بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه

بخش ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض گرایش جبر

فیلترها در مشبکه مانده

استاد راهنما:

دکتر اسفندیار اسلامی

استاد مشاور:

دکتر آرشام برومند سعید

مولف:

منیژه پورخاتون

شهریور ماه ۱۳۹۰

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی - دانشکده ریاضی و رایانه

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: منیژه پورخاتون

استاد راهنما: دکتر اسفندیار اسلامی

استادمشاور: دکتر آرشام برومند سعید

داور ۱: دکتر عباس حسنخانی

داور ۲: دکتر شکوفه قربانی

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه: دکتر مرجان کوچک زاده

تقدیم به:

پدر عزیزم

و

همسر صبورم

و

خانواده ی فداکارم

تقدیر و تشکر

حمد و سپاس پروردگار بی همتا را که مرا در راه کسب علم و دانش یاری فرمود و توفیق آموختن ناآموخته ها را به من ارزانی داشت.

با سپاس از استاد گرانقدر جناب آقای پروفسور اسفندیار اسلامی که با راهنمایی و لطف بی پایان در طول انجام این تحقیق راهنما و مشوق بودند.

همچنین با تشکر فراوان از جناب آقای دکتر آرشام برومند سعید که در نهایت صبر حوصله اطلاعات خویش را از من دریغ نداشته و از لغزش و خطا باز داشته اند.

و در نهایت تقدیم به بانیان دانشگاه شهید باهنر کرمان مهندس علیرضا افضلی پور و بانو فاخره صبا و آنانکه نامشان و یادشان نقشی ماندگار بر ذهنم نهاد.

چکیده

در ابتدای این پایان نامه مشبکه ی مانده و خاصیت های آن را بیان می کنیم سپس با استفاده از تعریف مشبکه مانده به بیان MV و BL و $G(RL)$ -جبر می پردازیم.

در ادامه به بیان تعریف فیلتر در مشبکه مانده پرداخته و انواع فیلتر ها را در مشبکه مانده بیان و رابطه بین آنها را تحقیق می کنیم وشرایط وجودی آنها را در جبرهای مختلف بررسی می کنیم.

سپس به تعریف فیلتر سرسخت در مشبکه مانده پرداخته و ویژگی های آن را تحقیق کرده و رابطه این فیلتر را با سایر فیلتر های مشبکه مانده مورد بحث قرار دادیم.

در انتها به بیان فیلترفازی وانواع این فیلترها در مشبکه مانده می پردازیم و رابطه بین این فیلتر های فازی را مورد بررسی قرار می دهیم.

مقدمه

هدف این پایان نامه این است که رابطه ی بین فیلتر های مختلف در مشبکه مانده را بیان کند. برای این منظور در فصل اول مشبکه مانده و خاصیت های آن مطالعه شده است انواعی از مشبکه های مانده مثل مشبکه مانده منظم وموضعی و شبه موضعی همچنین تعاریف اولیه از مجموعه های فازی و فیلتر های فازی در مشبکه های مانده بیان شده است.

در فصل دوم تعریف انواع فیلتر ها در مشبکه مانده بیان و روابط میان آنها ذکر و اثبات شده اند . همچنین نشان داده شده که خاصیت توسیع برای این فیلتر ها برقرار است در انتهای فصل نیز اثبات شده در مشبکه های مانده هرجبر بولی ، یک $G(RL)$ جبر منظم است و برعکس.

در فصل سوم به تعریف فیلتر سرسخت در مشبکه مانده پرداختیم و رابطه این فیلتر را با برخی فیلتر های مطرح شده در فصل دوم بیان کردیم به دنبال آن نشان دادیم که مشبکه مانده ساده فیلتر سرسخت ندارد. همچنین تاثیر یک RL همومورفیسم بر فیلتر سرسخت مورد بحث قرار دادیم. نتایج این فصل را در قالب مقاله ای با عنوان $ObstinateFiltersinResiduatedLattice$ ارائه کردیم که در لیست منابع به عنوان منبع یک بیان شده است .

در فصل آخرنیز انواع فیلتر فازی تعریف شده و معادل بودن FB فیلترها با فیلتر استلزامی فازی و معادل بودن FG فیلترها با فیلترهای استلزامی مثبت فازی و FMV فیلتر ها با فیلترهای جالب فازی نشان داده شده است. بدنبال آن رابطه ی بین یک فیلتر فازی و زیر مجموعه های تراز آن و نیز یک فیلتر فازی با تابع مشخصه آن بررسی شده و نشان داده شده است برای فیلتر فازی مثل μ مشبکه مانده خارج قسمت $\dfrac{A}{\mu}$ آن تشکیل چه نوع جبری می دهد.

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و پیشنیازها

۱.۱ تعاریف و پیشنیازها

در این فصل به بیان پیش نیازها و تعاریف مورد نیاز پرداخته ایم و خواننده را جهت مطالعه بیشتر به منابع [۱۱, ۱۲] ارجاع می دهیم .

تعریف ۱.۱.۱. [۳] یک مجموعه غیر تهی با دو عمل $\wedge, \vee$ را یک مشبکه گوییم اگر در شرایط زیر صدق کند :

(A_1) $x \vee y = y \vee x$، $x \wedge y = y \wedge x$.

(A_2) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$، $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.

(A_3) $x \vee x = x$، $x \wedge x = x$.

(A_4) $x = x \vee (x \wedge y)$، $x = x \wedge (x \vee y)$.

تعریف ۲.۱.۱. [۳] یک دستگاه جبری $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$، از نوع $(2, 2, 0, 0)$ را یک مشبکه کراندار گوئیم، هر گاه:

(۱) $(A, \vee, \wedge)$ یک مشبکه باشد،

(۲)برای هر $x \in A$، $x \vee 1 = 1$ و $x \wedge 0 = 0$.

تعریف ۳.۱.۱. [۳, ۴, ۵, ۱۲, ۱۵] یک دستگاه جبری $(A, \vee, \wedge, *, \to, 0, 1)$ از نوع $(2, 2, 2, 2, 0, 0)$ مشبکه مانده گوئیم، اگر در اصول زیر صدق کند:

(CR_1) $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ مشبکه کراندار باشد،

(CR_2) $(A, *, 1)$ نیم گروه جابه جایی (باعضو یکه ۱) باشد،

(CR_3) $(*, \to)$ یک جفت الحاقی باشند یعنی برای هر $a, b, c \in A$،

$c \leq a \to b \iff a * c \leq b$.

که برای هر $x \in A$، تعریف می کنیم $x^- = x \to 0$ و $x^{--} = (x^-)^-$

مثال ۴.۱.۱. فرض کنید $A=\{۰,a,b,c,d,۱\}$ بطوریکه $۰\lneq b\lneq a\lneq ۱$، $۰\lneq d\lneq c\lneq a\lneq ۱$

تعریف می کنیم $*$ و $\rightarrow$ به صورت:

$*$	۰	a	b	c	d	۱
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
a	۰	a	b	d	d	a
b	c	b	b	۰	۰	b
c	b	d	۰	d	d	c
d	b	d	۰	d	d	d
۱	۰	a	b	c	d	۱

$\rightarrow$	۰	a	b	c	d	۱
۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱
a	۰	۱	b	c	c	۱
b	c	a	۱	c	c	۱
c	b	a	b	۱	a	۱
d	b	a	b	a	۱	۱
۱	۰	a	b	c	d	۱

جدول۱-۱

بنابراین $(A,\wedge,\vee,*,\rightarrow,۰,۱)$، یک مشبکه مانده است.

تعریف ۵.۱.۱. [۱۱]یک عضو $a\in A$، را چگال گویند اگر $a^{-}=۰$. مجموعه ی از همه عناصر چگال A را با $Ds(A)$ نشان می دهیم.

تعریف ۶.۱.۱. [۱۱]مرکز بولی A مجموعه ای از عناصر A که در شرط $a^{-}\vee a=۱$ صدق کند که با $B(A)$ نشان می دهند.

مثال ۷.۱.۱. در مثال ۴.۱.۱ $Ds(A)=\{a,۱\}$ و $B(A)=\{۰,۱\}$ است.

گزاره ۸.۱.۱. [۳, ۱۲, ۱۵] فرض کنید A یک مشبکه مانده دلخواه باشد. روابط زیر برای تمام $x, y, z \in A$، برقرار است:

(P_1) $(x * y) \to z = x \to (y \to z)$

(P_2) $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$

(P_3) $y \to z \leq (x \to y) \to (x \to z)$

(P_4) $y \to x \leq (x \to z) \to (y \to z)$، $y \to x \leq x^- \to y^-$

(P_5) اگر $x \leq y$ آنگاه $z \to x \leq z \to y$

(P_6) اگر $x \leq y$ آنگاه $y \to z \leq x \to z$ و $y^- \leq x^-$

(P_7) $1 \to x = x$، $x \to x = 1$

(P_8) $0^- = 1$، $1^- = 0$

(P_9) $x \leq y$ اگر و تنها اگر $x \to y = 1$

(P_{10}) $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$،

$(x \vee y) \to z = (x \to z) \wedge (y \to z)$

(P_{11}) $x \to (y \to (x * y)) = 1$

(P_{12}) $x * (y \vee z) = (x * y) \vee (x * z)$، $(x \vee y)^- = x^- \wedge y^-$

(P_{13}) $x * y \leq x \wedge y$، $x * x^- = 0$

(P_{14}) $y \leq x \to y$، $x^- \leq x \to y$

(P_{15}) $x^- = x^{---}$، $x \leq x^{--}$

(P_{16}) اگر $x \vee x^- = 1$ آنگاه $x \wedge x^- = 0$

(P_{17}) $x \vee y \leq ((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x)$

(P_{18}) $x * x = x^2 \leq x$

$x \leq (x \to y) \to y$ (P_{19}).

تعریف ۹.۱.۱. [۱۵]مشبکه مانده A را منظم گویند هر گاه برای هر $x \in A$:

$(x \to 0) \to 0 = x$.

مثال ۱۰.۱.۱. فرض کنید $A = \{0, a, b, 1\}$ بطوریکه $1 \lneq a \lneq 0$، $1 \lneq b \lneq 0$ تعریف می کنیم $*$ و $\to$ به صورت:

$*$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

$\to$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	b	1	b	1
b	a	a	1	1
1	0	a	b	1

جدول۱-۲

$(A, \wedge, \vee, *, \to, 0, 1)$ یک مشبکه مانده منظم است

گزاره ۱۱.۱.۱. [۱۵] در هر مشبکه مانده منظم A، خصوصیات زیر برای هر $x, y \in A$ بر قرار است:

$x \to y = y^- \to x^-$ $(PR1)$،

$x * y = (x \to y)^-$ $(PR2)$.

تعریف ۱۲.۱.۱. [۱۱]یک عنصر $a \in A$ را منظم گویند اگر $a^{--} = a$ باشد. مجموعه ای از همه عناصر

منظم A را با نماد $Reg(A)$ نشان می دهند.

مثال ۱.۱.۱۳. در مثال ۱.۱.۴ $Reg(A) = \{0, b, c, 1\}$ است.

تعریف ۱.۱.۱۴. [۳, ۵, ۱۲, ۱۵]مشبکه مانده A را BL - جبر گویند هر گاه برای هر $x, y \in A$، شرایط زیر برقرار باشد:

$(BL1)$ $(x \to y) \vee (y \to x) = 1$، $(BL2)$ $x \wedge y = x * (x \to y)$.

BL - جبر A را جبر گودل (G - جبر)گویند هرگاه برای هر $x \in A$، $x^2 = x * x = x$.

تعریف ۱.۱.۱۵. [۱۵]یک $G(RL)$ - جبر یک G - جبر تعمیم یافته است یعنی یک مشبکه مانده A است که برای هر $x \in A$، در شرط زیر صدق کند:

$x^2 = x * x = x$.

لم ۱.۱.۱۶. [۵, ۱۵]هر BL - جبر یک مشبکه توزیع پذیر است.

مثال ۱.۱.۱۷. فرض کنید $A = \{0, a, b, c, d, 1\}$ بطوریکه $0 \lneq a \lneq b \lneq 1$، $0 \lneq c \lneq d \lneq 1$ تعریف می کنیم *و $\to$ به صورت:

$\to$	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	d	1	1	d	1	1
b	c	d	1	c	d	1
c	b	b	b	1	1	1
d	a	b	b	d	1	1
1	0	a	b	c	d	1

$*$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	a	0	0	a
b	0	a	b	0	a	b
c	0	0	0	c	c	c
d	0	0	a	c	c	d
1	0	a	b	c	d	1

جدول ۱-۳

بنا بر این $(A, \wedge, \vee, *, \rightarrow, ۰, ۱)$ یک BL - جبر است.

تعریف ۱.۱.۱۸. [۵, ۱۲, ۱۵]مشبکه مانده A که برای هر $a, b \in A$، در شرط زیر صدق کند یک MV - جبر است

(MV) $(x \rightarrow y) \rightarrow y = (y \rightarrow x) \rightarrow x$.

MV - جبر A یک BL - جبر است که برای هر $x \in A$، در شرط $x^{--} = x$ صدق کند.

مثال ۱.۱.۱۹. در مثال ۱.۱.۱۷، A یک MV - جبر است.

تعریف ۱.۱.۲۰. [۵, ۱۵]به مشبکه توزیع پذیر کران دار $(A, \vee, \wedge, ۰, ۱)$ همراه با عملگر دوتایی $^{-}$ بطوریکه $x \vee x^{-} = ۱$ و $x \wedge x^{-} = ۰$ برای هر $x \in A$، برقرار باشد جبر بولی گویند.

گزاره ۱.۱.۲۱. [۱۵] در مشبکه مانده A شرایط زیر برای هر $x, y \in A$، با هم معادلند :

(۱) $(x \rightarrow y) \rightarrow x = x$.

(۲) $x \vee x^{-} = ۱$.

(۳) $x^{-} \rightarrow x = x$.

(۴) A یک جبر بولی است.

تعریف ۱.۱.۲۲. [۱۵] یک زیر مجموعه غیر تهی F از مشبکه مانده A را یک فیلتر گوئیم هر گاه برای هر $b, a \in A$، داشته باشیم:

$(F۱)$ $a, b \in F$ ایجاب می کند $a * b \in F$.

$(F۲)$ $a \in F$ و $a \leq b$ ایجاب می کند که $b \in F$.

مثال ۲۳.۱.۱. در مثال ۱۷.۱.۱، $F = \{c, d, ۱\}$ یک فیلتر است.

تعریف ۲٤.۱.۱. [۱۵ ,۱۲]یک زیر مجموعه غیر تهی D ازمشبکه مانده A را یک دستگاه استنتاجی گوئیم، هرگاه برای هر $a, b \in A$، داشته باشیم:

$(F۳)$ $۱ \in D$. $(F۴)$ $x \in D$ و $x \rightarrow y \in D$ ایجاب می کند $y \in D$.

گزاره ۲۵.۱.۱. [۱۵ ,۴]فرض کنید F یک زیر مجموعه غیر تهی از مشبکه مانده A باشد. F یک دستگاه استنتاجی است اگر و تنها اگر F یک فیلتر باشد.

قضیه ۲٦.۱.۱. [۱۵] فرض کنید F زیر مجموعه ای از مشبکه مانده A باشد و $۱ \in F$. پس شرایط زیر معادل است برای هر $x, y, z \in A$:

(۱) F یک فیلتر از A است،

(۲)اگر $x \rightarrow y, y \rightarrow z \in F$ آنگاه $x \rightarrow z \in F$،

(۳)اگر $x \rightarrow y, x * z \in F$ آنگاه $y * z \in F$،

(۴)اگر $x, y \in F, x \leq y \rightarrow z$ آنگاه $z \in F$.

تعریف ۲۷.۱.۱. [۱۱]فرض کنید M یک فیلتر سره از مشبکه مانده A باشد. M را یک فیلتر ماکسیمال گوئیم اگر و تنها اگر برای هر $x \in A$، اگر $x \notin M$ آنگاه عدد صحیح مثبت n به قسمی یافت شود که $(x^n)^- \in M$.

تعریف ۲۸.۱.۱. [۱۱] فرض کنید F یک فیلتر از مشبکه مانده A باشد. F را یک فیلتر اول گوئیم، اگر $x \vee y \in F$، ایجاب کند که $x \in F$ یا $y \in F$.

ملاحظه ۲۹.۱.۱. [۱۱ ,۲] هر فیلتر ماکسیمال از مشبکه های مانده یک فیلتر اول است.

تعریف ۳۰.۱.۱. [۱۱]یک فیلتر سره ی F از مشبکه مانده A را شبه اولیه گویند اگر برای هر $a, b \in A$، که $(a * b)^- \in F$ آنگاه وجود داشته باشد $u \in A$ و $n \in N \cup \{۰\}$ به طوریکه $u \vee u^- \in B(A)$، $(a^n * u)^- \in F$ و $(b^n * u^-)^- \in F$.

مثال ۳۱.۱.۱. فرض کنید $A = \{۰, a, b, ۱\}$ بطوریکه $۱ \lneq a \lneq ۰$، $۱ \lneq b \lneq ۰$ تعریف می کنیم $*$ و $\rightarrow$ به صورت:

$*$	۰	a	b	۱
۰	۰	۰	۰	۰
a	۰	a	a	a
b	۰	a	b	b
۱	۰	a	b	۱

$\rightarrow$	۰	a	b	۱
۰	۱	۱	۱	۱
a	۰	۱	۱	۱
b	۰	a	۱	۱
۱	۰	a	b	۱

جدول ۱-۴

پس $(A, \wedge, \vee, *, \rightarrow, ۰, ۱)$ یک مشبکه مانده است و $F = \{b, ۱\}$ فیلتر شبه اولیه است.

قضیه ۳۲.۱.۱. [۱۵]فرض کنید F یک فیلتر از مشبکه مانده A باشد برای هر $x, y \in A$، تعریف می کنیم:

$x \equiv_F y$ اگر وتنها اگر $(x \rightarrow y) \in F$ و $(y \rightarrow x) \in F$.

آنگاه $\equiv_F$ یک رابطه همنهشتی روی A است. مجموعه تمام کلاس های همنهشتی را با $\dfrac{A}{F}$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می کنیم: $\dfrac{A}{F} := \{[x]_F \mid x \in A\}$، بطوریکه $[x]_F = \{y \in A \mid x \equiv_F y\}$.

اعمال دوتایی $\sqcup, \sqcap, \rightharpoonup, \otimes$ را روی $\dfrac{A}{F}$ به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$[x]_F \sqcup [y]_F = [x \vee y]_F \qquad [x]_F \sqcap [y]_F = [x \wedge y]_F$$

$$[x]_F \otimes [y]_F = [x * y]_F \qquad [x]_F \rightharpoonup [y]_F = [x \rightarrow y]_F$$

بنابراین $(\dfrac{A}{F}, \sqcap, \sqcup, \otimes, \rightharpoonup, [۰]_F, [۱]_F)$ یک مشبکه مانده است، که مشبکه مانده خارج قسمتی بر حسب

F نامیده میشود.

تعریف ۳۳.۱.۱. [۱۱]مشبکه مانده A را موضعی گویند اگر فقط دارای یک فیلتر ماکسیمال باشد.

تعریف ۳۴.۱.۱. [۱۱]مشبکه مانده A را ساده گویند اگر برای هر $A \ni a \neq 1$ وجود داشته باشد $n \in N \cup \{0\}$، بطوریکه $a^n = 0$ شود.

هر مشبکه مانده ساده یک مشبکه مانده موضعی است.

مثال ۳۵.۱.۱. در مثال ۴.۱.۱، A یک مشبکه مانده موضعی است.

تعریف ۳۶.۱.۱. [۱۰]مشبکه مانده A را شبه موضعی گویند اگر برای هر $a \in A$، وجود داشته باشد $n \in N \cup \{0\}$ و $e \in B(A)$ بطوریکه $a^n * e = 0$ و $(a^-)^n * (e^-) = 0$

مثال ۳۷.۱.۱. فرض کنید $A = \{0, a, b, c, d, 1\}$ بطوریکه $0 \lneq a, b \lneq c \lneq d \lneq 1$ تعریف می کنیم $*$ و $\rightarrow$ به صورت:

$*$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	a	a	a
b	0	0	b	b	b	b
c	0	a	b	c	c	c
d	0	a	b	c	c	d
1	0	a	b	c	d	1

$\rightarrow$	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	b	1	b	1	1	1
b	a	a	1	1	1	1
c	0	a	b	1	1	1
d	0	a	b	d	1	1
1	0	a	b	c	d	1

جدول ۱-۵

بنابراین $(A, \wedge, \vee, *, \rightarrow, 0, 1)$ یک مشبکه مانده شبه موضعی است.

هر مشبکه مانده موضعی یک مشبکه مانده شبه موضعی است.

تعریف ۳۸.۱.۱. [۲]فرض کنید A و B یک مشبکه مانده است. یک تابع $f : A \rightarrow B$ را RL - هومورفیسم نامند اگر وتنها اگر

(۱) $f(0) = 0$،

(۲) $f(x * y) = f(x) * f(y)$،

(۳) $f(x \rightarrow y) = f(x) \rightarrow f(y)$،

از اینرو

(۴) $f(0) = 0$، $f(x^-) = [f(x)]^-$، $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$، $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$،

برای هر $x, y \in A$.

۲.۱ تعاریف و پیشنیازهای فازی

تعریف ۱.۲.۱. [۱۶]فرض کنید X یک مجموعه مرجع باشد و A یک زیر مجموعه دلخواه از X باشد. تابع $\mu : X \rightarrow [0, 1]$ رامجموعه فازی روی A است بطوریکه هر $x \in A$ به عددی از فاصله ی $[0, 1]$ نسبت می دهد که به آن تابع عضویت از A می گویند.

تعریف ۲.۲.۱. [۱۵] فرض کنید X یک مجموعه دلخواه باشد و A زیر مجموعه ای از X باشد. مجموعه فازی χ_A روی A را تابع مشخصه از A نامیده و به صورت زیر تعریف میکنیم: