دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (هندسه)

عنوان:

یک متریک کانونی سازگار برای ساختارهای هندسی روی پوچ‌خمینه‌ها

تهیه کننده:
مینا واقف

استاد راهنما:
دکتر اسدالله رضوی

استاد مشاور:
دکتر ناصر بروجردیان

آذر ۱۳۸۶

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی امیر کبیر

معاونت پژوهشی

فرم اطلاعات پایان نامه
کارشناسی ارشد و دکترا
(پلی تکنیک تهران)

تاریخ :
پیوست :

نام و نام خانوادگی : مینا واقف   **دانشجوی آزا د** ☑   **بورسیه** ☐   **معادل** ☐

شمارهٔ دانشجوئی : ۸۴۱۱۳۰۳۱   **دانشکده :** ریاضی و علوم کامپیوتر   **رشتهٔ تحصیلی :** ریاضی محض

نام و نام خانوادگی استاد راهنما : دکتر اسدالله رضوی

عنوان پایان نامه به فارسی: یک متریک کانونی سازگار برای ساختارهای هندسی روی پوچ خمینه ها

عنوان پایان نامه به انگلیسی: A Canonical Compatible Metric for Geometric Structure On Nilmanifolds

نوع پروژه : **کارشناسی ارشد :** ☑ **دکتـــــری** ☐   **کاربردی** ☐   **بنیادی** ☐   **توسعه ای** ☐   **نظری** ☑

تاریخ شروع : فروردین ماه ۸۶   **تاریخ خاتمه :** آذرماه ۸۶   **تعداد واحد :** ۶

سازمان تأمین کننده اعتبار :

واژه های کلیدی به فارسی : همتافته، مختلط، پوچ خمینه ها، گروه های لی پوچ توان ، نگاشت گشتاور، خمینه حل پذیر اینشتین

واژه های کلیدی به انگلیسی : symplectic, complex, nilmanifolds, nilpotent lie groups, moment map, Einstein solvmanifold

نظرها و پیشنهادها به منظور بهبود فعالیتهای پژوهشی دانشگاه :

استاد راهنما :

دانشجو :

امضاء استاد راهنما :   **تاریخ :**

نسخهٔ ۱ : معاونت پژوهشی

نسخهٔ ۲: کتابخانه و به انضمام دوجلد پایان نامه به منظور تسویه حساب با کتابخانه و مرکز اسناد و مدارک علمی

چکیده

در این پایان‌نامه گروه لی پوچ‌توان (N,γ) همراه با یک ساختار هندسی (مانند همتافته، مختلط یا تقریباً مختلط) در نظر گرفته می‌شود و بر آن متریک‌های مینیمال تعریف می‌شود. متریک مینیمال یک متریک ناوردای چپ سازگار با γ است که نرم تانسور ریچی ناوردا نسبت به این متریک در بین همه متریک‌های سازگار با خمیدگی عددی یکسان مینیمم است. ثابت می‌شود که متریک مینیمال در صورت وجود با تقریب یکریختی یکتاست. سپس نشان داده می‌شود که در واقع این متریک‌ها حل سولیتون برای شار ریچی ناوردا هستند و نقاط بحرانی تابعی خاص می‌باشند.

در این راه کروشه‌های لی به جای ضرب‌های داخلی به کار برده می‌شوند. ابزار اصلی، نگاشت گشتاور برای عمل یک گروه لی تحویلی روی مجموعه جبری همه جبرهای لی است که نشان خواهیم داد با عملگر ریچی یکی می‌شود و از این طریق می‌توانیم از نتایج قوی قضیه ناوردایی هندسی استفاده کنیم.

کلمات کلیدی: همتافته، مختلط، پوچ‌خمینه‌ها، گروه‌های لی پوچ‌توان، نگاشت گشتاور، خمینه حل‌پذیر اینشتین

فهرست مندرجات

مقدمه

این پایان‌نامه بر پایه کارهای جورج لورت [1]، در زمینه متریک‌های مینیمال، ریچی سولیتون ناوردا و یافتن متریک‌های سازگار با ساختار هندسی ناوردا بر گروه‌های لی پوچ‌توان است. [۲۳]، [۲۷] و [۲۸] مقاله‌های اصلی هستند که در این زمینه مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

در فصل اول پیش‌نیازها بیان می‌شود.

در فصل دوم با در نظر گرفتن سه ساختار هندسی همتافته، مختلط و ابرمختلط ساختارهای هندسی ناوردا به طور کلی تعریف می‌شود. بنابراین می‌توان این سه ساختار و ساختارهای هندسی مشابه را همزمان مورد مطالعه و بررسی قرار داد. هدف اصلی در این پایان‌نامه یافتن متریک‌های متعارف سازگار با این ساختارهاست. ابزاری که اصولاً در یافتن متریک‌های خاص مورد توجه قرار می‌گیرد، تانسور ریچی است. از آن‌جا که ساختارها نیز در یافتن متریک‌ها نقش دارند عملگر ریچی ناوردا $Ric^{\gamma}_{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ (و نیز تانسور ریچی ناوردا $ric^{\gamma}_{\langle\cdot,\cdot\rangle} = \langle Ric^{\gamma}_{\langle\cdot,\cdot\rangle}\cdot,\cdot\rangle$) تعریف می‌شود. این عملگر افکنش قائم عملگر ریچی بر $\mathfrak{g}_\gamma$ است. $\mathfrak{g}_\gamma$ جبر لی G_γ (زیر گروه $GL(n,\mathbb{R})$ که γ را ناوردا نگه می‌دارد) است. در این راستا متریک‌های مینیمال و ریچی سولیتون ناوردا مطرح می‌شوند. تعریف متریک مینیمال با توجه به مقاله‌های بلیر، ایانوس و لژر است و ایده تعریف ریچی سولیتون ناوردا، شار ریچی تعریف شده توسط هامیلتون در [۱۲] می‌باشد.

بلیر، ایانوس و لژر در [۵] و [٦] ثابت کردند که متریک‌هایی که در شرط

$$ric^{\gamma}_{\langle\cdot,\cdot\rangle} = 0 \tag{۱.۱}$$

صدق می‌کنند در هندسه همتافته بسیار خاص هستند، چنان‌که متریک‌هایی با تانسور ریچی هرمیتی نام دارند و نیز نقاط بحرانی نگاشت‌های S و K (ر. ک. فصل (۵)) هستند. چنان‌که در فصل (۵) ثابت می‌شود رابطه (۱.۱) در گروه‌های لی پوچ‌توان ناآبلی برای هیچ‌یک از ساختارهای نام برده در بالا برقرار نیست. بنابراین طبیعی است تا آنجا که می‌توانیم به این هدف نزدیک شویم. از این رو متریک‌های مینیمال تعریف می‌شوند. متریک‌های مینیمال متریک‌هایی

[1] $Lauret, J.$

هستند که تابع $\|ric^{\gamma}_{\langle\cdot,\cdot\rangle}\|^{2} = tr(Ric^{\gamma}_{\langle\cdot,\cdot\rangle})^{2}$ را روی همه متریک‌های سازگار با خمیدگی عددی یکسان مینیمم می‌کنند. متریک‌های مینیمال نزدیک‌ترین متریک‌های سازگار هستند که در شرط شبه—اینشتین [۲] $(ric^{\gamma}_{\langle\cdot,\cdot\rangle} = c\langle\cdot,\cdot\rangle,\ c \in \mathbb{R})$ صدق می‌کنند. در مورد این متریک‌ها مسئله وجودی هنوز نامشخص است ولی یکتایی در فصل (۴) ثابت می‌شود.

شار تکاملی زیر را در نظر می‌گیریم

$$\frac{d}{dt}\langle\cdot,\cdot\rangle_t = \pm ric^{\gamma}_{\langle\cdot,\cdot\rangle_t}$$

نقاط ثابت این معادله متریک‌هایی هستند که در رابطه (۱.۱) صدق می‌کنند. در هندسه همتافته این شار، شار ریچی پادمختلط شده نامیده می‌شود و اخیراً توسط لی و ونگ در [۲۹] معرفی شده است. در اینجا متریک‌هایی مورد توجه هستند که حل معادله شار نرمال‌شده (خمیدگی عددی در زمان ثابت است) می‌باشند و با متریک ابتدایی ایزومتریک هستند. چنین متریک‌هایی ریچی سولیتون ناوردا نامیده می‌شوند.

در فصل سوم و چهارم قضیه زیر که قضیه اصلی در این پایان‌نامه است، اثبات می‌شود.

قضیه [۲۸] فرض کنید (N,γ) گروه لی پوچ‌توان با ساختار هندسی ناوردای γ را نمایش دهد. شرایط زیر روی متریک ریمانی ناوردای چپ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ سازگار با (N,γ)، هم‌ارزند .

۱) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ مینیمال است.

۲) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ریچی سولیتون ناورداست.

۳) $c \in \mathbb{R}, D \in Der(\mathfrak{n})$ وجود دارند که $Ric^{\gamma}_{\langle\cdot,\cdot\rangle} = cI + D$.

با تقریب یکریختی حداکثر یک متریک ناوردای چپ سازگار با (N,γ) موجود است که در شرایط بالا صدق کند.

برای اثبات این قضیه در فصل سوم نگاشت گشتاور معرفی می‌شود، پس از آن قضیه زیر بیان می‌شود. این قضیه در حالت مختلط توسط نس و کروان در [۳۳] و [۱۸] و در حالت حقیقی که اینجا مورد استفاده قرار می‌گیرد، توسط ماریان ثابت شده است.

---

[۲] $Einstein - like$

قضیه [۳۰] فرض کنید V نمایشی حقیقی از گروه لی تحویلی G، $\mathfrak{p}$ $m : \mathbb{P}V \to$ نگاشت گشتاور و $F = \|m\|^{2} : \mathbb{P}V \to \mathbb{R}$ باشد، آن‌گاه

۱) اگر $x \in \mathbb{P}V$ نقطه بحرانی F باشد، تابعک $F|_{G\cdot x}$ در x مینیمم مقدار خود را خواهد داشت.

۲) در صورت ناتهی بودن مجموعه نقاط بحرانی $F|_{G\cdot x}$، این مجموعه متشکل از $K-$ مداری یکتاست.

نشان داده می‌شود تابع $F(\mu) = tr(Ric_{\mu}^{\gamma})^{2}$ با نگاشت گشتاور برای عمل G_{γ} روی $V = \wedge^{2}\mathfrak{n}^{*} \otimes \mathfrak{n}$ یکی می‌شود و با کمک قضیه بالا، قضیه اصلی نتیجه می‌شود.

در فصل (۵) ساختارهای همتافته و مختلط بیان می‌شوند و چند مثال برای متریک‌های مینیمال ارائه می‌شود.

فصل ۱

پیش نیازها

مقدمه

در این فصل پیش نیازهای پایان‌نامه ارائه می‌شود.

۱.۱ گروه لی

۱.۱.۱ تعریف گروه لی

خمینه (مشتق‌پذیر) G را گروه لی نامیم هرگاه دارای ساختار گروهی باشد و نگاشت

$$\begin{aligned} \theta : G \times G &\longrightarrow G \\ (x,y) &\mapsto x \cdot y^{-1} \end{aligned}$$

مشتق‌پذیر باشد. در اینجا $(\cdot)$ عمل گروه را نشان می‌دهد.

یک مثال از گروه‌های لی، گروه‌های لی کلاسیک است. بنابر [۲] تنها گروهای لی کلاسیک فشرده و ساده، سه خانواده $SU(n)$ و $SO(n)$ و $SP(n)$ هستند.

۲.۱.۱ عمل گروه لی

فرض کنید M یک فضای هاسدورف و G گروه توپولوژیکی باشد و برای هر $g \in G$ همانریختی $p \to g \cdot p$ از M به روی خودش موجود باشد که در شرایط زیر صدق کند

۱) برای هر $p \in M$ و $g_۱, g_۲ \in G$ داشته باشیم $(g_۱ g_۲) \cdot p = g_۱ \cdot (g_۲ \cdot p)$

۲) نگاشت

$$\begin{aligned} \theta : G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\mapsto x \cdot y^{-۱} \end{aligned}$$

پیوسته باشد.

در این صورت G را گروه تبدیلات توپولوژیکی M می‌نامیم. اگر M خمینه، G گروه لی و نگاشت $(g, p) \to g \cdot p$ یک نگاشت مشتق‌پذیر از $G \times M$ به M باشد، G را گروه تبدیلات لی می‌نامند.

۳.۱.۱ مشتق جبرلی و نمایش الحاقی

تعریف ۱.۱ نگاشت خطی $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ را مشتق $\mathfrak{g}$ گویند چنانچه

$$D([X, Y]) = [DX, Y] + [X, DY], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

مجموعه مشتقات $\mathfrak{g}$ را با $Der(\mathfrak{g})$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱ فرض کنیم G گروه لی و $\sigma \in G$. در این صورت

$$I(\sigma) : G \to G, \quad I(\sigma)(g) = \sigma g \sigma^{-۱}$$

را که یک خودریختی است خودریختی داخلی نامند.

قرار می‌دهیم

$$Ad(\sigma) = d(I(\sigma)_e)$$

Ad را نمایش الحاقی نامند.

قضیه ۱.۱ [۲] فرض کنید G گروه ماتریسی است بنابراین

$$Ad(g)(X) = gXg^{-1}, \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \quad g \in G \tag{1.1}$$

۴.۱.۱ همانستگی جبرلی[1]

فرض کنید $\mathfrak{n}$ یک جبر لی باشد. تعریف‌های پایه‌ای فضای همانستگی را بیان می‌کنیم.

تعریف ۳.۱ یک نگاشت $k-$ خطی پاد متقارن از $\mathfrak{n}\times\ldots\times\mathfrak{n}$ (k بار) به $\mathfrak{n}$ را یک هم‌زنجیر[2] $k-$ بعدی می‌نامیم.

تعریف ۴.۱ عملگر دوگان‌مرز[3] نگاشتی $k-$خطی روی فضای برداری $C^k = C^k(\mathfrak{n},\mathfrak{n})$ شامل تمام $k-$هم‌زنجیرها به $C^{k+1} = C^{k+1}(\mathfrak{n},\mathfrak{n})$ است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}\delta(\alpha)(X_1,\ldots,X_{k+1}) &= \sum_{q=1}^{k+1}(-1)^{k+q}[X_q,\alpha(X_1,\ldots,\hat{X}_q,\ldots,X_{k+1})]\\ &+ \sum_{1\leq q<r\leq k+1}(-1)^{r+q}\alpha(X_1,\ldots,\hat{X}_q,\ldots\hat{X}_r,\ldots,[X_q,X_r]).\end{aligned}$$

تعریف ۵.۱ $k-$هم‌زنجیر α را هم‌دور[4] نامیم هرگاه $\delta(\alpha)=0$ و دوگان مرز نامیم هرگاه $\alpha=\delta(\beta)$ که β یک $(k-1)-$هم‌زنجیر است.

$Z^k = Z^k(\mathfrak{n},\mathfrak{n})$ و $B^k = B^k(\mathfrak{n},\mathfrak{n})$ به ترتیب مجموعه‌های هم‌دور و دوگان مرز را نشان می‌دهند.

تعریف ۶.۱ $H^k = H^k(\mathfrak{n},\mathfrak{n}) = \frac{Z^k(\mathfrak{n},\mathfrak{n})}{B^k(\mathfrak{n},\mathfrak{n})}$ فضای همانستگی $k-$بعدی را نشان می‌دهد.

$C^0=\mathfrak{n}$ و $C^1 = End(\mathfrak{n})$ و $C^2 = \wedge^2\mathfrak{n}^*\otimes\mathfrak{n}$. عملگر دوگان مرز برای هر $X\in\mathfrak{n}$،

$$\delta(X) = ad(X)$$

[1] *Lie algebra cohomology*
[2] cochain
[3] coboundary
[4] *cocycle*

و برای هر $A \in End(\mathfrak{n})$ و $X, Y \in \mathfrak{n}$ $\delta(A)(X,Y)$ به صورت

$$\delta(A)(X,Y) = [AX, Y] + [X, AY] - A[X,Y]$$

تعریف می‌شود. Z^0 مرکز $\mathfrak{n}$ و $Z^1 = Der(\mathfrak{n})$.

۵.۱.۱ جبرهای لی تحویلی [۵]

جبر لی $\mathfrak{g}$ تحویلی نامیده می‌شود هرگاه نمایش الحاقی آن نیمه ساده باشد.

قضیه ۲.۱ فرض کنید $\mathfrak{g}$ جبرلی و $\mathfrak{r}$ رادیکال $\mathfrak{g}$ باشد، موارد زیر هم‌ارزند

۱) $\mathfrak{g}$ تحویلی است.

۲) $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ نیمه‌ساده است.

۳) $\mathfrak{g}$ جمع مستقیم یک جبر نیمه ساده و یک جبر آبلی است.

۴) رادیکال پوچ‌توان $\mathfrak{g}$ صفر است.

۵) $\mathfrak{r}$ مرکز $\mathfrak{g}$ است.

گروه لی G را تحویلی گوییم هرگاه جبر لی آن تحویلی باشد.

۶.۱.۱ جبرهای لی حل‌پذیر [۶]

تعریف ۷.۱ مشتقات متوالی جبر لی $\mathfrak{g}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\mathfrak{g} = \mathcal{D}^0\mathfrak{g} \supseteq \mathcal{D}^1\mathfrak{g} \supseteq \mathcal{D}^2\mathfrak{g} \supseteq \ldots \supseteq \ldots$$

که در آن

$$\mathcal{D}^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}, \quad \mathcal{D}^1\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \quad \mathcal{D}^{k+1}\mathfrak{g} = [\mathcal{D}^k\mathfrak{g}, \mathcal{D}^k\mathfrak{g}]$$

---

[۵] *Reductive*

[۶] *Solvable*

جبر لی $\mathfrak{g}$ را حل‌پذیر نامیم هرگاه یک m موجود باشد که $\mathcal{D}^m\mathfrak{g} = 0$.

تعریف ۸.۱ گروه لی S را حل‌پذیر گوییم هرگاه جبرلی آن حل‌پذیر باشد.

۷.۱.۱ گروه لی پوچ‌توان

تعریف ۹.۱ سری نزولی

$$\mathfrak{g} = \mathcal{C}^0\mathfrak{g} \supseteq \mathcal{C}^1\mathfrak{g} \supseteq \mathcal{C}^2\mathfrak{g} \supseteq \ldots \supseteq \ldots$$

را که در آن $\mathcal{C}^{k+1}\mathfrak{g} = [\mathcal{C}^k\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ در نظر می‌گیریم. جبر لی $\mathfrak{g}$ را پوچ‌توان نامیم هرگاه k موجود باشد که $\mathcal{C}^k\mathfrak{g} = 0$.

تعریف ۱۰.۱ کوچکترین عدد k را که برای آن $\mathcal{C}^k\mathfrak{g} = 0$، درجه پوچ‌توانی $\mathfrak{g}$ نامیم.

تعریف ۱۱.۱ گروه لی G را پوچ‌توان گوییم هرگاه جبر لی آن پوچ‌توان باشد.

مثال ۱.۱ در زیر چند مثال از گروه‌های لی پوچ‌توان ارائه می‌شود. در همه مثال‌های این پایان‌نامه کروشه‌های لی تعریف نشده برابر صفر است.

۱) هر جبر آبلی، پوچ‌توان با درجه پوچ‌توانی ۱ است.

۲) جبر هایزنبرگ[۷] H_k که در پایه $\{X_1, \ldots, X_{2k+1}\}$ به صورت

$$[X_{2i-1}, X_{2i}] = X_{2k+1}, \quad i = 1, \ldots, k$$

تعریف می‌شود، پوچ‌توان است و درجه پوچ‌توانی ۲ دارد.

---

[۷] *Heisenberg algebra*

۳) جبر

$$[X_1, X_i] = X_{i+1}, \quad i = 2, \ldots, n-1$$

تعریف شده در پایه $\{X_1, \ldots, X_n\}$ پوچ‌توان با درجه پوچ‌توانی $(n-1)$ است.

۴) زیر جبری از $gl(n,k)$ که بوسیله ماتریس‌های بالا مثلثی ساخته می‌شود پوچ‌توان است.

قضیه ۳.۱ جبر لی پوچ‌توان، حل‌پذیر است.

قضیه ۴.۱ اگر جبر لی $\mathfrak{g}$ پوچ‌توان باشد آنگاه مرکز $\mathfrak{g}$ نابدیهی است.

اثبات: اگر $\mathfrak{g}$ پوچ‌توان با درجه پوچ‌توانی k باشد آنگاه $\mathcal{C}^{k-1}\mathfrak{g} \neq 0$ و مرکز $\mathfrak{g}$ شامل $\mathcal{C}^{k-1}\mathfrak{g}$ خواهد بود. ▲

قضیه ۵.۱ [۱۱] جبرلی $\mathfrak{g}$ پوچ‌توان است اگر و تنها اگر $ad(X)$ برای هر $X \in \mathfrak{g}$ پوچ‌توان باشد.

قضیه ۶.۱ [۱۶] اگر جبرلی $\mathfrak{g}$ پوچ‌توان باشد آن‌گاه برای هر $X \in \mathfrak{g}$ داریم $tr(ad(X)) = 0$.

۲.۱ جبرهایی از نوع H [8]

۱.۲.۱ جبرلی پوچ‌توان ۲− گامی [9]

جبرلی پوچ‌توان $\mathfrak{n}$ را پوچ‌توان ۲− گامی نامیم هرگاه در شرط $\mathcal{C}^2\mathfrak{n} = \{0\}$ صدق کند.

مثال ۲.۱

۱) هر جبر آبلی، پوچ‌توان ۲− گامی است.

۲) جبر هایزنبرگ پوچ‌توان ۲− گامی است.

---

[8] $H - type$

[9] $two - step\ nilpotent\ Lie\ algebras$

۲.۲.۱ جبرهای از نوع H

فرض کنید $\mathfrak{n}$ یک جبرلی پوچ‌توان ۲− گامی باشد. $\mu : \mathfrak{n} \times \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}$ کروشه لی $\mathfrak{n}$ را نشان دهد و $\langle \cdot, \cdot \rangle$ یک ضرب داخلی بر $\mathfrak{n}$ باشد. تجزیه متعامد $\mathfrak{n} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{a}$ را در نظر می‌گیریم که $\mathfrak{z}$ زیر فضایی از مرکز $\mathfrak{n}$ است و $\mu(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) \subset \mathfrak{z}$. نگاشت خطی $j_\mu : \mathfrak{z} \to End(\mathfrak{a})$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\langle j_\mu(Z)X, Y \rangle = \langle \mu(X,Y), Z \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{a}, \ Z \in \mathfrak{z} \tag{۲.۱}$$

چون μ نگاشتی پادمتقارن است، برای هر $Z \in \mathfrak{z}$، $j_\mu(Z)$ نسبت به $\langle \cdot, \cdot \rangle$ پادمتقارن است.

تعریف ۱۲.۱ $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ را گروه لی از نوع H اصلاح شده [۱۰] گوئیم هرگاه برای هر $0 \neq Z \in \mathfrak{z}$، $C(Z) < 0$ موجود باشد که $j_\mu(Z)^2 = C(Z)I$.

تعریف ۱۳.۱ $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ را از نوع H گوئیم هرگاه $C(Z) = -\langle Z, Z \rangle$.

متریک‌های ذکر شده در بالا، بوسیله کاپلان [۱۱] معرفی شدند و نقشی قابل توجه در مطالعه هندسه ریمانی گروه‌های لی پوچ‌توان و گروه‌های لی حل‌پذیر دارند. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه به [۳]، [۲۲] یا [۱۰] رجوع کنید.

هرگاه $\mathfrak{z}$ مرکز $\mathfrak{n}$ باشد، μ نگاشتی از $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ به $\mathfrak{z}$ خواهد بود یعنی $\mu : \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \to \mathfrak{z}$. در این حالت اگر $\mu' = \varphi \cdot \mu$ [۱۲] که $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in GL(\mathfrak{z}) \times GL(\mathfrak{a})$ به آسانی دیده می‌شود که

$$j_{\mu'}(Z) = \varphi_1 j_\mu(\varphi_2^t Z) \varphi_1^t, \quad \forall Z \in \mathfrak{z} \tag{۳.۱}$$

۳.۱ خمینه ریمانی و تانسور ریچی [۱۳]

تعریف ۱۴.۱ یک متریک ریمانی بر خمینه هموار M، یک میدان ۲- تانسوری متقارن و مثبت معین است. خمینه M به همراه متر ریمانی g را خمینه ریمانی گوییم.

---

[۱۰] $modified\ H - type$

[۱۱] $Kaplan, A.$

[۱۲] عمل $GL(n)$ روی $V = \wedge^2 \mathfrak{n}^* \otimes \mathfrak{n}$ در (۳.۳) تعریف شده است.

[۱۳] تعاریف این قسمت مطابق با [۲۰] است.

فرض‌کنید $\mathcal{X}(M)$ مجموعه میدان‌های برداری هموار بر M را نمایش دهد.

تعریف ۱.۱۵ یک التصاق آفین روی خمینه M یک نگاشت دو خطی

$$\begin{aligned}\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \mathcal{X}(M)\\ (X,Y) &\mapsto \nabla_X Y\end{aligned}$$

است که دارای ویژگی‌های زیر است :

$$\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_y Z \tag{۱}$$

$$\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z \tag{۲}$$

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y \tag{۳}$$

$X,Y,Z \in \mathcal{X}(M)$ و $f,g \in D(M)$

تبصره ۱.۱ بر هر خمینه ریمانی M یک التصاق یکتا وابسته به متر ریمانی g وجود دارد که آن را التصاق لوی چویتا نامند. از این به بعد التصاق طبیعی بر خمینه ریمانی را همین التصاق می‌گیریم.

تعریف ۱.۱۶ R خمیدگی خمینه ریمانی M، نگاشتی از $\mathcal{X}(M)$ به $\mathcal{X}(M)$ است که به هر زوج $X,Y \in \mathcal{X}(M)$ نگاشت $R(X,Y) : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ را مربوط می‌کند که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_{[X,Y]}Z, \quad Z \in \mathcal{X}(M)$$

تعریف ۱.۱۷ فرض کنید (M,g) خمینه ریمانی n- بعدی باشد و $R(X,Y)$ تبدیل خمیدگی ریمان را نشان دهد. میدان تانسوری خمیدگی ریمان به صورت زیر تعریف می شود

$$R : T_xM \times T_xM \times T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$R(X_۱, X_۲, X_۳, X_۴) = g(R(X_۳, X_۴)X_۲, X_۱)$$

تعریف ۱.۱۸ میدان تانسوری ریچی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$ric(X,Y) = tr(\varphi : Z \longrightarrow R(Z,X)Y)$$

اگر (M,g) خمینه ی ریمانی و $\{Z_1,\dots,Z_n\}$ پایه متعامد یکه برای T_xM باشد آنگاه

$$ric(X,Y) = \sum_i g(R(Z_i,X)Y,Z_i) = \sum_i R(Z_i,Y,Z_i,X)$$

تعریف ۱.۱۹ اگر $\{X_1,\dots,X_n\}$ پایه متعامد یکه برای T_xM باشد آنگاه

$$sc = ric(X_1,X_1) + \cdots + ric(X_n,X_n)$$

بستگی به پایه انتخابی ندارد و آن را خمیدگی عددی در نقطه $x \in M$ نامند.

تعریف ۱.۲۰ اگر (M,g) خمینه ریمانی باشد عملگر ریچی[۱۴] Ric_g به صورت زیر تعریف می‌شود

$$ric_g(X,Y) = g(Ric_g X,Y) \qquad (۱.۴)$$

تذکر ۱.۱ با توجه به متقارن بودن تانسور ریچی، عملگر ریچی نسبت به ضرب داخلی g متقارن است.

تذکر ۱.۲

$$sc(g) = \sum_i ric(X_i,X_i) = \sum_i g(Ric_g X_i,X_i) = trRic_g \qquad (۱.۵)$$

[۱۴] Ricci operator

۴.۱ هندسه ریمانی متریک‌های ناوردا روی گروه‌های لی پوچ‌توان

قضیه ۷.۱ [۳۷] فرض کنید N گروه لی پوچ‌توان و $\langle\cdot,\cdot\rangle$ و $\langle\cdot,\cdot\rangle'$ متریک‌های ریمانی روی N باشند، $(N,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ و $(N,\langle\cdot,\cdot\rangle')$ یکریخت هستند اگر و تنها اگر $\langle\cdot,\cdot\rangle' = \varphi\cdot\langle\cdot,\cdot\rangle := \langle\varphi^{-۱}\cdot,\varphi^{-۱}\cdot\rangle$ برای $\varphi\in Aut(\mathfrak{n})$.

قضیه ۸.۱ [۱۵] اگر V فضای برداری متناهی‌البعد روی میدان K و $\mathfrak{g}$ زیر جبری از $\mathfrak{gl}(V)$ شامل عناصر پوچ‌توان باشد آن‌گاه

۱) $\mathfrak{g}$ پوچ‌توان است.

۲) بردار $\circ \neq v\in V$ وجود دارد که برای هر $Z\in\mathfrak{g}$ داریم $Zv\neq \circ$.

۳) پایه $X_۱,\dots,X_n$ از V وجود دارد که هر همریختی در $\mathfrak{g}$ را می‌توان با ماتریسی بالا مثلثی بیان کرد.

قضیه ۹.۱ [۱۸] فرض کنید N گروه لی پوچ‌توان و $\mathfrak{n}$ جبر لی N باشد، $\mu:\mathfrak{n}\times\mathfrak{n}\to\mathfrak{n}$ کروشه لی $\mathfrak{n}$ را نشان دهد و $\langle\cdot,\cdot\rangle$ یک ضرب داخلی روی $\mathfrak{n}$ باشد در این صورت تانسور خمیدگی ریچی $ric_{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ و عملگر ریچی $Ric_{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ به صورت زیر هستند

$$\begin{aligned} ric_{\langle\cdot,\cdot\rangle}(X,Y)=\langle Ric_{\langle\cdot,\cdot\rangle}X,Y\rangle &= -\frac{۱}{۲}\sum_{ij}\langle\mu(X,X_i),X_j\rangle\langle\mu(Y,X_i),X_j\rangle \\ &+\frac{۱}{۴}\sum_{ij}\langle\mu(X_i,X_j),X\rangle\langle\mu(X_i,X_j),Y\rangle \qquad (۶.۱)\end{aligned}$$

$X,Y\in\mathfrak{n}$ و $\{X_۱,\dots,X_n\}$ پایه‌ای متعامد یکه برای $(\mathfrak{n},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ است.

اثبات: ثابت‌های ساختاری نسبت به این پایه به صورت $\mu(X_i,X_j)=\sum_{k=۱}^{n}c_{ij}^{k}X_k$ است. c_i ماتریسی را نشان می‌دهد که درایه kj ام آن c_{ij}^{k} است. در واقع c_i ماتریس adX_i نسبت به این پایه است. چنان‌که در [۱۷] ثابت شده داریم

$$ric(X_p,X_r)=-\frac{۱}{۲}trc_pc_r-\frac{۱}{۲}trc_p^tc_r+\frac{۱}{۴}\sum c_{kj}^{p}c_{kj}^{r}+\frac{۱}{۲}\sum(c_{rj}^{p}+c_{pj}^{r})trc_i$$

با توجه به اینکه $tradX = \circ$ و با استفاده از قسمت سوم قضیه (۸.۱)، در فرمول بالا جمله اول و چهارم صفر خواهد بود. با محاسبه‌ای ساده خواهیم دید که در واقع فرمول (۶.۱) دو جمله میانی فرمول بالا است. [15]. ▲

تذکر ۳.۱

$$sc(N, \langle\cdot,\cdot\rangle) = -\frac{1}{4}\|\mu\|^2 \qquad (۷.۱)$$

اثبات: با توجه به (۵.۱)، (۶.۱) و محاسبه‌ای ساده خواهیم داشت

$$\begin{aligned} sc(g) = \sum_k ric(X_k, X_k) &= -\frac{1}{2}\sum_{ijk}\langle\mu(X_k, X_i), X_j\rangle\langle\mu(X_k, X_i), X_j\rangle \\ &+\frac{1}{4}\sum_{ijk}\langle\mu(X_i, X_j), X_k\rangle\langle\mu(X_i, X_j), X_k\rangle = -\frac{1}{4}\|\mu\|^2 \end{aligned}$$

▲

بنابراین $sc(N, \langle\cdot,\cdot\rangle) < \circ$ مگر اینکه N آبلی باشد.

یادآوری ۱.۱ برای هر تابع هموار f بر یک خمینه ریمانی (M, g)، گرادیان f میدان برداری ∇f است چنان‌که برای هر میدان برداری X

$$g(\nabla f, X) = X(f), \qquad \text{یا} \qquad g_x((\nabla f)_x, X_x) = X(f)(x)$$

قضیه ۱۰.۱ [۱۷] گرادیان تابع خمیدگی عددی $sc : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر است

$$grad(sc)_{\langle\cdot,\cdot\rangle} = -ric_{\langle\cdot,\cdot\rangle} \qquad (۸.۱)$$

که $\mathcal{P}$ مجموعه ضرب‌های داخلی بر $\mathfrak{n}$ است.

قضیه ۱۱.۱ [۲۴] برای هر $D \in Der(\mathfrak{n})$ متقارن نسبت به کروشه لی، داریم

$$tr\ (Ric_{\langle\cdot,\cdot\rangle}D) = \circ \qquad (۹.۱)$$

[15] برای اثباتی دیگر ر. ک . [(۷.۳۹)۴]