\Big|_0^t = -Ln\overline{F}(t).$$

در نتیجه:

$$\overline{F}(t) = \exp\left[-\int_0^t h(x)dx\right] \qquad (۱-۷)$$

با توجه به رابطه ی (۱-۷)، تابع چگالی T عبارتست از:

$$f(t) = h(t)\exp\left[-\int_0^t h(x)dx\right] \qquad (۱-۸)$$

که بیانگر ارتباط بین $f(t)$ و $h(t)$ می باشد. با توجه به تعریف تابع نرخ مخاطره اغلب مطالعات طول عمر بر مبنای این تابع صورت می گیرد.

۱-۲-۲ میانگین باقیمانده عمر:

در بسیاری از مواقع، علاقمندیم خواص یک متغیر تصادفی طول عمر را با این فرض که می دانیم حداقل تا زمان t عمر کرده است، را بررسی کنیم. یکی از توابع مهم در بررسی خواص طول عمر یک متغیر تصادفی، میانگین باقیمانده ی طول عمر یا به اختصار MRL می باشد. میانگین باقیمانده ی طول عمر نیز مانند توابعی مثل نرخ مخاطره و یا تابع مولد گشتاور می تواند توزیع T را به طور منحصر بفردی مشخص کند. به عبارت دیگر، یک رابطه ی یک به یک بین تابع

میانگین باقیمانده ی عمر و تابع توزیع متغیر تصادفی T برقرار است. بنابراین، MRL تابع توزیع را به طور یکتا تعیین می کند.

تعریف ۱-۳ (میانگین باقیمانده عمر) فرض کنید T نشان دهنده ی طول عمر یک موجود زنده باشد. اگر بدانیم سن موجود حداقل t است، آنگاه باقیمانده عمر موجود عبارتست از $\left(T-t \,\middle|\, T \geq t\right)$.

میانگین باقیمانده ی عمر موجود که آن را با $m(t)$ نمایش می دهیم، عبارتست از:

$$m(t)=E\left(T-t \middle| T>t\right)=\frac{\int_t^{\infty}\overline{F}(dx)}{\overline{F}(t)} \qquad \overline{F}(t)>0 \tag{۹-۱}$$

میانگین باقیمانده تابع عمر، MRLنقش مهمی در قابلیت اعتماد و تحلیل بقا بازی می کند.

۱-۲-۳ ارتباط بین میانگین باقیمانده ی طول عمر، تابع بقا و نرخ مخاطره

۱-۲-۳-۱ رابطه ی بین میانگین باقیمانده عمر و تابع بقا

اگر متغیر تصادفی $T^*=T-t \middle| T>t$ نشانگر طول عمر باقیمانده از مولفه ای در سن t باشد، تابع بقای T^* در زمان x عبارتست از:

$$S(x)=P\left(T^*>x\right)=P\left(T-t>x \middle| T>t\right)=\frac{\overline{F}(x+t)}{\overline{F}(t)}. \tag{۱۰-۱}$$

اکنون با محاسبه ی میانگین T^* خواهیم داشت:

$$m(t)=\int_0^{\infty}S(x)dx=\int_0^{\infty}\frac{\overline{F}(x+t)}{\overline{F}(t)}dx$$

$$=\frac{\int_t^{\infty}\overline{F}(x)dx}{\overline{F}(t)} \tag{۱۱-۱}$$

۱-۲-۳-۲ رابطه ی بین تابع بقا و تابع میانگین باقیمانده عمر:

اگر میانگین باقیمانده عمر موجود را با $m(t)$ نشان دهیم، آنگاه تابع بقای موجود، $\overline{F}(t)$، بر حسب m به صورت زیر است:

$$\overline{F}(t)=\frac{m(0)}{m(t)}e^{-\int_0^t \frac{1}{m(x)}dx} \qquad (۱-۱۲)$$

برای بررسی صحت این مطلب با توجه به تعریف $m(t)$، می توان نوشت:

$$\frac{\overline{F}(t)}{\int_t^{\infty}\overline{F}(x)dx}=\frac{1}{m(t)}$$

با انتگرال گیری در فاصله $(0,x)$ از طرفین رابطه فوق، خواهیم داشت:

$$\int_0^x \frac{\overline{F}(u)du}{\int_u^{\infty}\overline{F}(v)dv}=\int_0^x \frac{1}{m(u)}du$$

و یا

$$-Ln\ \int_u^{\infty}\overline{F}(u)du\,\Big|_0^x=\int_0^x \frac{1}{m(u)}du$$

که نتیجه می دهد:

$$-Ln\left[\frac{\int_x^{\infty}\overline{F}(u)du}{m(0)}\right]=\int_0^x \frac{dt}{m(t)}$$

و

$$\int_x^{\infty}\overline{F}(u)du=m(0)e^{-\int_0^x \frac{dt}{m(t)}}$$

با مشتق گیری از طرفین رابطه فوق، نتیجه می گیریم:

$$\overline{F}(t)=\frac{m(0)}{m(t)}e^{-\int_0^t \frac{dx}{m(x)}}$$

رابطه فوق، بیانگر رابطه بین میانگین باقیمانده عمر متغیر تصادفی T و تابع بقای T، $\overline{F}(t)$، می باشد.